This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

A 546806

Q
8
.C

3392

Lehrbuch

der

Mechanik,

zugleich

mit den dazu nöthigen Lehren

der

höhern Analysis und der höhern Geometrie.

Elementar vorgetragen

und mit sehr vielen Beispielen der Anwendung versehen

vom

Professor Dr. **Martin Ohm,**

an der Königl. Fr. W. Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegs-Schule und an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kais. Russ. Akademie der Wiss. zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie d. Wiss. zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Zweiter Band.

Statik fester Körper.

Mit zwei Figuren-Tafeln.

Berlin, 1837.

Bei Theod. Chr. Friedr. Enslin.

3392

Lehrbuch

der

Mechanik,

zugleich

mit den dazu nöthigen Lehren

der

höhern Analysis und der höhern Geometrie.

Elementar vorgetragen

und mit sehr vielen Beispielen der Anwendung versehen

vom

Professor Dr. **Martin Ohm,**

an der Königl. Fr. W. Universität, an der Königl. Allgemeinen Krieges-Schule und an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kais. Russ. Akademie der Wiss. zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie d. Wiss. zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Zweiter Band.

Statik fester Körper.

Mit zwei Figuren-Tafeln.

Berlin, 1837.

Bei Theod. Chr. Friedr. Enslin.

zunächst auf das sechste Kapitel, dann auf den Anhang zum achten Kapitel, endlich auf den Anhang am Schlusse des Bandes aufmerksam. Man wird in letztern beiden Anhängen einiges Neue finden, theils in Ansichten, theils in Beweisen; im sechsten Kapitel dagegen wird man eine unnöthige und lästige Weitläufigkeit, so wie auch Unbrauchbarkeit mehrerer Details nicht verkennen. Und doch konnte der Verfasser dieses Kapitel nicht anders abfassen, weil er die Absicht hatte, den Anfängern den Gebrauch der Integral-Rechnung als Summations-Mittel recht anschaulich und umfassend zu zeigen, und zu diesem Zwecke alle Fälle, auch die in den gewöhnlichen Anwendungen nicht vorkommenden, durchnehmen mußte. Nichts belehrt über schwierigere Gegenstände den Anfänger mehr, als logische Erschöpfung des Gegenstandes in einem noch einfachen Falle.

In statischer Beziehung hebt der Verfasser außer dem zehnten Kapitel noch das neunte hervor, welches dem zehnten zur festen Grundlage dient. Man wird darin manches Bekannte entschiedener ausgesprochen und vielleicht auch hier und da neue Ideen vorfinden.

Wenn man bedenkt, daß in der Note S. 5. Zeile 7. — 10. durchaus noch nicht von Massen die Rede seyn kann, weil solche erst viel später zum Vorschein kommen, so wird man dieselbe nicht für unwahr halten. Weil diese vier Zeilen aber eine Unwahrheit enthalten, sobald man Massen berücksichtigt, und solches S. 5. ausdrücklich zu sagen unterlassen worden ist, so holt der Verfasser solches hier noch feierlichst nach, um nicht durch eigene Schuld Anlaß zu Mißverständnissen gegeben zu haben.

Berlin, zu Ostern 1837.

M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des zweiten Bandes.

C. Mechanik, oder Statik und Dynamik.

Zweiter Theil.
Statik fester Körper.

Erstes Kapitel. Allgemeine Begriffe und Sätze (§. 1. — §. 9.).

§. 1. Festes System, fester Körper erklärt. Absolut festes System.

§. 2. Freies, unfreies System.

§. 3. Loses System.

§. 4. Unbedingtes, bedingtes Gleichgewicht.

§. 5. Gleichgeltende Kräften-Systeme; mittlere Kraft, Seiten-Kräfte definirt.

§. 6. Grundsatz. Jeden Punkt in der Richtung der Kraft kann man zum Angriffs-Punkte wählen.

§. 7. Gleiche und genau entgegengesetzte Kräfte vernichten sich; auch der umgekehrte Satz.

§. 8. I. Drei Kräfte im Gleichgewicht schneiden sich allemal in einem und demselben Punkte, oder sind alle drei mit einander parallel; und ihre Richtungen liegen immer in einer und derselben Ebene. II. Zwei Kräfte, deren Richtungen nicht in einer und derselben Ebene liegen, haben keine mittlere Kraft.

§. 9. Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts dreier solcher Kräfte. Vereinigung zweier in eine mittlere. B. II. Definition des Gegen-Paars.

Anmerk. 1. u. 2. Vereinigung und Gleichgewicht beliebig vieler Kräfte in einer und derselben Ebene, und lauter paralleler Kräfte im Raume.

Zweites Kapitel. Von der Zusammensetzung, Zerlegung und vom Gleichgewichte der Gegen-Paare (§. 10. — §. 22.).

§. 10. Axe, Richtung des Gegen-Paares definirt.

§. 11. 1) Moment, Arm des Gegen-Paares. 2) Parallele Gegen-Paare in parallelen Ebenen und mit gleichen Armen sind gleichgeltend. 3) Gegen-Paare in derselben Ebene, mit gleicher Richtung und gleichen Momenten sind gleichgeltend. 4) Gegen-Paare in beliebigen parallelen Ebenen beliebig liegend mit gleichen Momenten und einerlei Richtung sind gleichgeltend. 5) Reducirtes Gegen-Paar. 6) Ein Gegen-Paar ist bestimmt durch seine Axe, sein Moment und seine Richtung. 7) Vereinigung zweier 8) und mehrerer Gegen-Paare, die in einer und derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, in ein einziges, wenn sie nicht im unbedingten Gleichgewichte stehen.

§. 12. Parallelogramm der Gegen-Paare.

§. 13. Gleichartige, ungleichartige Seiten der Axen definirt.

§. 14. Bestimmterer Ausdruck für das Parallelogramm der Gegen-Paare. Zerlegung eines Gegen-Paars in zwei andere.

§. 15. Parallelepipedum der Gegen-Paare.

§. 16. 1) Beliebige Gegen-Paare in ein einziges vereinigt. 2) Unbedingtes Gleichgewicht beliebiger Gegen-Paare ist allemal und auch nur dann vorhanden, wenn die drei Reihen von (Seiten-) Gegen-Paaren einzeln einander unbedingt das Gleichgewicht halten.

§. 17. 1) Positives, negatives Moment wird nur in den Koordinaten-Ebenen zugelassen. Jedes Moment wird im Gegentheil als absolut gedacht. 2) Positive Richtung der Axe eines Gegen-Paares. Dadurch wird die Richtung eines Gegen-Paares um seine Axe bestimmt. 3) In der Koordinaten-Ebene vereinigen sich die Gegen-Paare $P \cdot p$ und $Q \cdot q$ allemal in das einzige $P \cdot p + Q \cdot q$. Ist $P \cdot p + Q \cdot q = 0$, so ist unbedingtes Gleichgewicht unter ihnen. 4) Dasselbe für beliebig viel Gegen-Paare in einer der Koordinaten-Ebenen.

§. 18. I. Das Gegen-Paar mit dem Momente Q zerlegt sich in drei Seiten-Gegen-Paare mit den Momenten $Q \cdot \cos\nu$, $Q \cdot \cos\mu$, $Q \cdot \cos\lambda$. II. Die Seiten-Gegen-Paare, deren Momente G, H, J sind, vereinigen sich in das einzige, dessen Moment $\sqrt{G^2 + H^2 + J^2}$ ist und dessen Axe und Richtung bestimmt werden.

§. 19. I. Beliebig viel (n) Gegen-Paare werden durch bequeme Rechnung in ein einziges vereinigt. II. Bedingungen des Gleichgewichts der (n) Gegen-Paare.

§. 20. Besonderer Fall, wenn die Ebenen aller n Gegen-Paare auf einer der Koordinaten-Ebenen senkrecht stehen. I. Mittleres Gegen-Paar. II. Gleichgewicht.

§§. 21. 22. Andere Formen des unbedingten Gleichgewichts der Gegen-Paare. —

Drittes Kapitel. Betrachtung beliebiger Kräfte im Raume, welche ein festes System angreifen (§. 23. — §. 34.).

§. 23. Statt jeder Kraft P an A in der Richtung AA′ kann man dieselbe Kraft P parallel mit sich einen beliebigen andern Punkt O an-

greifen lassen, wenn man nur noch ein Gegen-Paar hinzufügt in der Ebene OAA′, dessen Moment dem statischen Moment der Kraft P in der Richtung AA′, in Bezug auf O als Centrum des Momentes, gleich ist.

§. 24. Zwei Kräfte P und Q, welche nicht in einer Ebene liegen, in eine Kraft R und ein Gegen-Paar (S, S) umgeformt.

§. 25. Umgekehrt: Eine Kraft R und ein Gegen-Paar (S, S), in eine einzige mittlere Kraft, oder doch in ein mittleres Kräften-Paar umgewandelt.

§. 26. Beurtheilung der Wirkung einer Anzahl n von Kräften. Sie lassen eine einzige mittlere Kraft zu, oder ein mittleres Kräften-Paar, oder sie sind im unbedingten Gleichgewicht.

§. 27. 1) Statt der Projektionen der Momente der Gegen-Paare kann man die statischen Momente der Projektionen der Kräfte nehmen, in Bezug auf den obigen Punkt O als Centrum. 3) Axe der statischen Momente. 4) Statt der Projektionen der Momente der Gegen-Paare kann man die statischen Momente der Kräfte in Bezug auf die durch den Versammlungs-Punkt O gehende Axe der statischen Momente nehmen. 5) Gleichgewicht der Gegen-Paare.

§. 28. Wichtigster und allgemeinster Satz für das unbedingte Gleichgewicht der gegebenen n Kräfte an einem festen System. — Anwendung desselben.

§. 29. Die Aufgabe des (§. 26.) durch die gewöhnliche Rechnung verfolgt. A. Die Kraft P_o an O. B. Das Gegen-Paar Q_o durch Rechnung. C. Die sechs Gleichungen für's unbedingte Gleichgewicht. D. Wenn bloß $X = Y = Z = 0$ ist. E. Wenn bloß $L = M = N = 0$ ist. F. Bedingungs-Gleichung $X \cdot N + Y \cdot M + Z \cdot L = 0$, welche erfüllt seyn muß, wenn eine einzige mittlere Kraft existiren soll. G. Wie außerdem ein mittleres Kräften-Paar gefunden wird.

§. 30. Die Anwendungen des (§. 28.) durch Rechnung.

§. 31. Statt aller n Kräfte kann man die zu einem Versammlungs-Punkte O gehörige Versammlungs-Kraft P_o und das zugehörige Gegen-Paar, welche dasselbe leisten, als gegeben ansehen, und für diese drei Kräfte auf's Neue die Versammlungs-Kraft an einem andern Punkte O′ und das dann zugehörige Gegen-Paar suchen.

§. 32. Dadurch findet man leicht die Versammlungs-Punkte, deren zugehöriges Gegen-Paar das kleinste Moment hat. Central-Axe des angegriffenen Systems. Das kleinste Moment ist allemal $= \frac{L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X}{P_o}$, wo der Zähler, wenn er Null ist, die Existenz einer einzigen mittlern Kraft anzeigt. Gleichungen für letztere.

§. 33. Alles dasselbe durch direkte Rechnung aus dem (§. 29.) abgeleitet.

§. 34. Eigenschaften der statischen Momente der, ein festes System angreifenden Kräfte, in Bezug auf ein beliebig gewähltes Centrum der Momente.

Viertes Kapitel. Einige specielle Fälle der allgemeinsten Aufgabe (§. 35. — §. 40.).

Erste Abtheilung. Wenn mehrere Kräfte ein festes System angreifen, deren Richtungen alle in einer und derselben Ebene liegen.

§. 35. Allgemeines Verfahren.
§. 36. Berechnung der mittlern Kraft. Gleichungen ihrer Richtung. Bedingungen des Gleichgewichts.

Zweite Abtheilung. Theorie der parallelen Kräfte. Bestimmung des Central-Punkts paralleler Kräfte.

§. 37. Allgemeines Verfahren.
§. 38. Zugehörige Rechnungen. Berechnung der mittlern Kraft. Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts.
§. 39. Bestimmung des Central-Punktes paralleler Kräfte.
§. 40. 2) Wenn die Angriffs-Punkte alle in einer Ebene, oder 3) in einer Geraden liegen.

Fünftes Kapitel. Materie, Masse, Volumen, Dichtigkeit, Attraktion, Schwere, Gewicht. Spezifisches Gewicht. (§. 41. bis §. 49.).

§. 41. Erklärung des materiellen Atoms und der Attraktion.
§. 42. Erklärung der materiellen Linie, Fläche und des materiellen Körpers, des homogenen und des heterogenen.
§. 43. Erklärung der Masse und der Dichtigkeit. Mittlere Dichtigkeit. I. $D = \frac{M}{V}$, II. $M = D \cdot V$ und III. $V = \frac{M}{D}$.
§. 44. Das Problem der Attraktionen erörtert.
§. 45. Von der Schwere und der örtlichen Schwere; Gewicht; vertikal, horizontal.
§. 46. Erklärung des Schwer-Punktes.
§. 47. I. $P = M \cdot G$; II. $P = D \cdot V \cdot G$.
§. 48. Das spezifische Gewicht eines materiellen Körpers gegen einen andern, ist das Verhältniß ihrer Dichtigkeiten.
§. 49. Bestimmt angenommene Einheiten.

Sechstes Kapitel. Stehende Koordinaten-Systeme und sonstige stehende Bezeichnung. Allgemeine Sätze der Summation durch Integration, in Bezug auf gegebene begrenzte Räume. Inhalts- und Massen-Bestimmungen durch Integration (§. 50.—§. 54.).

§. 50. Stehende Koordinaten-Systeme.
§. 51. Stehende Voraussetzungen hinsichtlich der Grenzen begrenzter Räume.
§. 52. Von der Zertheilung der Linien, Flächen und Körper in unendlichkleine Elementchen.

§. 53. Von der Summation durch Integration in Bezug auf gegebene begrenzte Räume.

§. 54. Bestimmung der Massen derjenigen materiellen Linien, Flächen oder Körper, deren Dichtigkeit stetig sich ändert, und eine Funktion der Lage des Elementchens ist.

Siebentes Kapitel. Schwer-Punkts-Bestimmungen (§. 55. bis §. 62.).

§. 55. Allgemeine Sätze. I. (() $P_0 = \Sigma P$, ⊙) $P_0 \cdot u_0 = \Sigma(P \cdot u)$. Momenten-Ebene. III. Momenten-Axe. V. Massen statt der Gewichte gesetzt. VI. Volumina statt der Gewichte, wenn die Massen homogen sind.

§. 56. Allgemeine Formeln für den Schwer-Punkt.

§. 57. Schwer-Punkt der geraden Linie.

§. 58. Schwer-Punkt ebener Kurven und Flächen.

§. 59. Schwer-Punkt von Linien im Raume, gekrümmten Flächen und Körpern.

§. 60. Schwer-Punkt von Umdrehungs-Flächen und Umdrehungs-Körpern.

§. 61. Wie bei dem Gebrauche der Polar-Koordinaten die Grenz-Werthe φ', φ'' von φ im Allgemeinen nothwendig noch als Funktionen von θ angesehen werden müssen.

§. 62. Praktische Bemerkungen zur Abkürzung der Rechnungen in einzelnen besondern Fällen.

Achtes Kapitel. Von den Attraktionen (§. 63. — §. 77.).

§. 63. Allgemeines Problem.

§. 64. Wenn das angezogene Element in der anziehenden Masse selbst liegt.

§. 65. Wenn die Anziehungs-Kraft $f_u = \frac{h}{u^2}$ gedacht wird. I. Die Rechnung des (§. 63.); II. die Rechnung des (§. 64.).

§. 66. Attraktion einer concentrischen Hohlkugel.

§. 67. Attraktion eines Ellipsoids auf ein Element in dessen Masse. Rechnung nach (§. 64. oder §. 65. II.). I. Polar-Gleichung des Ellipsoids. II. — VII. Weitere Ausrechnung und Zurückführung auf elliptische Transcendenten.

§. 68. Die Anziehung einer ellipsoidischen Schicht, welche zwei concentrische und ähnliche Ellipsoide bilden, auf ein Element in ihrer Höhlung, ist der Null gleich.

§. 69. Anziehung eines Umdrehungs-Ellipsoids auf ein Element in dessen Masse.

§. 70. Lehrsatz des Ivori, wodurch die Anziehung eines Ellipsoids auf ein Element außerhalb desselben, zurückgeführt wird auf den vorhergehenden Fall der (§§. 67. — 69.).

§. 71. Anziehung eines beliebig gestalteten Körpers auf ein sehr entferntes Element.

Anhang. Einiges über bestimmte Integrale nebst dem Beweis des Ivorischen Lehrsatzes.

§. 72. Ein bestimmtes Doppel-Integral ist die Summe einer Doppel-Reihe von unendlich mal unendlich vielen Gliedern, die zwischen bestimmten Grenz-Gliedern liegen.

§. 73. In einem bestimmten Doppel-Integral kann die Ordnung der Integration umgekehrt werden; doch kann das neue Doppel-Integral oft in zwei und mehr andere zerlegt werden müssen.

§. 74. Verwandlung eines bestimmten Doppel-Integrals in ein anderes, durch Einführung zweier neuen Veränderlichen.

§. 75. Verwandlung eines dreifachen Integrals in ein anderes durch Einführung dreier neuen Veränderlichen.

§. 76. Beispiele zu §§. 74. 75.

§. 77. Beweis des im (§. 70.) hingestellten Ivori'schen Lehrsatzes.

Neuntes Kapitel. Vom Gleichgewichte der unfreien und der losen Systeme. Vom mathematischen Hebel. Bestimmung des Druckes auf Unterlagen (§. 78. — §. 84.).

§. 78. Allgemeine Principien für lose Systeme.

§. 79. Allgemeine Regel für lose Systeme.

§. 80. Gleichgewicht um einen absolut festen Punkt.

§. 81. Neue Regel.

§. 82. Gleichgewicht um eine absolut feste Axe.

§. 83. Vom mathematischen Hebel.

§. 84. Bestimmung des Druckes, den drei oder mehr absolut feste Punkte erleiden.

Zehntes Kapitel. Allgemeines Gesetz des Gleichgewichts. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 85. — §. 92.).

§. 85. Spannung definirt. Zurückführung der statischen Probleme auf das Gleichgewicht des Atoms.

§§. 86. 87. 88. Betrachtung einzelner Fälle in einem festen Körper.

§. 89. Betrachtung des allgemeinen Falles, wo n Atome eines festen Körpers angegriffen sind.

§. 90. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für feste Körper.

§. 91. Dasselbe Princip auf beliebige lose Systeme ausgedehnt.

§. 92. Wie aus diesem Princip wiederum die bekannten Gleichgewichts-Gleichungen für feste, freie oder unfreie Systeme abgeleitet werden.

Anwendungen der Statik zur Beantwortung physikalischer und technischer Fragen.

Elftes Kapitel. Von der Reibung (§. 93. — §. 101.).

§. 93. Begriff der Reibung.

§. 94. Gesetze der Reibung.
§. 95. Wie die Reibung in Rechnung gebracht wird.
§. 96. Versuchswerthe des Reibungs-Koefficienten für gleitende Reibung.
§. 97. Von der wälzenden Reibung.
§. 98. — 101. Vier Aufgaben, wo die bloße Reibung das Gleichgewicht hält.

Zwölftes Kapitel. Gleichgewicht an einigen der einfachsten Maschinen (§. 102. — §. 117.).

§. 102. Begriffe von Last, Kraft und Maschine.
Erste Abtheilung. Von der Rolle, den Rollenzügen und den Flaschenzügen.
§. 103. Erklärung der Rolle.
§. 104. Von der losen Rolle.
§. 105. Von der festen Rolle.
§. 106. Von den Rollenzügen.
§. 107. Von den Flaschenzügen.
Zweite Abtheilung. Vom materiellen Hebel; von dem Rade an der Welle; von den Haspeln und Winden (Göpeln).
§. 108. Vom materiellen Hebel.
§. 109. Vom Rade an der Welle.
§. 110. Vom Haspel.
§. 111. Von der Winde (Göpel).
Dritte Abtheilung. Von der schiefen Ebene; vom Keile; von der Tretscheibe und von der Schraube.
§. 112. Von der schiefen Ebene.
§. 113. Vom Keile.
§. 114. Von der Tretscheibe.
§. 115. Von der Schraube.
Vierte Abtheilung. Von der Reibung eines um einen Cylinder geschlagenen Seiles und von der Steifigkeit der Seile.
§. 116. Von der Reibung eines um einen Cylinder geschlagenen Seiles.
§. 117. Von der Steifigkeit des Seiles.

Dreizehntes Kapitel. Einiges über die Stabilität der Körper (§. 118. — §. 121.).

§. 118. Begriff des stabilen Gleichgewichts.
§. 119. Begriff der Stabilität eines Körpers auf horizontaler Unterlage.
§. 120. Folgerungen daraus.
§. 121. Beispiel der Anwendung auf die Stabilität eines Gewölbes.

Vierzehntes Kapitel. Von den Wagen (§. 122. — §. 127.).

§. 122. Erklärung der Wagen.
§. 123. Gemeine Wage.
§. 124. Gleichung zwischen Gewicht und Ausschlag.

§. 125. Raſchere oder weniger raſche Wage.
§. 126. Römiſche Schnell-Wage.
§. 127. Brücken-Wage.

Fünfzehntes Kapitel. Von den Seil-Maſchinen (§. 128. bis §. 141.).

Erſter Abſchnitt. Von den Seil-Polygonen.

§. 128. Erklärung der Seil-Maſchine und des Seil-Polygons.
§. 129. Spannung an den feſten Enden.
§. 130. Betrachtung eines Seiles mit einem Knoten.
§. 131. Betrachtung eines Seiles mit zwei Knoten.
§. 132. Theorie der Faden-Wage.
§. 133. Betrachtung eines Seiles mit n Knoten.
§. 134. Der beſondere Fall, wo an allen n Knoten bloße Gewichte wirken.
§. 135. Wenn mehrere Seile in einem und demſelben Knoten ſich vereinigen.

Zweiter Abſchnitt. Von den Seil-Kurven, alſo auch von der Ketten-Linie und von der Kettenbrücken-Linie.

§. 136. Allgemeine Aufgabe.
§. 137. Beſonderer Fall, wo die Kurve in einer Ebene liegt.
§. 138. Von der Ketten-Linie.
§. 139. Von der Kettenbrücken-Linie. (Sie iſt eine Parabel.)
§. 140. Gleichung der Kurve, die ein Seil bildet, welches über eine gegebene Fläche geſpannt iſt.
§. 141. Wenn die Reibung berückſichtigt wird.

Sechszehntes Kapitel. Vom Gleichgewicht elaſtiſcher Federn (§. 142. — §. 160.).

§. 142. Elaſtiſche Feder definirt.
§. 143. Aufzählung der Aufgaben.
§. 144. Nähere Beſtimmungen.
§. 145. Die gemachten Hypotheſen.
§. 146. Gleichung für die anfänglich gerade und an einem Ende eingeklemmte elaſtiſche Schiene im Gleichgewicht.
§. 147. Dieſelbe, wenn die Schiene nicht eingeklemmt iſt.
§. 148. Dieſelbe, wenn die Schiene in horizontaler Lage an einem Ende eingeklemmt iſt, am andern Ende aber mit einem Gewicht beſchwert wird.
§. 149. Betrachtung des Falles, wo eine Schiene nur ſehr wenig gekrümmt wird, anfänglich aber, wie bisher immer vorausgeſetzt worden, gerade iſt.
§. 150. Beſtimmung der Kraft der Feder.
§. 151. Die Aufgaben der §§. 145. — 149. für die elaſtiſche Stange, ſtatt der Schiene.

§. 152. Vergleichungen zwischen der Kraft der Feder bei elastischen Stangen, in Bezug auf ihre Querschnitte und die Richtungen nach denen sie gebogen werden sollen.
§. 153. Die Aufgabe der (§§. 145. u. 150.), wenn die elastische Feder anfänglich nicht gerade, sondern selbst schon gekrümmt ist; beide Krümmungen aber, die anfängliche, und die Kurve der Feder, wenn sie sich mit angebrachten Kräften im Gleichgewicht befindet, in einer und derselben Ebene liegen.
§. 154. Allgemeinste Aufgabe.
§. 155. Besonderer Fall hiervon, wenn die Kurve wieder eine ebene wird.
§. 156. Wenn zugleich die Krümmung sehr gering ist.
§. 157. Wenn bloß die Schwere der Stange ganz allein wirkt.
§. 158. Wenn zu gleicher Zeit beide Enden der Stange in der horizontalen Geraden fest gemacht sind.
§. 159. Wenn Gewichte angehängt werden, welche Funktionen von x sind.
§. 160. Wenn ein einziges Gewicht q in die Mitte gehängt wird.

Anhang. Einiges über Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen (§. 1. — §. 18.).

Erstes Kapitel. Summation von Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen (§. 1. — §. 5.).

§. 1. Bekanntere trigonometrische Relationen.
§. 2. Allgemeine Summations-Methode für Reihen, die nach Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen.
§. 3. Summations-Methode durch Zurückführung auf andere schon gefundene Summen.
§§. 4. 5. Einige Anwendungen dieser beiden Methoden.

Zweites Kapitel. Von der Entwikkelung gegebener Funktionen in Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen. (Fourier's Reihen.) (§. 6. — §. 18.)

§§. 6. 7. Entwikkelung einer Funktion φ_x in solche Reihen mittelst der Methode der unbestimmten Koefficienten.
§. 8. Nothwendigkeit der Prüfung dieser Resultate.
§§. 9. — 12. Allgemeine Summation der in den (§§. 6. u. 7.) gefundenen Reihen, für alle Werthe von x zwischen $2\mu\pi$ und $(2\mu+1)\pi$, und auch für alle Werthe von x zwischen $(2\mu-1)\pi$ und $2\mu\pi$.
§. 13. Besondere Fälle, wo $\mu = 0$ oder $\mu = 1$ ist. — Die in den (§§. 6. u. 7.) gefundenen Reihen gelten nur für alle Werthe von x zwischen 0 und π.
§. 14. Umwandlung dieser gefundenen Reihen in andere, welche für alle Werthe von x zwischen 0 und a gelten.

§. 15. Weitere Umwandlung in solche Reihen, welche für alle Werthe von x zwischen —a und +a gelten. — Reihen für Funktionen, die zwar beliebig, aber noch mit besondern Eigenschaften versehen gedacht sind.

§. 16. Die für φ_x gefundenen Reihen, geben dann auch eben solche Reihen für $\delta\varphi_x$, $\delta^2\varphi_x$, ꝛc. ꝛc.

§. 17. Wie diese Reihen in ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen —∞ und +∞ übergehen.

§. 18. Ueber die Konvergenz der Reihen.

C. Mechanik, oder Statik und Dynamik.

Zweiter Theil.

Die Statik fester Körper.

Die Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe und Sätze *).

§. 1.

Erklärung.

Beliebig viele Atome bilden ein **festes System** oder einen **festen Körper**, wenn die auf sie wirkenden Kräfte die **gegenseitige Lage** dieser Atome zu einander nicht zu ändern vermögen. In solchem Falle sagen wir auch: „**diese Atome seyen unter sich fest.**"

Dagegen nennen wir einen Atom, oder beliebig viele Atome eines festen Systems **absolut fest**, sobald vorausgesetzt wird, daß die auf das System einwirkenden Kräfte die **absolute Lage** dieses Atoms oder dieser Atome **im Raume** auf keine Weise zu ändern vermögen.

Die Festigkeit eines Systems und die absolute Festigkeit eines andern, beide sind hiernach nur relativ und von den einwirkenden Kräften abhängig. In den Anwendungen muß man daher jedesmal erst untersuchen, ob bei den eben wirkenden Kräften die vorausgesetzte Festigkeit wirklich statt finde, ehe man die aus diesen Begriffen von Festigkeit hervorgehenden Gesetze wirklich in Anwendung bringen darf.

*) Wir setzen voraus, daß der Leser den Inhalt der drei ersten Kapitel der „Mechanik des Atoms" im ersten Theile dieses Werkes gut vor Augen habe.

Wenn wir in der Folge bloß von einem festen System schlechtweg sprechen, so verstehen wir immer darunter, daß die Atome nur unter sich fest sind.

§. 2.

Erklärung.

Ein festes System nennen wir frei oder unfrei, je nachdem es bloß und allein den einwirkenden Kräften überlassen ist, oder dasselbe noch mit einem andern festen System in einem gegebenen Zusammenhange zu bleiben gezwungen ist.

Kann sich z. B. ein festes System, im Falle einer Bewegung, nur um eine absolut feste Axe, oder um einen absolut festen Punkt drehen, — oder muß dasselbe auf einer gegebenen absolut festen Fläche bleiben, oder dgl. m.; so hat man allemal ein unfreies System.

§. 3.

Erklärung.

Zwei oder mehrere unfreie feste Systeme bilden ein loses System, wenn nämlich diese festen Systeme mit einander in einem gegebenen Zusammenhange zu bleiben gezwungen sind, ohne daß sie zusammen einen einzigen festen Körper bilden.

Werden z. B. zwei feste Körper mit ihren festen Oberflächen zusammengedrückt; oder hängen sie mittelst Seilen auf irgend eine Weise an einander; oder ꝛc. ꝛc.

§. 4.

Erklärung.

Eine beliebige Anzahl von Kräften, welche auf ein festes System einwirken, halten einander im unbedingten Gleichgewicht, wenn ihre gleichzeitige Gesammt-Wirkung das vorausgesetzte feste System, weder wenn es ganz frei, noch wenn es irgend wie unfrei gedacht wird, also auf keinerlei Art und unter keiner Voraussetzung, in Bewegung bringt.

Bringt dagegen die Gesammt-Wirkung aller Kräfte unter einer Voraussetzung zwar keine Bewegung hervor, wohl aber

unter einer andern Voraussetzung, so stehen diese Kräfte nur im bedingten Gleichgewicht, d. h. nur eben unter der Bedingung, daß die erstere Voraussetzung wirklich erfüllt ist.

So z. B. stehen zwei gleiche Kräfte, die einen und denselben Atom im festen System in genau entgegengesetzter Richtung angreifen, nothwendig im unbedingten Gleichgewicht.

Dagegen halten sich zwei gleiche Kräfte P, Q, welche in parallelen Richtungen und in beliebiger Entfernung p von einander, Atome des festen Systems in genau entgegengesetztem Sinne angreifen, zwar ebenfalls im Gleichgewicht, so lange das System ganz frei ist; dagegen nicht mehr, wenn wir einen Atom in der Ebene der Kräfte, z. B. einen Atom in der Kraft P selbst, absolut fest voraussetzen, weil durch letztere Annahme die Kraft P vernichtet ist, also die Wirkung der Kraft Q allein noch übrig bleibt, welche eine Bewegung hervorbringen wird. Diese zwei letztern Kräfte P und Q stehen also nicht im unbedingten Gleichgewicht.

Eben so kann es sich treffen, daß zwei Kräfte R, S, um eine absolut feste Axe keine Bewegung hervorbringen, während sie dasselbe feste System sogleich in Bewegung setzen würden, wenn man es ihnen frei überließe. Diese Kräfte R, S stehen also dann ebenfalls nur im bedingten Gleichgewicht.

§. 5.

Erklärung.

Eine Kraft P, oder zwei und mehr Kräfte P_1, P_2, ꝛc., welche ein festes System angreifen, heißen mit einer, zwei oder mehreren andern Kräften Q, Q_1, Q_2, ꝛc. ꝛc., die dasselbe feste System angreifen, gleichgeltend, wenn die einen, jede an ihrem eigenen Angriffs-Punkte aber in gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, mit letzteren im unbedingten Gleichgewichte stehen.

Ist eine einzige Kraft P mit mehreren anderen Kräften Q, R, S, ꝛc. ꝛc. gleichgeltend, so nennt man P auch die mittlere Kraft (resultante) aus letzteren.

Gleichgeltende Kräfte an einem festen System kann man (an diesem Systeme) unbedingt für einander setzen, denn sie leisten unter allen Voraussetzungen und unter allen Verhältnissen, in welche man das feste System bringen mag, nothwendig immer genau ein und dasselbe.

§. 6.

Grundsatz.

Jeden festen Punkt in der Richtung einer Kraft, welche ein festes System angreift, kann man zum Angriffs-Punkt wählen. Denselben kann man aber auch mit jedem andern festen Punkt, der in der Richtung derselben Kraft liegt, vertauschen.

So oft wir in der Folge statt des einen Angriffs-Punktes irgend einen andern in der Richtung der Kraft wählen, so oft setzen wir stillschweigend voraus, daß derselbe mit dem festen System fest gedacht wird.

§. 7.

Hieraus folgt:

1) Zwei Kräfte P und Q, welche zwei feste Atome A und B genau in der Richtung der Verbindungs-Linie AB oder BA angreifen, können so angesehen werden, als griffen sie einen und denselben Punkt A, oder B (oder C irgendwo in der Richtung AB) an. Sie lassen sich daher in die einzige Kraft P+Q, oder P—Q vereinigen, je nachdem sie in demselben Sinne, oder in entgegengesetztem Sinne wirken, nach (I. Th. Mech. §. 10.).

2) Sind dieselben beiden Kräfte P und Q einander gleich und übrigens in der Richtung AB und BA einander genau entgegen, so vernichten sie sich gegenseitig; d. h. sie stehen mit einander im unbedingten Gleichgewichte; ebenfalls nach (I. Th. Mech. §. 10.).

3) Umgekehrt: Halten zwei Kräfte P und Q an einem festen System einander im unbedingten Gleichgewichte, so sind sie allemal einander gleich und einander genau entgegen, so daß sie in einer und derselben Geraden liegen.

Stellt a jeden Punkt in der Richtung von P vor und wird derselbe absolut fest gedacht, so ist P dadurch vernichtet. Damit nun Q auch vernichtet sey, weil sonst nicht unbedingtes Gleichgewicht wäre, so muß Q durch denselben Punkt a, d. h. durch jeden Punkt von P hindurchgehen. Liegen aber P und Q in einer und derselben Geraden, so müssen sie einander gleich und entgegen seyn, wenn sie sich nicht in eine einzige Kraft verwandeln sollen, welche durch nichts vernichtet wäre.

§. 8.

I. Wird dagegen ein festes System in dreien beliebigen Punkten A_1, A_2 und A_3 von dreien Kräften P_1, P_2 und P_3 angegriffen, welche einander das unbedingte Gleichgewicht halten, so liegen die Richtungen dieser drei Kräfte nothwendig in einer und derselben Ebene, und es schneiden sich entweder alle drei Kräfte in einem und demselben Punkte, oder sie laufen alle drei mit einander parallel.

Denn es muß jede Gerade ab, welche durch jeden Punkt a von P_1 und durch jeden Punkt b von P_2 gedacht wird, auch der P_3 begegnen, weil man sonst diese Gerade ab als absolut fest sich denken, und dadurch die beiden Kräfte P_1 und P_2 vernichten könnte, ohne daß zugleich die einzige noch übrig bleibende Kraft P_3 vernichtet wäre. Also liegen P_1, P_2 und P_3 in einer und derselben Ebene.

Schneiden sich nun zwei dieser Kräfte, z. B. P_1 und P_2 in einem Punkte c_2, so muß deshalb die dritte Kraft P_3 durch denselben Punkt c hindurchgehen, weil man sonst diesen Punkt c absolut fest sich denken könnte, wodurch die zwei Kräfte P_1 und P_2 allein, nicht aber die dritte P_3 vernichtet wäre, so daß die letztere Kraft Bewegung hervorbringen müßte. — Laufen aber zwei der drei Kräfte mit einander parallel, so kann eben deshalb die dritte Kraft keine dieser beiden Kräfte schneiden.

II. Greifen daher zwei Kräfte P und Q, deren Richtungen nicht in einer und derselben Ebene liegen, ein festes System an, so kann es keine einzige dritte Kraft geben, welche mit diesen beiden unbedingt das Gleichgewicht hielte.

Zwei solche Kräfte P und Q, deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, haben daher auch nie eine einzige mittlere Kraft.

§. 9.

Betrachten wir nun die drei Kräfte P_1, P_2, P_3, welche ein festes System bezüglich in den Punkten A_1, A_2, A_3 angreifen, dabei aber einander unbedingt das Gleichgewicht halten, noch etwas näher.

A. Wenn alle drei Kräfte sich schneiden.

I. Schneiden sich diese drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 in einem und demselben Punkte A_0, so kann nach (§. 6.) dieser Punkt A_0

als gemeinschaftlicher Angriffs-Punkt der drei Kräfte angesehen werden, und es finden also hier dieselben Bedingungen des Gleichgewichts und dieselben Folgerungen statt, welche im (I. Th. Mech. Kap. 3.) für diesen Fall entwikkelt worden sind.

Sind also α_1, α_2, α_3 und β_1, β_2, und β_3 die Winkel, welche diese Kräfte P_1, P_2 und P_3 bezüglich mit zweien, in derselben Ebene durch einen beliebigen Punkt O auf einander senkrecht gedachten Axen OX und OY machen, so hat man zunächst nach (I. Th. Mech. §. 21.)

1) $P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 = 0$,

2) $P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 = 0$.

Dann ist aber auch noch nach (I. Th. Mech. §. 30.) die Summe der statischen Momente für jedes in der Ebene der Kräfte beliebig gedachte Centrum $D_1 = 0$, nämlich:

3) $P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 = 0$,

wenn p_1, p_2, p_3 die Arme der Momente (d. h. die senkrechten Entfernungen der Kräfte von dem Punkte D) vorstellen, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem die zugehörigen Kräfte die Ebene um diesen beliebig gedachten Punkt D in einem, oder im entgegengesetzten Sinne drehen würden.

Diese Gleichung (3.) ist aber der Repräsentant von unendlich vielen solchen Gleichungen [in denen nach (I. Th. Mech. §. 30.) die Gleichungen (1. u. 2.) selbst wieder stekken], nach den unendlich vielen Punkten in der Ebene der Kräfte, welche man als Centrum D der Momente nehmen kann.

II. Soll zu zweien gegebenen Kräften P_1 und P_2, welche ein festes System angreifen und deren Richtungen sich schneiden, die mittlere Kraft P_0 gefunden werden, so denke man sich dieser letztern genau gleich und genau entgegen eine Kraft P_3, so daß nach (§. 5.) P_3 mit den Kräften P_1 und P_2 im unbedingten Gleichgewichte steht. Sind nun α_0, β_0 und α_3, β_3 die Winkel, welche P_0 und P_3 mit den Axen machen, und ist p_0 der Arm des Moments der Kraft P_0 für dasselbe Centrum D, für welches p_1, p_2, p_3 die Momenten-Arme der Kräfte P_1, P_2 und P_3 sind, so ist nach dieser Annahme,

$P_3 = P_0$, $\alpha_3 = 180^0 - \alpha_0$, $\beta_3 = 180^0 - \beta_0$, $p_3 = -p_0$;
und die Gleichungen (1.—3.), welche wegen des hier vorausgesetzten Gleichgewichts auch jetzt statt finden, gehen nun über in

4) $P_0 \cdot \cos\alpha_0 = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2$

5) $P_0 \cdot \cos\beta_0 = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2$

und 6) $P_0 \cdot p_0 = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$.

Die Gleichungen (4. u. 5.) geben sowohl P_0 als auch α_0 und β_0; die Gleichung (6.) dagegen vollendet die Bestimmung der Lage der mittlern Kraft P_0, weil durch den Werth des Arms p_0, welchen sie liefert, die Lage der Kraft P_0 von allen andern mit ihr parallelen Richtungen, welche mit den Axen dieselben Winkel α_0 und β_0 machen würden, genau abgesondert ist *). —

Diese Gleichung (3.) lehrt uns zugleich, daß das statische Moment der mittlern Kraft P_0, der Summe der statischen Momente der Seiten-Kräfte P_1 und P_2 gleich ist, wenn nur immer diejenigen Arme als positiv oder negativ in Rechnung gebracht werden, deren zugehörigen Kräfte die Ebene um das Centrum D in einer Richtung, oder in der entgegengesetzten Richtung drehen würden.

III. Da man das Centrum D der Momente nehmen kann, wo man will, so kann man es abwechselnd in der Richtung einer jeden der drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 oder P_0 nehmen, so daß abwechselnd einer der drei Arme Null wird, also auch das zugehörige statische Moment. Die Gleichung (3.) wird dann jedesmal nur zweigliedrig, und lehrt also auch, daß sich je zwei der drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 (oder P_0) zu einander verhalten, wie umgekehrt ihre senkrechten Entfernungen von einem Punkte D, der in der Richtung der dritten Kraft übrigens aber beliebig gedacht wird.

*) In den Untersuchungen der (Kapp. 2. u. 3. des I. Th. Mech.) war für die Bestimmung der mittlern Kraft diese dritte Gleichung deshalb überflüssig, weil daselbst nur ein einziger Atom angegriffen war, welchen daher auch die mittlere Kraft angreifen mußte. Hier sind A_1 und A_2 die angegriffenen Atome, und welche Atome als Angriffs-Punkte der mittlern Kraft genommen werden können, wird hier erst gesucht.

B. Wenn alle drei Kräfte mit einander parallel laufen.

1. Weil alle diese Resultate gelten, die Winkel, welche die Kräfte P_1, P_2 und P_3 (oder P_0) unter sich machen, mögen noch so groß oder noch so klein seyn, also auch wenn diese Winkel von 180° oder von 0 nur unendlich wenig verschieden sind, und weil dieselben Resultate, wenn man diese Winkel $= 0$ oder $= 180°$ setzt, keine Widersprüche enthalten, so muß man dieselben Gleichungen (1. — 3.) für den Fall des Gleichgewichts dreier unter sich paralleler Kräfte P_1, P_2 und P_3, und dieselben Gleichungen (4. — 6.) für die Bestimmung der mittlern Kraft P_0 aus zweien parallelen Kräften P_1 und P_2 noch gelten lassen*). — Aber eben deshalb gelten auch alle Folgerungen dar-

*) Man kann diese an sich einfache Folgerung auch noch besonders beweisen. Es seyen P_1 und P_2 (Fig. 3.) zwei parallele Kräfte, welche die festen Punkte A_1 und A_2 angreifen; man ziehe A_1A_2, und bringe in dieser Richtung an A_1 und A_2 zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte S_1 und S_2 an, so vernichten sich diese, und alle 4 Kräfte sind gleichgeltend mit den beiden P_1 und P_2. Nun vereinigen sich aber P_1 und S_1 in eine mittlere Kraft Q_1, so wie P_2 und S_2 in eine mittlere Kraft Q_2, so daß Q_1 und Q_2 gleichgeltend mit P_1 und P_2, aber nicht mehr mit einander parallel sind. Ist dann P_0 die mittlere Kraft aus Q_1 und Q_2, so ist sie auch die mittlere Kraft von P_1 und P_2. — Sind nun γ_1, δ_1 und γ_2, δ_2 die Winkel, welche S_1 und S_2 mit den Axen machen, so wie ε_1, ζ_1 und ε_2, ζ_2 die Winkel, welche Q_1 und Q_2 mit den Axen machen, und sind s_1, s_2 und q_1, q_2 die Arme der Momente der Kräfte S_1, S_2 und Q_1, Q_2 für ein und dasselbe beliebige Centrum D, so hat man, weil Q_1 die mittlere Kraft aus S_1 und P_1 ist, nach den Gleichungen (4. — 6.) des Textes

1) $Q_1 \cdot \cos\varepsilon_1 = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + S_1 \cdot \cos\gamma_1$;

2) $Q_1 \cdot \cos\zeta_1 = P_1 \cdot \cos\beta_1 + S_1 \cdot \cos\delta_1$;

3) $Q_1 \cdot q_1 = P_1 \cdot p_1 + S_1 \cdot s_1$.

Aber aus ganz analogem Grunde hat man wieder

4) $Q_2 \cdot \cos\varepsilon_2 = P_2 \cdot \cos\alpha_2 + S_2 \cdot \cos\gamma_2$;

5) $Q_2 \cdot \cos\zeta_2 = P_2 \cdot \cos\beta_2 + S_2 \cdot \cos\delta_2$;

6) $Q_2 \cdot q_2 = P_2 \cdot p_2 + S_2 \cdot s_2$.

Und weil endlich P_0 abermals die mittlere Kraft ist aus den sich schneidenden Kräften Q_1 und Q_2, so ist wiederum nach denselben Gleichungen (4. — 6.) des Textes

aus und namentlich auch die Folgerung (A. III.), nämlich daß, wenn die parallelen Kräfte P_1, P_2, und P_3 im unbedingten Gleichgewichte sind, oder P_0 (der P_3 gleich und genau entgegen) mit P_1 und P_2 gleichgeltend ist, dann „je zwei der drei Kräfte P_1, „P_2 und P_3 (oder P_0) zu einander sich verhalten, wie die senk„rechten Entfernungen dieser beiden Kräfte von einem beliebigen „Punkte der dritten."

Weil jedoch bei der parallelen Lage der Kräfte die Winkel α_1, α_2, α_3, α_0 alle einander gleich oder Ergänzungen von einander zu 180° sind, so sind $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$, $\cos\alpha_0$ bis auf das Vorzeichen einander gleich. Dasselbe gilt von $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$ und $\cos\beta_0$. Daher können die Gleichungen (1. 2. und 4. 5.) durch diese absolut gleichen Werthe der Kosinus wegdividirt werden, und deshalb nehmen sie für die parallelen Kräfte eine noch einfachere Form an. Namentlich geben die Gleichungen (4. und 5.)

7) $P_0 = P_1 + P_2$, im Falle der (Fig. 1.)

oder

8) $P_0 = P_1 - P_2$, im Falle der (Fig. 2.), wenn dabei $P_1 > P_2$ vorausgesetzt wird

und in beiden Fällen noch, weil keine Kraft negativ seyn kann,

---

7) $P_0 \cdot \cos\alpha_0 = Q_1 \cdot \cos\varepsilon_1 + Q_2 \cdot \cos\varepsilon_2$;

8) $P_0 \cdot \cos\beta_0 = Q_1 \cdot \cos\zeta_1 + Q_2 \cdot \cos\zeta_2$;

9) $P_0 \cdot p_0 = Q_1 \cdot q_1 + Q_2 \cdot q_2$.

Addirt man nun die Gleichungen (1. 4. und 7.), so erhält man, weil S_1 und S_2 einander genau entgegen wirken, also $\gamma_1 + \gamma_2 = 180°$, folglich auch $\cos\gamma_2 = -\cos\gamma_1$ und weil überdies $S_1 = S_2$ ist, sogleich

I. $P_0 \cdot \cos\alpha_0 = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2$.

Aus ganz analogem Grunde geben die Gleichungen (2. 5. und 8.), wenn man sie addirt,

II. $P_0 \cdot \cos\beta_0 = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2$.

Die Gleichungen (3. 6. und 9.) endlich, zu einander addirt, geben

III. $P_0 \cdot p_0 = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$,

in so ferne $S_1 \cdot s_1 + S_2 \cdot s_2 = S_1 \cdot (s_1 + s_2) = 0$ wird, weil s_1 und s_2 eine und dieselbe Entfernung, aber mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen, vorstellen.

Diese Gleichungen (I. — III.) sind aber genau die Gleichungen (4. — 6.) des Textes. Also gelten die letzteren auch für parallele Kräfte.

9) $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_0 = \cos\alpha_1, \text{ also } \alpha_0 = \alpha_1 \\ \cos\beta_0 = \cos\beta_1, \text{ also } \beta_0 = \beta_1 \end{array}\right\}$,

d. h. die Kraft P_0 wirkt in beiden Fällen im Sinne der P_1, welche im Falle der (Fig. 2.), wo P_1 und P_2 einander entgegen wirken, als die größere vorausgesetzt worden ist.

Nimmt man das Centrum D der Momente in der Richtung der Kraft P_0 selbst an, so erhält man statt der Gleichung

$$P_0 \cdot p_0 = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$$

jetzt bloß

$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = 0;$$

woraus hervorgeht, daß die Kräfte P_1 und P_2 die Ebene um einen jeden Punkt in P_0 in entgegengesetzter Richtung herumdrehen würden. Daraus folgt, daß im Falle der (Fig. I.) die mittlere Kraft P_0 zwischen den Kräften P_1 und P_2 liegen muß, im Falle der (Fig. 2.) dagegen zur Seite und der größern Kraft P_1 am nächsten.

II. Wir müssen nun noch den Fall betrachten, in welchem die parallelen Kräfte P_1 und P_2 einander entgegen wirken, während keine davon die größere ist, sondern beide einander gleich sind. Die Gleichungen (1. — 3.) und auch die (4. — 6.) enthalten aber dann Widersprüche.

Die Gleichungen (1. u. 2.) z. B. geben nun

$$P_3 \cdot \cos\alpha_3 = 0 \quad \text{und} \quad P_3 \cdot \cos\beta_3 = 0,$$

woraus, weil $\cos\alpha_3$ und $\cos\beta_3$ nie zugleich Null werden können,

$$P_3 = 0, \text{ also auch } P_0 = 0$$

folgern würde, welches offenbar unmöglich ist, weil sonst unbedingtes Gleichgewicht zwischen P_1 und P_2 seyn müßte, während doch, wenn man in P_1 einen absolut festen Punkt sich denkt, die Kraft P_2 eine Bewegung hervorbringen muß. Auch würde die (3. oder 6.), wenn $P_3 = P_0 = 0$ wäre, in $P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = P_1 \cdot (p_1 + p_2) = 0$, d. h. in $p_1 + p_2 = 0$ übergehen, für jedes beliebig gedachte Centrum der Momente, wodurch ein Theil so groß wie das Ganze sich ergeben würde.

III

Diese Widersprüche zeigen aber an, daß die Voraussetzung, unter welcher diese Gleichungen (1. — 6.) sich ergeben haben, jetzt einen Widerspruch in sich schließt.

„Zwei gleiche, parallele aber in einem beliebi-

gen Abstande von einander in entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte, haben daher nie eine einzige mittlere Kraft, und können auch nie durch eine einzige (dritte) Kraft im unbedingten Gleichgewicht erhalten werden *).

Zwei solche Kräfte nennen wir aber von nun an ein Gegen-Paar.

Die in vorliegender Abtheilung (B.) gegebene Theorie der parallelen Kräfte kann man auch sehr einfach aus dem bloßen Kräften-Parallelogramm herholen. Man kann nämlich zuerst, wie in der kurz vorhergehenden Note geschehen ist, zwei gleiche Kräfte S_1 und S_2 in A_1 und A_2 anbringen, welche sich vernichten, und dann die $S_1 = A_1K$ (Fig. 3.) und $P_1 = A_1M$ in die mittlere Kraft $Q_1 = A_1G$; eben so die $S_2 = A_2L$ und $P_2 = A_2N$ in die mittlere Kraft $Q_2 = A_2H$ vereinigen. — Hernach aber denkt man sich diese Kräfte Q_1 und Q_2 verlängert, bis sie sich in B schneiden, läßt sowohl Q_1 als auch Q_2 an diesem gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkte B angreifen, legt aber durch B zwei mit P_1 oder P_2 und mit A_1A_2 parallele Linien BE und CBF; zerlegt dann Q_1 sogleich wieder in zwei Seiten-Kräfte, nach den Richtungen BC und BE, und erhält natürlich genau die Kräfte S_1 und P_1 wieder. Eben so zerlegt man Q_2 in B, nach den Richtungen BF und BE in ihre beiden Seiten-Kräfte und erhält natürlich genau S_2 und P_2 wieder. Die S_1 und die S_2 heben sich dann sogleich wieder auf, und die P_1 und P_2 in der Richtung BE, also die einzige Kraft P_1+P_2 in der (mit P_1 oder P_2 parallel gezogenen) Richtung BE, bleibt als End-Resultat übrig. Also hat man wieder $P_0 = P_1+P_2$ gefunden; so wie auch, daß diese Kraft P_0 mit P_1 und P_2 parallel läuft.

Um nun noch die Lage des Punktes A_0 zu finden, in welchem diese mittlere Kraft P_0 (oder die Richtung BE) der Verbindungs-Linie A_1A_2 begegnet, betrachtet man die beiden Paare ähnlicher Dreiecke, nämlich

$$KA_1G \sim A_0A_1B \text{ und } LA_2H \sim A_0A_2B.$$

Sie geben die Proportionen

$$A_1K:KG = A_1A_0:A_0B, \text{ oder } S_1:P_1 = A_1A_0:A_0B$$

und

$$A_2L:LH = A_2A_0:A_0B, \text{ oder } S_2:P_2 = A_2A_0:A_0B.$$

---

*) Dies lehrt auch die bloße Ansicht der (Fig. 2.). Läge die mittlere Kraft zwischen P_1 und P_2, so hätte sie dasselbe Recht, in der Richtung von P_1 wie in der Richtung von P_2 zu wirken. Und läge die mittlere Kraft zur Seite der Kräfte P_1 und P_2, so hätte sie wieder dasselbe Recht, der P_1 genau so nahe zu liegen, als der P_2, also dasselbe Recht links der Kräfte zu liegen, als rechts. — Darum kann es keine mittlere Kraft geben.

Dividirt man aber diese beiden Gleichungen (Proportionen) durch einander, so erhält man sogleich

$$P_1 : P_2 = A_2A_0 : A_1A_0,$$

woraus noch

$$P_1 + P_2 : P_1 = A_2A_0 + A_1A_0 : A_2A_0, \text{ d. h. } P_0 : P_1 = A_1A_2 : A_0A_2$$

und $P_1 + P_2 : P_2 = A_2A_0 + A_1A_0 : A_1A_0$, d. h. $P_0 : P_2 = A_1A_2 : A_0A_1$

hervorgeht; während sich diese schiefen (in der Richtung der A_1A_2 genommenen) Entfernungen wiederum wie die senkrechten Entfernungen der Kräfte von einander verhalten.

Daß man das ganz analoge Verfahren auch auf den Fall der (Fig. 2) anwenden könne, versteht sich von selbst. — Wollte man aber in diesem letztern Falle $P_1 = P_2$ annehmen, so würde man die beiden neuen Kräfte Q_1 und Q_2 immer wieder gleich, parallel und einander entgegengesetzt finden, so daß man auf diesem Wege zwar eine unendliche Menge gleichgeltender Gegen-Paare, aber nie eine einzige mittlere Kraft finden würde, welche an die Stelle des Gegen-Paares treten könnte.

Anmerk. 1. A. Es ist sehr leicht, aus den vorstehenden Resultaten für den Fall, daß n Kräfte P_1, P_2, P_3, ··· P_n ein festes System angreifen, deren Richtungen alle in einer und derselben Ebene liegen, und die dabei entweder alle oder nur zum Theil mit einander parallel sind, oder von denen keine der andern parallel ist, die einzige mittlere Kraft P_0, im Falle eine solche existirt, zu finden, da man immer erst zwei der Kräfte in eine einzige vereinigen kann, dann mit dieser eine dritte; u. s. w. f. — Der Gang der Rechnung würde analog dem seyn, wie er in einer kurz vorhergehenden Note, für die Vereinigung der vier Kräfte S_1, S_2, P_1 und P_2 statt gefunden; nur noch einfacher. — Das Resultat selbst wird offenbar, es mögen die Kräfte alle oder nur zum Theil mit einander parallel seyn, oder wenn auch gar keine der andern parallel ist, folgendes

$$(\odot) \cdots \quad P_0 \cdot p_0 = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + \cdots + P_n \cdot p_n.$$

In diesem Resultate stekken aber unendlich viele Gleichungen nach den verschiedenen Punkten D, welche zum Centrum der statischen Momente genommen werden mögen. Namentlich stekken darin auch die Gleichungen

$$(\mathbb{C}) \cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 \cdot \cos\alpha_0 = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n \\ P_0 \cdot \cos\beta_0 = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n \end{array} \right\}.$$

Diese letzteren beiden geben am bequemsten α_0 und β_0 und

P_0. — Die Gleichung $(\odot)$, wenn man sie für irgend ein bestimmtes Centrum D nimmt, giebt dann den Arm p_0 noch dazu, d. h. die senkrechte Entfernung dieses Punktes D von der Richtung der mittlern Kraft P_0, wodurch diese Richtung von jeder mit ihr parallelen, welche mit den Axen dieselben Winkel α_0 und β_0 macht, abgesondert ist. Auch zeigt, da der Sinn, in welchem P_0 wirkt, durch die Winkel α_0 und β_0 völlig bestimmt ist, der positive oder negative Werth von p_0 noch deutlich, auf welcher Seite von D die Richtung P_0 genommen werden müsse.

B. Wollte man die Gleichungen aufsuchen, welche bei dem Gleichgewicht der gegebenen n Kräfte statt finden müssen, so würde man die Kraft P_n, der mittlern Kraft aus den übrigen $n-1$ Kräften genau gleich und genau entgegen nehmen. Dies würde zu der Gleichung

$$(\odot_1)\cdots \quad 0 = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + \cdots + P_n \cdot p_n$$

führen, welche wiederum Repräsentant von unendlich vielen Gleichungen ist. In diesen Gleichungen stekken namentlich noch die beiden

$$(\mathbb{C}_1)\cdots \left\{ \begin{array}{l} 0 = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n \\ 0 = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n \end{array} \right\}.$$

Umgekehrt ließe sich zeigen, daß, wenn diese beiden letztern Gleichungen $(\mathbb{C}_1)$ statt finden, und die erstere Gleichung $(\odot_1)$ nur für ein einziges beliebiges, aber bestimmtes Centrum D noch dazu; oder, wenn bloß allein die Gleichung $(\odot_1)$, aber für drei beliebige und bestimmte Centra D, D′ und D″, welche nicht alle dreie in derselben Geraden liegen, statt findet, — die gegebenen Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ dann allemal nothwendig einander unbedingt das Gleichgewicht halten, so daß dann die Gleichung $(\odot_1)$ auch noch für jedes vierte Centrum der Momente nothwendig mit statt finden muß.

Anmerk. 2. Man kann auch mittelst des im (§. 9.) Gesagten, augenblicklich beliebig viel parallele Kräfte, welche ein festes System angreifen, und deren Richtungen (nicht gerade alle in einer und derselben Ebene, sondern) beliebig im Raume liegen, vereinigen. Man vereinigt nämlich zuerst diejenigen Kräfte

alle in eine einzige, welche in einem und demselben Sinne wirken, dann die übrigen, welche im entgegengesetzten Sinne wirken, wieder in eine einzige; zuletzt aber die beiden Resultate, wenn sie kein Gegen-Paar bilden, und auch nicht im unbedingten Gleichgewichte sind, in die einzige gesuchte mittlere Kraft.

Man kann auch diese Vereinigung durch bequeme Rechnung verfolgen.

A. Denkt man sich nämlich von den Punkten A_1, A_2 und A_0 der (Fig. I.), wo die beiden parallelen Kräfte P_1, P_2 und deren mittlere Kraft P_0 angreifen, auf eine ganz beliebig gelegte Ebene E drei senkrechte Linien gefällt, deren Längen bezüglich durch x_1, x_2 und x_0 vorgestellt seyn mögen, und legt man in der durch diese senkrechten Linien gebildeten Ebene, durch A_1 und A_0 parallele Linien mit dieser Ebene E, so daß drei rechtwinkliche Dreiecke entstehen, deren Hypothenusen A_0A_1, A_0A_2, A_1A_2, und deren (auf der Ebene E senkrechte) Katheten bezüglich $x_0 - x_1$, $x_2 - x_0$, $x_2 - x_1$ sind, so hat man wegen der Aehnlichkeit dieser Dreiecke

$$A_1A_0 : A_2A_0 = x_0 - x_1 : x_2 - x_0;$$

aber nach (§. 9.) ist

$$P_1 : P_2 = A_1A_0 : A_2A_0,$$

folglich auch

$$P_1 : P_2 = x_0 - x_1 : x_2 - x_0.$$

Diese Gleichung, wenn man die Brüche wegschafft (d. h. die äußern und innern Glieder der Proportion mit einander multiplizirt) giebt sogleich

$$(P_1 + P_2) \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2,$$

oder, weil $P_1 + P_2 = P_0$ ist,

$$1) \qquad P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2.$$

Denkt man sich nun drei auf einander senkrechte Koordinaten-Ebenen, und sind x_0, y_0, z_0, desgleichen x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten-Werthe der Angriffs-Punkte A_0, A_1 und A_2, so finden außer der Gleichung (1.) auch noch diese beiden andern Gleichungen

2) $P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2$

und 3) $P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2$

statt, durch welche drei Gleichungen die Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 des Punktes A_0 gefunden werden, wenn die der beiden Punkte A_1 und A_2 gegeben sind.

B. Denkt man sich nun drei unter sich parallele und in demselben Sinne wirkende Kräfte P_1, P_2 und P_3, welche drei beliebige Punkte eines festen Systems angreifen, deren Koordinaten-Werthe bezüglich x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 seyn mögen, und sucht man die einzige Kraft P_0 und ihren Angriffs-Punkt x_0, y_0, z_0, welche dasselbe leistet, so vereinigt man erst zwei der drei Kräfte, z. B. P_1 und P_2 in die einzige P', deren Angriffs-Punkt x', y', z' seyn mag. Man hat dann, nach (A.) und (§. 9.),

1) $P' = P_1 + P_2$;

2) $\left\{ \begin{array}{l} P' \cdot x' = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \\ P' \cdot y' = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 \\ P' \cdot z' = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 \end{array} \right\}$.

Hernach aber vereinigt man diese so eben gefundene Kraft P' und die dritte P_3, die wieder mit einander parallel laufen, nach denselben Prinzipien in die gesuchte P_0, und hat deshalb

3) $P_0 = P' + P_3$;

4) $\left\{ \begin{array}{l} P_0 \cdot x_0 = P' \cdot x' + P_3 \cdot x_3 \\ P_0 \cdot y_0 = P' \cdot y' + P_3 \cdot y_3 \\ P_0 \cdot z_0 = P' \cdot z' + P_3 \cdot z_3 \end{array} \right\}$.

Substituirt man nun hier statt P' und x', y', z' ihre Werthe aus (1. u. 2.), so hat man zuletzt

I. $P_0 = P_1 + P_2 + P_3$;

II. $\left\{ \begin{array}{l} P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 \\ P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 \\ P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 \end{array} \right\}$,

wodurch die einzige mittlere Kraft P_0 und ihr Angriffs-Punkt x_0, y_0, z_0 gefunden ist.

C. Denkt man sich nun n Kräfte P_1, P_2, ... P_n unter sich parallel, und Punkte eines festen Systems angreifend, deren

Koordinaten-Werthe bezüglich x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; $\cdots x_n, y_n, z_n$ ſeyn mögen, und ſucht man die einzige mittlere Kraft P_0, welche parallel laufen muß mit den parallelen Kräften, ſo wie noch ihren Angriffs-Punkt, deſſen Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 ſeyn mögen, — ſo findet man offenbar, wenn man ſo fortfährt, wie in (B.) gezeigt worden,

$$\text{I.} \qquad P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n;$$

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \cdots + P_n \cdot x_n \\ P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \cdots + P_n \cdot y_n \\ P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + \cdots + P_n \cdot z_n \end{array} \right\}.$$

D. Es iſt nicht ſchwer nachzuweiſen, daß dieſe Formeln noch gelten, wenn die parallelen Kräfte nicht alle in demſelben Sinne wirken, ſobald man nur diejenigen negativ in Rechnung bringt, welche im entgegengeſetzten Sinne wirken.

E. Weil endlich alle n Kräfte P_1, $P_2 \cdots P_n$ einander unbedingt im Gleichgewicht halten, wenn die eine davon, der mittlern Kraft aus den übrigen genau gleich und genau entgegen iſt, ſo folgt noch, daß dieſes unbedingte Gleichgewicht allemal ſtatt finden muß, ſo oft

$$\text{I.} \qquad P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 0,$$

und, — wenn man dasmal die Koordinaten-Ebene der x und der y auf der Richtung der parallelen Kräfte ſenkrecht nimmt — noch

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \cdots + P_n \cdot x_n = 0 \\ P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \cdots + P_n \cdot y_n = 0 \end{array} \right\}$$

iſt, wobei diejenigen Kräfte in dieſen Formeln als negative Zahlen in Rechnung gebracht werden, welche im entgegengeſetzten Sinne wirken.

Anmerk. 3. Wir haben in den vorhergehenden Anmerkungen (1. und 2.) angedeutet, wie man in dieſen beiden Fällen vorſchreiten könne. Weil man aber bei allen dieſen Unterſuchungen auf Gegen-Paare ſtoßen kann; endlich, weil die allgemeinſte Aufgabe der Statik, wo Kräfte ein feſtes Syſtem

in ganz beliebigen Richtungen im Raume angreifen, doch nicht so einfach behandelt werden kann, so werden wir die hier nur angedeuteten Untersuchungen erst später gehörig gründlich auffassen und unser nächstes Augenmerk lieber den Gegen-Paaren zuwenden, als der ersten und auch einzigen neuen Erscheinung, zu welcher die Betrachtung der angegriffenen festen Systeme führt.

Die Statik fester Körper.

Zweites Kapitel.

Von der Zusammensetzung, Zerlegung und vom Gleichgewicht der Gegen-Paare.

§. 10.

Erklärung.

Zwei gleiche, parallele, aber entgegengesetzt wirkende Kräfte, wie P, P (Figg. 4. 5.), welche ein festes System angreifen, bilden ein Gegen-Paar. — Ein solches liegt immer in einer Ebene, bildet eine Ebene, und jede auf diese Ebene senkrechte Gerade heißt seine Axe. — Denkt man sich irgend eine dieser Axen durch einen beliebigen Punkt D gelegt, der aber in der Richtung irgend einer der beiden gleichen Kräfte des Gegen-Paares liegt, so wird, im Falle diese Axe absolut fest gedacht wird, die Ebene von der andern der beiden gleichen Kräfte allemal in einem und demselben Sinne gedreht, man mag den Punkt D in der einen oder in der andern der gleichen Kräfte annehmen. — Wir aber sagen in der Folge: „zwei Gegen-Paare, die in einer und derselben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, haben eine und dieselbe Richtung oder sie haben entgegengesetzte Richtungen, je nachdem diese Drehung der Ebene oder der parallelen Ebenen in einem und demselben Sinne, oder in entgegengesetztem Sinne vor sich geht, sobald man die hier angegebene Voraussetzung macht.

So haben z. B. P, P und Q, Q (Fig. 4. u. 7.) entgegengesetzte Richtungen; dagegen haben P, P und R, R (Fig. 7.) einerlei Richtung. Nach dieser Definition ist die Richtung eines Gegen-Paares, von der Richtung einer Kraft etwas sehr verschiedenes; und der Leser muß in der Folge diesen Unterschied gehörig festhalten, namentlich z. B. daß die Richtung der Gegen-Paare P, P und Q, Q nicht allein in der (Fig. 4.), sondern auch in der (Fig. 5.) eine entgegengesetzte ist.

Ferner mag der Leser besonders fest halten, daß wir hier nie eine solche absolut feste Axe voraussetzen, sondern daß wir allemal ein festes System im Auge haben, welches eben sowohl ganz frei, als irgendwie unfrei gedacht wird.

Im ganz freien System hält sich ein Gegen-Paar allemal das Gleichgewicht, wie solches unmittelbar aus dem Grundsatze (§. 6.) hervorgeht. Dagegen tritt die Wirkung eines Gegen-Paares in den meisten nicht freien Systemen augenblicklich hervor.

§. 11.

Von den Gegen-Paaren stellen wir nun zunächst noch folgende Wahrheiten auf:

1) Die Summe der statischen Momente der beiden, ein Gegen-Paar bildenden Kräfte P, P, welche unter sich den senkrechten Abstand p haben, ist allemal

$$= P \cdot p,$$

wo man auch in der Ebene des Gegen-Paares das Centrum D der Momente annehmen mag, wenn man nur jedes Moment als positiv in Rechnung bringt, dessen Kraft um das gewählte Centrum D im Sinne der Richtung des Gegen-Paares (§. 10.) drehen will; dagegen jedes Moment als negativ in Rechnung bringt, welches in der entgegengesetzten Richtung drehen würde.

Ist nämlich D, D′ oder D″ (Fig. 4.) zum Centrum der Momente genommen, und sind ADB, D′CE und D″GF auf die Richtungen des Gegen-Paares senkrecht gezogen, so ist die Summe der statischen Momente

$$\text{einmal} = P \cdot AD + P \cdot BD = P \cdot AB = P \cdot p,$$
$$\text{das andere Mal} = P \cdot D'E - P \cdot D'C = P \cdot CE = P \cdot p,$$
$$\text{und dann} = P \cdot D''F - P \cdot D''G = P \cdot FG = P \cdot p;$$

und dasselbe Resultat erhält man noch, wenn das Centrum der Momente in einer der beiden gleichen Kräfte selbst angenommen werden sollte.

Diese für alle Centra D konstante Summe P·p der Momente nennen wir von nun an schlechtweg das Moment des

Gegen-Paares, so wie die senkrechte Entfernung p der beiden gleichen Kräfte P, P, welche das Gegen-Paar bilden, von einander, schlechtweg der Arm des Gegen-Paares genannt werden kann.

2) Zwei ein festes System angreifende Gegen-Paare, die bezüglich in parallelen Ebenen liegen, welche dieselben Arme haben, und deren Kräfte einander gleich und parallel sind, — sind entweder gleichgeltend, oder sie halten sich einander unbedingt im Gleichgewicht, je nachdem beide Gegen-Paare einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben (im Sinne des §. 10.).

Denn man lege eine dritte Ebene senkrecht auf die 4 parallelen Kräfte, von denen (P, P) (Fig. 6.) das eine Gegen-Paar bilden sollen, (P′, P′) dagegen das andere. Die Punkte A, B, C, E, in welchen diese Ebene von den Kräften getroffen wird, bilden ein beliebiges Parallelogramm, weil nach der Voraussetzung die beiden Arme AB und CE unserer Gegen-Paare gleich und parallel sind. Zieht man daher die beiden Diagonalen AE und BC, so halbiren sich diese gegenseitig einander in H. Statt der beiden Kräfte P und P′ an B und C kann man daher nach (§. 9. B.) die einzige mittlere Kraft 2P an H setzen, in so ferne der Voraussetzung zu Folge P′ = P seyn soll. Eben so vereinigen sich die beiden Kräfte P und P′ an A und E, in die einzige mittlere Kraft 2P′ an H; zuletzt vernichten sich aber, weil P′ = P, also auch 2P′ = 2P ist, diese beiden Kräfte 2P und 2P′ an H einander unbedingt. —

3) Ein Gegen-Paar (P, P) (Fig. 7.), welches den Arm p hat, ist mit jedem andern in derselben Ebene beliebig wie liegenden Gegen-Paare (Q, Q), welches den Arm q hat, sobald beide Momente P·p und Q·q einander gleich sind, entweder gleichgeltend oder im unbedingten Gleichgewicht, je nachdem beide Gegen-Paare einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben.

Denn schneiden sich die Richtungen der Gegen-Paare in den Punkten A, B, C, E (Fig. 7.), so bilden diese ein Parallelogramm, dessen beide Höhen bezüglich p und q sind, so daß man nach der Voraussetzung

$$P:Q = q:p = AC:AB$$

hat. Deshalb kann man die Größe, so wie die Richtungen der Kräfte P, P, Q, Q, durch die 4 Seiten dieses Parallelogramms vorgestellt seyn lassen. Vereinigt man nun die beiden Kräfte P und Q, welche den gemeinschaftlichen Punkt B angreifen, in eine einzige, so ist sie der Größe und Richtung nach durch die Diagonale BC vorgestellt. Vereinigt man aber die beiden andern Kräfte P und Q mit einander, welche alle beide den Punkt C angreifen, so erhält man eine mittlere Kraft, welche der Größe und

Richtung nach durch die Diagonale CB vorgestellt ist. Diese beiden mittleren Kräfte, folglich beide Gegen-Paare halten sich also im unbedingten Gleichgewicht. Dadurch ist aber auch die erstere Behauptung (für den hier gedachten Fall) außer Zweifel gesetzt.

Sind jedoch die Richtungen der Gegen-Paare (R, R) und (P, P) mit einander parallel, ist dabei aber wieder $R \cdot r = P \cdot p$, wo r den Arm des Gegen-Paares (R, R) vorstellt, so würde man sich ein beliebiges solches Gegen-Paar (Q, Q) mit dem Arm q denken, welches P, P und R, R schneidet, und für welches man $Q \cdot q = P \cdot p = R \cdot r$ voraussetzt. — Dann sind aber (R, R) und (P, P) deshalb gleichgeltend, weil jedes für sich dem Gegen-Paar (Q, Q) unbedingt das Gleichgewicht hält *).

4) Aus (2. u. 3.) folgt aber nun unmittelbar:

Zwei Gegen-Paare (P, P) und (Q, Q), welche in beliebigen parallelen Ebenen beliebig wie liegen, und deren Momente $P \cdot p$ und $Q \cdot q$ einander gleich sind, sind am festen System entweder gleichgeltend, oder sie halten einander im unbedingten Gleichgewicht, je nachdem sie beide einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben.

5) Also kann man auch für jedes Gegen-Paar (P, P), welches den Momenten-Arm p hat, in derselben oder in einer mit ihr parallelen Ebene, irgend wo ein gleichgeltendes Gegen-Paar $(P \cdot p, P \cdot p)$, welches den Momenten-Arm 1 hat, substituiren, wenn nur beide einerlei Richtung haben.

Ein solches Gegen-Paar, dessen Momenten-Arm $= 1$ ist, nennen wir ein reduzirtes.

6) Weil aber alle Gegen-Paare in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen gleichgeltend sind, wenn sie gleiche Momente und einerlei Richtung haben, so ist ein Gegen-Paar hinsichtlich seiner Wirkung hinreichend gegeben, sobald man sein Moment hat, und die Lage seiner Axe (d. h. vielmehr die Lage einer seiner

*) Daraus folgt aber, daß ein Gegen-Paar die Ebene desselben um jeden beliebigen Punkt D in derselben, immer in einem und demselben Sinne drehen wird, wo auch dieser Punkt D gedacht werden mag. — Denn man kann allemal dasselbe Gegen-Paar irgend wo hin in die Ebene, also auch so legen, daß die eine seiner beiden gleichen Kräfte durch den angenommenen Punkt D geht. Die Drehung der Ebene um diesen Punkt D will daher nun im Sinne des letztern Gegen-Paares, also auch im Sinne des erstern erfolgen.

unzählig vielen unter sich parallelen Axen) und seine Richtung (um eine beliebige dieser Axen).

Und ist M das Moment irgend eines Gegen-Paares, so sind (M, M) die beiden gleichen Kräfte eines gleichgeltenden reduzirten Gegen-Paares (dessen Momenten-Arm = 1 ist), welches man als zu derselben Momenten-Axe gehörend sich denken muß, und in derselben Richtung.

Zerlegt man endlich die Größe M der beiden gleichen Kräfte, welche ein reduzirtes Gegen-Paar bilden, in zwei beliebige Faktoren $f \cdot f'$, so ist das reduzirte Gegen-Paar (M, M), sowohl mit dem Gegen-Paar (f, f) gleichgeltend, welches den Momenten-Arm f' hat, als auch mit dem Gegen-Paar (f', f') gleichgeltend, welches den Momenten-Arm f hat, sobald nur diese Gegen-Paare einerlei Richtung haben.

7) Zwei Gegen-Paare, deren Momente $P \cdot p$ und $Q \cdot q$ sind, und welche in einer und derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, vereinigen sich in ein einziges gleichgeltendes Gegen-Paar, dessen Moment

$$P \cdot p + Q \cdot q, \quad \text{oder} \quad P \cdot p - Q \cdot q$$

ist, je nachdem beide erstere Gegen-Paare einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben, und wenn im letztern Fall $P \cdot p \gtrless Q \cdot q$ ist.

Denn nimmt man statt der beiden gegebenen Gegen-Paare ihre gleichgeltenden reduzirten $(P \cdot p, P \cdot p)$ und $(Q \cdot q, Q \cdot q)$, und bringt man sie beide in derselben parallelen Ebene und in denselben, um 1 von einander entfernten Punkten a und b an, so vereinigen sich die am ersten Punkt a angebrachten Kräfte $P \cdot p$ und $Q \cdot q$ in die einzige $P \cdot p + Q \cdot q$ oder $P \cdot p - Q \cdot q$, je nachdem sie an a in derselben oder in entgegengesetzter Richtung wirken. Dasselbe gilt von den in b angebrachten beiden Kräften $P \cdot p$ und $Q \cdot q$.

Zeigt sich aber das Moment $P \cdot p - Q \cdot q$ der Null gleich, so halten sich die beiden gegebenen Gegen-Paare einander unbedingt das Gleichgewicht.

8) Beliebig viele Gegen-Paare, welche zu einer und derselben Axe gehören (d. h. welche in einer und derselben Ebene, oder in beliebigen parallelen Ebenen liegen, beliebig wie) vereinigen sich daher allemal in ein einziges Gegen-Paar, dessen

Moment jedoch auch der Null gleich werden kann; in welchem letztern Falle sie alle einander unbedingt das Gleichgewicht halten.

§. 12.

Parallelogramm der Gegen-Paare.

Die (§§. 10. u. 11.) enthalten die wichtigsten Sätze von solchen Gegen-Paaren, die in einer und derselben Ebene oder in, unter sich parallelen Ebenen auf ein festes System wirken.

Denken wir uns aber nun zwei Gegen-Paare, deren Momente P·p und Q·q sind, in Ebenen, die nicht mit einander parallel laufen, sondern welche sich in einer Geraden OZ (Fig. 8.) schneiden. Bringt man die Kräfte (P·p, P·p) und (Q·q, Q·q) der gleichgeltenden reduzirten Gegen-Paare senkrecht auf OZ an, an denselben beliebigen, um 1 von einander entfernten Punkten a und b, jede, wie sich von selbst versteht, in ihrer Ebene, so machen die an a wirkenden Kräfte P·p und Q·q denselben Winkel φ mit einander, den die Ebenen der Gegen-Paare, oder ihre Axen mit einander machen; während die an b wirkenden beiden Kräfte P·p und Q·q gleichsam den Scheitel-Winkel des eben bemerkten bilden. — Die beiden an a wirkenden Kräfte P·p und Q·q vereinigen sich nun in eine einzige, der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms ausgedrückt, dessen Seiten die in a angebrachten Kräfte P·p und Q·q sind. — Dasselbe gilt von den beiden an b angebrachten Kräften; und letztere mittlere Kraft ist offenbar der ersteren wiederum gleich, parallel und entgegen.

Also vereinigen sich diese beiden Gegen-Paare, deren Momente P·p und Q·q sind und welche in den beiden in OZ sich schneidenden Ebenen liegen, allemal in ein einziges mittleres Gegen-Paar, welches in einer, durch dieselbe Gerade OZ hindurchgehenden Diagonal-Ebene liegt. Die Lage dieser Diagonal-Ebene, so wie das Moment dieses mittlern Gegen-Paares findet sich aber allemal dadurch, daß man durch einen beliebigen Punkt O in OZ eine dritte Ebene senkrecht auf OZ legt, welche

die beiden erſteren Ebenen in den auf OZ ſenkrechten Geraden OX und OY ſchneidet, — auf dieſen letztern Linien von O aus Stücke OA und OB abträgt, welche bezüglich den Momenten P·p und Q·q gleich ſind, dann dieſe Stücke zu einem Parallelogramm AOBC ergänzt, zuletzt aber die Diagonale OC zieht. Die Länge OC drückt dann das Moment des mittlern Gegen-Paares aus; und ZOCV iſt die Ebene, in welcher dieſes mittlere Gegen-Paar beliebig wo angenommen werden kann *).

Man kann aber auch in der Ebene XOY von O aus auf OX und OY die ſenkrechten Linien X″OX′ und Y″OY′ ziehen, welche bezüglich die Axen der Gegen-Paare P·p und Q·q ſeyn werden. Macht man nun

$$OA' = OA = P\cdot p \text{ und } OB' = OB = Q\cdot q,$$

und zeichnet man das Parallelogramm A′OB′C′ aus, ſo iſt OC′ = OC und OC′V′ wiederum ſenkrecht auf OCV; d. h. OC′ kann man als Moment des mittlern Gegen-Paares nehmen und zu gleicher Zeit als Axe deſſelben.

Dieſe Wahrheit kann man den Satz des Parallelogramms der Gegen-Paare nennen.

§. 13.

Um dieſen wichtigen Satz des Parallelogramms der Gegen-Paare, der dem Satze des Kräften-Parallelogramms (I. Th. Mech. §. 13.) ſo gänzlich analog iſt, für die Anwendung beſtimmter und bequemer ausſprechen zu können, fügen wir noch folgende Betrachtungen hinzu:

1) Von jedem beliebigen Punkte O in der Ebene eines Gegen-Paares gehen zwei auf die Ebene des Gegen-Paares ſenkrechte Richtungen OW und OW′ aus, einander gerade entgegen; und beide ſenkrechte Richtungen OW und OW′ machen eine einzige auf beiden Seiten fortgehende Gerade WOW′ aus, welche wir im (§. 10.) die Axe des Gegen-Paares nannten. Jede ſolche Axe

*) Daß man daſſelbe Gegen-Paar auch in jeder, mit der ſo eben beſtimmten Ebene ZOCV parallelen Ebene annehmen könne, iſt aus (§. 11. Nr. 4.) bekannt.

hat also zwei einander entgegengesetzte Richtungen, welche wir die entgegengesetzten Seiten der Axe nennen wollen.

2) Sind nun zwei oder mehr Gegen-Paare in verschiedenen sich beliebig schneidenden Ebenen gegeben, so kann man die Ebenen je zweier dieser Gegen-Paare, und die beiden zugehörigen Axen, so auf einander gelegt sich denken, daß die beiden Gegen-Paare in Bezug auf die jetzt gemeinschaftliche Axe einerlei Richtung (§. 10.) haben; — man kann aber auch die Axe des einen Gegen-Paares und die zugehörige Ebene umkehren, und dann wieder mit der erstern Axe und Ebene zusammenfallen lassen, so daß das eine Gegen-Paar in Bezug auf die jetzige gemeinschaftliche Axe eine entgegengesetzte Richtung des andern hat. Von beiden Gegen-Paaren nenne man nun diejenigen der beiden in (1.) erwähnten Seiten der Axen gleichartig, welche in der erstern der hier erwähnten Lagen zusammenfallen; ungleichartig sind dann diejenigen Seiten der Axen, welche in der letzterwähnten Lage zusammenfallen.

3) Läßt man also von einer beliebigen Anzahl beliebiger Gegen-Paare, die sich in ganz beliebigen Ebenen befinden, die gleichartigen Seiten der Axen zusammenfallen, so haben die Gegen-Paare alle in Bezug auf diese jetzt gemeinschaftlich gedachte Axe eine und dieselbe Richtung.

§. 14.

Den im (§. 12.) hingestellten Satz des Parallelogramms der Gegen-Paare kann man nun so geben:

Zwei Gegen-Paare, deren Momente P·p und Q·q sind, und deren Ebenen sich irgend wo in einer Geraden OZ schneiden, vereinigen sich allemal in ein einziges gleichgeltendes (mittleres) Gegen-Paar, dessen Moment, dessen Axe und dessen Richtung auf nachstehende Art gefunden werden:

Man denke sich durch einen beliebigen Punkt O (Fig. 8.) in OZ, die Axen X′OX″ und Y′OY″ der beiden gegebenen Gegen-Paare, nehme von diesen Axen die gleichartigen Seiten OX′ und OY′ (oder OX″ und OY″), trage auf diesen

von O aus die Momente ab, $OA' = P{\cdot}p$ und $OB' = Q{\cdot}q$, und ziehe das Parallelogramm $OA'C'B'$ aus; ſo iſt die Diagonale OC' 1) der Größe nach das Moment des geſuchten mittlern Gegen-Paares, 2) der Richtung nach aber die, mit den gleichartigen Seiten OX' und OY' der Axen wiederum gleichartige Seite der Axe des geſuchten Gegen-Paares. Durch dieſen letztern Umſtand iſt aber die Ebene, oder jede mit ihr parallele, und die Richtung des mittlern Gegen-Paares völlig beſtimmt ausgeſprochen.

Umgekehrt: Hat man ein Gegen-Paar, deſſen Moment $S{\cdot}s$ iſt, in einer beliebigen Ebene ZOV, ſo kann man ſolches allemal in zwei andere Gegen-Paare zerlegen, welche in beliebigen, durch eine beliebig in der Ebene des Gegen-Paares $S{\cdot}s$ *) genommene Gerade OZ hindurchgehenden Ebenen XOZ und YOZ liegen, und welche mit dem gegebenen Gegen-Paar gleichgeltend ſind. Man muß zu dem Ende auf der Axe des Gegen-Paares $S{\cdot}s$, in irgend einer der beiden Seiten der Axe z. B. auf OV' ein Stück $OC' = S{\cdot}s$ abtragen, auf die Ebenen XOZ, YOZ die Normalen $X'OX''$ und $Y'OY''$ ſich denken, welche zu Axen der geſuchten Gegen-Paare genommen werden können; zuletzt aber durch C' in der Ebene der drei Axen OV', OX' und OY' mit dieſen letztern Axen parallel, die $C'B'$ und $C'A'$ ziehen. Die Längen OA' und OB' ſind dann 1) der Größe nach die Momente der geſuchten (Seiten-) Gegen-Paare, 2) der Richtung nach die mit der OV' gleichartigen Seiten der Axen dieſer (Seiten-) Gegen-Paare, ſo daß dadurch auch die Richtung dieſer letztern völlig beſtimmt iſt.

§. 15.

Hat man drei Gegen-Paare, deren Momente bezüglich $P{\cdot}p$, $Q{\cdot}q$ und $R{\cdot}r$ ſind, in beliebigen, ſich wechſelſeitig in einem und demſelben Punkte O ſchneidenden Ebenen, ſo kann man zuerſt zweie derſelben in ein einziges vereinigen, z. B. $P{\cdot}p$ und $Q{\cdot}q$ in den beiden Ebenen XOZ und YOZ

*) Wir ſagen oft „das Gegen-Paar $S{\cdot}s$", wo es heißen muß: „das Gegen-Paar, deſſen Moment $S{\cdot}s$ iſt." Dieſe Bequemlichkeit im Sprechen und Schreiben mögen uns Zuhörer und Leſer erlauben.

(Fig. 8.) in das mittlere S·s in der Ebene ZOV; dann kann man dieſes mittlere Gegen-Paar als ein reduzirtes, mit dem dritten Gegen-Paar R·r, ebenfalls als ein reduzirtes gedacht, wiederum auf der gemeinſchaftlichen Durchſchnitts-Linie der Ebene ZOV mit der Ebene des dritten Gegen-Paares R·r (welche Durchſchnitts-Linie in der (Fig. 8.) nicht zu ſehen iſt) ſenkrecht anbringen, in Punkten, die um 1 von einander abſtehen, und ſo dieſe beiden Gegen-Paare S·s und R·r wiederum in ein einziges vereinigen, ſo daß zuletzt alle drei gegebenen Gegen-Paare P·p, Q·q und R·r in ein einziges vereinigt ſind.

Dies giebt folgenden Satz:

Drei Gegen-Paare, deren Momente P·p, Q·q und R·r ſind, und die in verſchiedenen ſich wechſelſeitig ſchneidenden Ebenen liegen, vereinigen ſich in ein einziges Gegen-Paar auf folgende Art: Man nimmt die, von dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitts-Punkt O der drei Ebenen der Gegen-Paare, auslaufenden drei gleichartigen Seiten der Axen dieſer drei Gegen-Paare; trägt auf jeder derſelben von O aus die bezüglichen Momente P·p, Q·q und R·r als Linien ab, und ergänzt das Ganze zu einem Parallelepipedum; die Diagonale dieſes Parallelepipedums iſt 1) der Größe nach das Moment des geſuchten mittlern Gegen-Paares, und 2) der Richtung nach die mit den vorigen gleichartige Seite der Axe dieſes mittlern Gegen-Paares. Dadurch iſt aber das mittlere Gegen-Paar vollkommen beſtimmt, ſeinem Momente, ſeiner Ebene und ſeiner Richtung nach.

Umgekehrt, kann man nach dem ſo eben feſtgeſtellten Satze des Parallelepipedums der Gegen-Paare (welcher dem Satze des Kräften-Parallelepipedums im I. Th. Mech. §. 17. b. ganz analog iſt) ein gegebenes Gegen-Paar in drei andere gleichgeltende zerlegen, welche in ganz beliebigen, in einem beliebigen Punkte O gemeinſchaftlich ſich ſchneidenden Ebenen liegen; in ſo ferne man die Ebene des gegebenen Gegen-Paares nach (§. 11. Nr. 4.) parallel mit ſich fortrücken und ebenfalls durch den Punkt O gehen laſſen kann; — oder noch einfacher, in ſo ferne man durch O alle vier Axen gehen laſſen kann.

§. 16.

1) Man kann nun auch beliebig viel z. B. n Gegen-Paare in beliebigen Ebenen, in ein einziges gleichgeltendes Gegen-Paar vereinigen, wenn sie sich nicht alle einander unbedingt das Gleichgewicht halten. — Zu dem Ende legt man drei einander wechselseitig sich schneidende, übrigens beliebige Ebenen E, E′, E″, welche senkrecht oder schief auf einander stehen können; — zerlegt jedes der gegebenen Gegen-Paare in drei (Seiten-) Gegen-Paare, welche in diesen Ebenen E, E′ und E″ liegen, und vereinigt diese je n (Seiten-) Gegen-Paare, welche in jeder dieser drei Ebenen liegen, nach (§. 11. Nr. 8.) in ein einziges; zuletzt aber vereinigt man diese letzteren drei Gegen-Paare, welche bezüglich in drei Ebenen E, E′ und E″ liegen, wiederum in ein einziges, welches das Gesuchte ist.

2) Dabei ist unbedingtes Gleichgewicht unter den n gegebenen Gegen-Paaren nur dann möglich, aber dann auch nothwendig, wenn die je n (Seiten-) Gegen-Paare in jeder der drei Ebenen E, E′ und E″ für sich im unbedingten Gleichgewichte sind; weil außerdem allemal ein Gegen-Paar existiren würde, entweder in einer der drei Ebenen E, E′, E″, oder aus zweien oder dreien solchen zusammengesetzt, welches mit allen gegebenen Gegen-Paaren gleichgeltend wäre und durch nichts mehr unbedingt vernichtet werden könnte. — Vergl. den analogen Satz (I. Th. Mech. §. 20. und Anmerk.) von den Kräften.

§. 17.

Alles dieses wollen wir nun auf eine ganz analoge Weise, wie wir solches im (I. Th. Mech. Kapp. 2. 3.) für Kräfte, die einen und denselben Atom angreifen, gethan haben, in bequeme Rechnung bringen.

1) Zu dem Ende wollen wir uns drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY und OZ denken, welche drei auf einander senkrechte Koordinaten-Ebenen YOZ, XOZ und XOY bilden. Jedes Moment von jedem gegebenen Gegen-

Paare wird (wie bisher jede Kraft) absolut (d. h. nicht negativ) in Rechnung gebracht. So wie wir aber früher im (I. Th. Mech. Kap. 2.) die nach den Axen OX, OY und OZ zerlegten Kräfte positiv und negativ in Rechnung brachten und auch noch so in Rechnung bringen, eben so wollen wir auch die Momente der nach den Koordinaten-Ebenen zerlegten Gegen-Paare positiv und negativ in Rechnung bringen, und zwar in den drei Koordinaten-Ebenen diejenigen Momente jedesmal positiv, deren Gegen-Paare unter der Voraussetzung, daß OX, OY, OZ (und von keiner ihre entgegengesetzten Richtungen) als gleichartige Seiten der Axen (§. 13.) angesehen werden, einerlei Richtung haben; alle diejenigen Momente aber negativ, deren Gegen-Paare (in diesen Koordinaten-Ebenen) die entgegengesetzte Richtung haben.

Dabei kann man die Richtungen der Gegen-Paare in den Koordinaten-Ebenen, deren Momente positiv in Rechnung gebracht werden, die positiven Richtungen nennen; die entgegengesetzten werden dann die negativen genannt.

Nimmt man also z. B. die Drehung von OY nach OX hin als die positive Richtung eines Gegen-Paares in der Ebene XOY, so sind nach der so eben gemachten Feststellung die Drehungen von OX nach OZ hin, und von OZ nach OY hin, die positiven Richtungen der Gegen-Paare in den beiden andern Koordinaten-Ebenen. Die Gegen-Paare in den Koordinaten-Ebenen, welche in genau entgegengesetzter Richtung drehen wollen, haben dann die negativen Richtungen, d. h. ihre Momente werden als negative Zahlen in Rechnung gebracht.

2) Von jedem beliebig gegebenen Gegen-Paare nennen wir nun diejenige der beiden Seiten seiner Axe die positive (und die andere dann die negative), welche, sobald sie mit OX, OY oder OZ (und nicht mit den entgegengesetzten Richtungen) zusammenfällt, die Richtung des Gegen-Paares als einerlei ausweist mit den positiven Richtungen der Gegen-Paare in den Koordinaten-Ebenen.

Die Lage der Axe des Gegen-Paares und seine Richtung bestimmen wir dann allemal durch die drei Winkel λ, μ, ν, welche die positive (und nicht die entgegengesetzte negative)

Seite der Axe mit den drei Koordinaten-Axen macht; so daß diese Winkel λ, μ, ν spitze, stumpfe auch rechte Winkel seyn können *).

Auf diese Weise ist die Richtung des Gegen-Paares in seiner Ebene völlig bestimmt und zweckmäßig in Rechnung gebracht. —

3) Sind aber $P \cdot p$ und $Q \cdot q$ die positiv oder negativ genommenen Momente zweier in einer der Koordinaten-Ebenen gedachten Gegen-Paare, so ist nach (§. 11. Nr. 7.) die Summe

$$P \cdot p + Q \cdot q$$

allemal das Moment desjenigen Gegen-Paares, welches an die Stelle der beiden erstern Gegen-Paare (in derselben Koordinaten-Ebene) unbedingt gesetzt werden kann, und welches selber positiv oder negativ seyn wird.

Ist aber diese Summe

$$P \cdot p + Q \cdot q = 0,$$

so halten sich diese beiden Gegen-Paare unbedingt das Gleichgewicht.

4) Sind $P_1 \cdot p_1$, $P_2 \cdot p_2$, $P_3 \cdot p_3$, $\cdots$ $P_n \cdot p_n$ die positiv oder negativ genommenen Momente von n Gegen-Paaren, welche in einer und derselben Koordinaten-Ebene liegen, so ist die Summe aller Momente

$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + \cdots + P_n \cdot p_n \quad \text{oder} \quad \Sigma(P \cdot p)$$

das Moment des einzigen Gegen-Paares, welches mit allen so eben erwähnten Gegen-Paaren gleichgeltend ist, übrigens positiv oder negativ.

Und findet sich diese Summe der Null gleich, ist also

$$\Sigma(P \cdot p) = 0,$$

so halten sich diese n Gegen-Paare einander im unbedingten Gleichgewicht.

§. 18.

*) Diese Winkel λ, μ, ν sind zu gleicher Zeit die spitzen, stumpfen oder rechten Winkel, welche die Ebene des Gegen-Paares bezüglich mit den Koordinaten-Ebenen YOZ, XOZ und XOY macht.

§. 18.

I. Ist nun von einem Gegen-Paar gegeben 1) sein Moment Q, und 2) seine Ebene so wie seine Richtung durch die Winkel λ, μ, ν, welche die positive Seite seiner Axe mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so läßt sich dieses Gegen-Paar immer nach (§. 15.) in drei (Seiten-) Gegen-Paare zerlegen, welche in den drei Koordinaten-Ebenen YOZ, XOZ und XOY liegen, und deren Momente bezüglich

$$(\odot)\cdots \quad Q\cdot\cos\lambda, \quad Q\cdot\cos\mu \quad \text{und} \quad Q\cdot\cos\nu$$

sind. — Das Moment Q ist allemal absolut (positiv) genommen; dagegen sind diese Seiten-Momente $Q\cdot\cos\lambda$, $Q\cdot\cos\mu$, $Q\cdot\cos\nu$ positiv, negativ oder Null, je nachdem λ, μ, ν spitz, stumpf oder rechte Winkel sind.

II. Umgekehrt: hat man drei Gegen-Paare in den Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ, deren Momente nach ihren Richtungen positiv oder negativ in Rechnung gebracht werden, und bezüglich G, H und I seyn mögen; und will man solche in ein einziges Gegen-Paar vereinigen, dessen unbekanntes und immer absolut (positiv) gedachtes Moment durch Q bezeichnet wird, und dessen positive Axen-Seite mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ die noch unbekannten Winkel λ, μ, ν bildet; — so werden diese unbekannten Stücke allemal aus den drei Gleichungen

I. $G = Q\cdot\cos\nu$; II. $H = Q\cdot\cos\mu$ und III. $J = Q\cdot\cos\lambda$

bestimmt, so daß man, weil allemal

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

ist, sogleich erhält

1) $$Q = +\sqrt{G^2+H^2+J^2},$$

und dann noch

2) $$\cos\nu = \frac{G}{Q}, \quad \cos\mu = \frac{H}{Q} \quad \text{und} \quad \cos\lambda = \frac{J}{Q},$$

so daß, weil der Nenner Q allemal absolut (positiv) ist, diese Winkel ν, μ, λ spitz, stumpf oder als rechte Winkel sich ergeben, je nachdem G, H, J positiv, negativ oder Null sind.

Dies folgt aber unmittelbar aus dem Satze der (§§. 12. 15.) in Verbindung mit den in den (§§. 13. 17.) gemachten Annahmen.

§. 19.

I. Sind nun n Gegen-Paare gegeben, durch ihre Momente

$$Q_1, Q_2, \cdots Q_n$$

und durch die Winkel

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2; \quad \cdots \quad \lambda_n, \mu_n, \nu_n;$$

welche die positiven Seiten ihrer Axen mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ machen, — so zerlegt man zuerst jedes dieser Gegen-Paare Q in die drei (Seiten-) Gegen-Paare

$$Q \cdot \cos\nu, \quad Q \cdot \cos\mu, \quad Q \cdot \cos\lambda,$$

welche bezüglich in den Ebenen XOY, XOZ, YOZ liegen, und vereinigt dann alle diese (Seiten-) Gegen-Paare (in jeder der drei Koordinaten-Ebenen) in ein einziges nach (§. 17. Nr. 4.), so daß man

$L = \Sigma(Q \cdot \cos\nu)$; $M = \Sigma(Q \cdot \cos\mu)$ und $N = \Sigma(Q \cdot \cos\lambda)$

als die drei (Seiten-) Gegen-Paare erhält, in welche sich alle vereinigen lassen.

Zuletzt nimmt man

$$Q_0 = +\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

und

$$\cos\nu_0 = \frac{L}{Q_0}; \quad \cos\mu_0 = \frac{M}{Q_0} \quad \text{und} \quad \cos\lambda_0 = \frac{N}{Q_0};$$

und man hat dann das Moment Q_0 des gesuchten mittlern Gegen-Paares, während die Winkel ν_0, μ_0 und λ_0 die Lage seiner Axe und seine Richtung bestimmen *).

---

*) In der durch die Axe bestimmten Ebene des Gegen-Paares kann man nun unendlich viele gleichgeltende Gegen-Paare anbringen, wenn sie nur alle dasselbe Moment Q_0 haben, nach (§. 11. Nr. 4. — 7.). Man kann daher die beiden gleichen Kräfte des Gegen-Paares Q_0 noch durch zwei gegebene Punkte in ihrer Ebene hindurch gehen lassen, auch noch in gegebener senkrechter Entfernung d von einander, wenn man nur dann jede der beiden gleichen Kräfte $= \frac{Q_0}{d}$ nimmt, damit das Moment $= Q_0$ wird.

II. Sollen aber dieſelben n Gegen-Paare einander unbedingt das Gleichgewicht halten, ſo muß nach (§. 16.)

1) $\Sigma(Q \cdot \cos\nu) = 0$; 2) $\Sigma(Q \cdot \cos\mu) = 0$

und 3) $\Sigma(Q \cdot \cos\lambda) = 0$

ſeyn; und dieſe drei Gleichungen reichen aus und ſind nothwendig zum unbedingten Gleichgewicht.

§. 20.

I. Stehen die Ebenen aller n Gegen-Paare auf einer der Koordinaten-Ebenen, z. B. auf XOY ſenkrecht, ſo hat man

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \cdots = \nu_n = 90^\circ \text{ und } L = 0;$$

alſo

$$Q_0 = \sqrt{M^2 + N^2}$$

und

$$\cos\nu_0 = 0, \quad \cos\mu_0 = \frac{M}{Q_0} \text{ und } \cos\lambda_0 = \frac{N}{Q_0},$$

ſo daß die Ebene des mittleren Gegen-Paares Q_0 ebenfalls auf XOY ſenkrecht ſteht.

II. Zum unbedingten Gleichgewicht dieſer jetzigen n Gegen-Paare ſind aber nothwendig und ausreichend die beiden Gleichungen

1) $\Sigma(Q \cdot \cos\mu) = 0$ und 2) $\Sigma(Q \cdot \cos\lambda) = 0$;

in ſo ferne die dritte Gleichung $\Sigma(Q \cdot \cos\nu) = 0$ dasmal ohnedies immer $0 = 0$, alſo erfüllt iſt.

Anmerk. Die Bedingungen des Gleichgewichts von n beliebig gegebenen Gegen-Paaren können auch noch in verſchiedener anderer Form, und auch mit andern Worten hingeſtellt werden. Nachſtehende (§§. 21. u. 22.) mögen dies näher angeben.

§. 21.

I. Das Moment Q eines Gegen-Paares kann man durch ein Rechteck vorſtellen, welches jede der beiden gleichen Kräfte, die das Gegen-Paar bilden, zu Grundlinien, und den ſenkrechten Abſtand derſelben, alſo den Arm des Gegen-Paares zur Höhe hat.

II. Die Produkte

$$Q \cdot \cos\nu, \quad Q \cdot \cos\mu \quad \text{und} \quad Q \cdot \cos\lambda$$

sind daher nach (I. Th. Geom. §. 2.)

1) die positiv oder negativ genommenen Projektionen dieses Rechtecks auf die drei Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ; aber auch zu gleicher Zeit

2) die positiv oder negativ genommenen Momente derjenigen Gegen-Paare, welche man erhält, wenn man die beiden gleichen Kräfte des Gegen-Paares Q auf dieselben Koordinaten-Ebenen projizirt, so daß die Richtung einer jeden Kraft auch die Richtung ihrer Projektion bestimmt.

Die Gleichgewichts-Gleichungen der (§§. 19. 20.) sagen daher nichts weiter, als daß die Summe der Projektionen der Momente der gegebenen Gegen-Paare (diese Momente als Rechtecke gedacht), oder auch die Summe der Momente der Projektionen der Gegen-Paare, auf jede der drei Koordinaten-Ebenen, der Null gleich seyn müsse.

§. 22.

Wiederholt man aber die Schlüsse des (I. Th. Mech. §. 25.), so findet man sogleich, daß zum unbedingten Gleichgewicht der beliebig gegebenen n Gegen-Paare nothwendig ist und ausreichend „daß die Summe der positiv oder negativ genommenen Projektionen der n Momente (oder die Summe der Momente der Projektionen der n Gegen-Paare) dreimal der Null gleich sey", nämlich in Bezug auf drei beliebige Ebenen, welche sich alle drei wechselseitig schneiden, übrigens beliebig senkrecht oder schief auf einander stehen *).

*) Zerlegt man jedes der n Gegen-Paare, vermöge des Satzes vom Parallelepipedum der Gegen-Paare, nach dreien beliebigen auf einander schief stehenden Koordinaten-Ebenen in drei (Seiten-) Gegen-Paare, so ist nach (§. 16.) zum unbedingten Gleichgewicht nothwendig und ausreichend, daß die Summe der positiv oder negativ genommenen Momente in jeder dieser drei Ebenen einzeln der Null gleich ist. — Allein die Projektionen der Momente, oder die Momente der Projektionen der Gegen-Paare auf diese drei Ebenen, von denen oben im Texte die Rede ist, sind

Stehen aber die Ebenen aller n Gegen-Paare auf irgend einer und derselben Ebene E senkrecht, so ist zum unbedingten Gleichgewicht derselben nothwendig und ausreichend, daß die gedachte Summe der Momente der Projektionen der Gegen-Paare zwei mal der Null gleich sei, in Bezug auf zwei Ebenen, welche sich gegenseitig und auch die Ebene E unter ganz beliebigen Winkeln schneiden.

Anmerk. Aus dem in dem vorstehenden Kapitel Gesagten erhellet, daß die Behandlung der Gegen-Paare ganz und durchaus analog ist der Behandlung der Kräfte, welche einen einzelnen Atom angreifen. — Das folgende Kapitel hat nun zu zeigen, wie beide Theorien in Verbindung die wichtigsten Sätze der Statik fester Körper augenblicklich liefern.

---

von diesen eben erwähnten Momenten der nach den schiefen Koordinaten-Ebenen zerlegten Gegen-Paaren eben so verschieden, als im (I. Th. Mech. §. 26. Anmerk.) die Projektionen einer einzelnen Kraft auf schiefe Axen, von der nach schiefen Axen zerlegten Kraft. — Es läßt sich aber durch eine der im (I. Th. Mech. §. 26. Anmerk.) ganz analoge Rechnung nachweisen, daß wenn die einen drei Gleichungen existiren, dann allemal auch die andern drei Gleichungen nothwendige algebraische (trigonometrische) Folgerungen davon sind; welches sich freilich, aus dem statischen Gesichts-Punkte angesehen, ohne daß man die Rechnung wirklich zu machen braucht, von selber versteht.

Die Statik fester Körper.

Drittes Kapitel.

Betrachtung beliebiger Kräfte im Raume, welche ein festes System angreifen.

§. 23.

Zunächst bemerke man sich folgenden wichtigen Satz:

„Statt einer beliebigen Kraft P, welche einen bestimmten Punkt A eines festen Systems in einer beliebigen Richtung AA′ angreift, kann man allemal dieselbe Kraft P parallel mit sich einen andern beliebig gewählten Punkt O angreifen lassen, wenn man nur zu gleicher Zeit noch ein Gegen-Paar anbringt, welches in der Ebene OAA′ liegt, dessen Richtung durch den Sinn, in welchem die Kraft P in der Richtung AA′ (und nicht A′A) die Ebene OAA′ um O drehen würde, gegeben ist, und dessen Moment genau das statische Moment (I. Th. Mech. §. 30.) der Kraft P in der Richtung AA′ ist, in Bezug auf den Punkt O als Centrum des Momentes genommen.

Denn da die Richtung AA′ und der Punkt O allemal eine Ebene bilden, so stelle (Fig. 9.) diese Ebene vor. Bringt man nun in O, in der mit AA′ parallelen Geraden COD zwei Kräfte P′ und P″ an, beide der Kraft P gleich, einander aber genau entgegen, so leisten P′, P″ an O, mit P an A in Verbindung, genau dasselbe was P an A allein leistet. Weil aber P″ = P ist, so bilden P und P″ das Gegen-Paar, dessen Moment P·OE ist, während nach (§. 30. I. Th. Mech.) P·OE auch das statische

Moment der Kraft P um O als Centrum ist, wenn nur OE auf AA′ senkrecht steht. Dieses Gegen-Paar kann nun aber in derselben Ebene OAA′ irgend wo beliebig (auch mit beliebigem Arme) angebracht werden, wenn nur seine Richtung und sein Moment dasselbe bleibt (nach §. 11.).

§. 24.

Greifen daher zwei Kräfte P und Q, deren Richtungen nicht in einer und derselben Ebene liegen, und welche nach (§. 8. II.) deshalb nicht eine einzige mittlere Kraft haben, ein festes System in den Punkten A und B nach den beliebigen Richtungen AA′ und BB′ an, so kann man beide Kräfte parallel mit sich nach einem und demselben beliebig gewählten (Versammlungs-) Punkte O des festen Systems fortrücken und daselbst angreifen lassen, wenn man nur in den Ebenen OAA′ und OBB′ noch zwei Gegen-Paare anbringt, deren Momente bezüglich die statischen Momente P·p und Q·q der Kräfte P und Q sind, in Bezug auf den (Versammlungs-) Punkt O, als Centrum der Momente genommen; so daß p und q die senkrechten Entfernungen des Punktes O von AA′ und BB′ vorstellen.

Während nun die beiden neuen Kräfte P und Q am (Versammlungs-) Punkte O sich in eine einzige Kraft R vereinigen, nach (Th. I. Mech. §. 13.) lassen sich auch die beiden Gegen-Paare, deren Momente P·p und Q·q sind, und welche in den Ebenen OAA′ und OBB′ wirken, in ein einziges Gegen-Paar vereinigen, nach (§§. 12. u. 14.), so daß man zum End-Resultat die Kraft R am (Versammlungs-) Punkte O erhält und noch ein zugehöriges Gegen-Paar, dessen Moment, Axe und Richtung bekannt sind.

Nimmt man den Versammlungs-Punkt O in der Richtung AA′ oder BB′ selbst, so braucht man nur die eine Kraft parallel mit sich fortrücken zu lassen, weil die andere nun schon durch den Punkt O geht. Dann erhält man dieselbe Kraft R, wie vorher, der Größe nach aber parallel mit sich, nach dem jetzigen (Versammlungs-) Punkte O fortgerückt; dagegen von vorne herein nur ein einziges Gegen-Paar, so nämlich, daß diese jetzige Kraft R, im Verein mit diesem jetzigen Gegen-Paar, statt der beiden gegebenen Kräfte P und Q unbedingt gesetzt werden kann.

§. 25.

Betrachten wir nun umgekehrt ein Gegen-Paar (S, S), dessen Arm s, dessen Moment also S·s ist, und an einem Punkte O noch eine Kraft R, welche alle zugleich ein festes System angreifen.

Es sind drei Fälle möglich:

1) Liegt die Kraft R in der Ebene des Gegen-Paares (S, S) selbst, so vereinigen sich alle drei Kräfte sogleich in eine einzige, welche der Größe nach genau wieder R ist, in der Ebene des Gegen-Paares liegt, mit der gegebenen Kraft R parallel und in demselben Sinne wirkt, und von dem Angriffs-Punkte O dieser letztern, um $r = \frac{S \cdot s}{R}$ entfernt liegt, und zwar auf einer bestimmten Seite von O, nämlich so, daß die Drehung um O mittelst dieser gefundenen einzigen mittlern Kraft, in demselben Sinne erfolgen will, welche die Richtung des Gegen-Paares bedingt.

Denn es sey (Fig. 10.) O der Angriffs-Punkt und OO′ die Richtung der gegebenen Kraft R; dagegen seyen an A und an B die beiden gleichen parallelen und entgegengesetzten Kräfte (S, S) angebracht, welche das Gegen-Paar bilden, und deren senkrechte Entfernung von einander = s ist. Statt dieses Gegen-Paares kann man das gleichgeltende reduzirte Gegen-Paar (S.s, S·s), welches den Arm 1 hat, nach (§. 11.), so anbringen, daß die eine dieser beiden Kräfte S·s mit der Richtung OO′ der Kraft R zusammenfällt, die andere der Kräfte S·s aber in der senkrechten Entfernung OC = 1 parallel mit OO′ zu liegen kommt. Man hat nun die beiden Kräfte R+S·s in der Richtung OO′, und S·s in der parallelen Richtung CC′. Diese beiden parallelen Kräfte R+S·s und S·s vereinigen sich aber nach (§. 9. B.) sogleich wieder in die einzige R′ in der mit OO′ parallelen Richtung DD′, so daß, wenn CO noch bis D verlängert, und QD = r gesetzt wird,

$$R' = (R + S \cdot s) - S \cdot s, \quad \text{also} \quad R' = R,$$

und

$$R' \cdot r = S \cdot s \times OC = S \cdot s \times 1 = S \cdot s$$

wird; wodurch die obige Behauptung auf das Vollständigste erwiesen sich findet.

2) Ist die Richtung der Kraft R an O, parallel mit der Ebene des Gegen-Paares, so kann man nach (§. 11. Nr. 4.) die Ebene des Gegen-Paares parallel mit sich fortrücken lassen,

ohne die Gesammt-Wirkung zu ändern, bis solche durch den Punkt O geht und die Richtung der Kraft R wieder in ihr liegt. Also existirt jetzt wieder eine einzige mittlere Kraft, welche dasmal in der durch O mit der Ebene des Gegen-Paares parallel gelegten Ebene liegt, parallel mit der an O gegebenen Kraft R und in demselben Sinne wirkt, von letzterer um $r = \frac{S \cdot s}{R}$ entfernt. Der Größe nach ist solche aber wiederum dieselbe gegebene Kraft R selbst.

3) Schneiden sich aber die Richtung der gegebenen Kraft R an O, und die Ebene des Gegen-Paares (S, S) (jede ohne Ende gedacht), irgendwo in einem Punkte A, so kann man das Gegen-Paar (S, S) in seiner Ebene irgendwie aber so anbringen, daß die eine der beiden gleichen Kräfte S durch denselben Punkt A hindurchgeht. Die beiden Kräfte R und S, welche in A sich schneiden, vereinigen sich dann nach (I. Th. Mech. §. 13.) sogleich in eine einzige T, und man hat die andere Kraft S und diese neue Kraft T, als zwei Kräfte, welche mit R und (S, S) gleichgeltend sind, welche aber nicht in einer und derselben Ebene liegen, also auch sich nicht mehr in eine einzige mittlere Kraft vereinigen lassen.

Statt dieser beiden Kräfte S und T wird man aber unendlich-viele andere Paare gleichgeltender Kräfte finden, dadurch, daß man die Ebene des Gegen-Paares beliebig parallel mit sich fortrücken läßt, ferner auch dadurch, daß man das Gegen-Paar in der alten oder neuen Lage der Ebene beliebig wie legt (d. h. mit der Projektion von R beliebige Winkel bildend), endlich auch dadurch, daß man statt des Gegen-Paares (S, S) ein anderes (Q, Q) setzt, dessen Moment dem Momente S·s gleich ist.

Anmerk. Weil zwei Kräfte P und Q, welche zwei Punkte A und B angreifen, dabei aber mit ihren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, nach (§. 24.) allemal in eine einzige Kraft R und in ein Gegen-Paar S, S umgewandelt werden können, — und weil nach (§. 25.) statt letzterer drei Kräfte R und S, S allemal wieder unendlich viele Paare gleichgeltender Kräfte,

die also auch mit P und Q gleichgeltend sind, gefunden werden, so entsteht die Frage, ob man auch statt der an den Angriffs-Punkten A und B wirkenden Kräfte P und Q ein gleichgeltendes Kräften-Paar (nicht Gegen-Paar) finden könne, welches gerade die gegebenen Angriffs-Punkte C und D hat. — Legt man aber bei dem Verfahren des (§. 24.) den Versammlungs-Punkt O nach einem dieser beiden gegebenen Punkte z. B. nach C, so erhält man zunächst statt der P und Q, die Kraft R an C und noch ein Gegen-Paar (S, S), dessen Moment S·s und dessen Axe und Richtung als bekannt angenommen werden können. Legt man nun die Ebene dieses Gegen-Paares (S, S) und eine der beiden gleichen Kräfte desselben ebenfalls durch den Punkt C, so kann man in C die Kräfte R und S vereinigen in eine einzige Kraft T, die durch den gegebenen Punkt C hindurchgeht; dagegen kann die zweite Kraft S, die in Verbindung mit T statt P und Q gesetzt werden kann, nicht durch den zweiten gegebenen Punkt D hindurchgehen, wenn dieser nicht in der durch C hindurchgelegten Ebene des, zum (Versammlungs-) Punkte C gehörigen Gegen-Paares liegt.

Umgekehrt aber: liegt D irgendwo in dieser durch C hindurchgehenden Ebene des Gegen-Paares, so kann man in dieser Ebene durch C und D zwei ganz beliebige, aber unter sich parallele Linien legen, deren senkrechter Abstand d seyn mag, und dann in den Richtungen dieser Linien zwei gleiche Kräfte, jede $= \frac{S \cdot s}{d}$ anbringen, welche ein Gegen-Paar bilden, dessen Moment wiederum $= S \cdot s$ ist; — und diese neuen Kräfte können statt der S, S substituirt werden. Also erhält man dann allemal zwei gleichgeltende Kräfte, welche durch die gegebenen zwei Punkte C und D hindurchgehen; auch erhält man letztere immer noch auf unendlich viele Arten, weil man die Richtung der einen Kraft $\frac{S \cdot s}{d}$ in der Ebene des Gegen-Paares, also auch die Entfernung d beider parallelen Richtungen noch ganz beliebig, nur nicht mit der Richtung CD zusammenfallend wählen kann.

Sollen daher ſtatt zweier gegebenen Kräfte P und Q, zwei andere Kräfte gefunden werden können, mit den gegebenen gleichgeltend, und welche zwei gegebene Angriffs-Punkte haben, ſo müſſen die Kräfte P und Q der Bedingung genügen, daß wenn man ſie beide an einem der gegebenen Punkte nach (§. 24.) vereinigt, und die beiden dann hinzutretenden Gegen-Paare auch in ein einziges Gegen-Paar vereinigt, die Ebene dieſes letztern durch beide gegebene Angriffs-Punkte zugleich hindurchgehe, während man ſie allemal durch einen derſelben legen kann.

Im Allgemeinen kann man alſo nur einer der beiden mittlern Kräfte den Angriffs-Punkt ganz nach Belieben anweiſen; von dem Angriffs-Punkte der andern dagegen kann man nur deſſen Projektion auf irgend eine Ebene nach Belieben wählen.

§. 26.

Allgemeinſte Aufgabe.

Eine beliebige Anzahl n von Kräften, P_1, P_2, ··· P_n, greifen in ganz beliebigen Richtungen ganz beliebige Punkte A_1, A_2, ··· A_n eines feſten Syſtems an; man ſoll die Wirkung beurtheilen.

Auflöſung. Man wählt irgend einen beliebigen Punkt O im feſten Syſtem, läßt jede Kraft parallel mit ſich nach dem Punkte O fortrücken und daſelbſt angreifen. — Dieſen Punkt O nennen wir deshalb den Verſammlungs-Punkt der Kräfte. — Hernach fügt man noch, ganz dem (§. 23.) zu Folge, in den durch den Verſammlungs-Punkt O und durch die Richtungen der n Kräfte gegebenen Ebenen, n Gegen-Paare hinzu, deren Momente $P_1 \cdot p_1$, $P_2 \cdot p_2$, ··· $P_n \cdot p_n$ bezüglich den ſtatiſchen Momenten der gegebenen Kräfte gleich ſind, in Bezug auf den Verſammlungs-Punkt O als Centrum der Momente genommen (ſo daß p_1, p_2, ··· p_n die ſenkrechten Entfernungen des Verſammlungs-Punktes O von den Richtungen der Kräfte vorſtellen). — Die n neuen Kräfte, die alle denſelben Atom O angreifen, in Verein mit dieſen n Gegen-Paaren, lei-

ſten nun daſſelbe, was die gegebenen n Kräfte leiſten; alles genau nach (§. 23.).

Es haben aber die neuen in O verſammelten Kräfte entweder eine einzige mittlere Kraft P_0 an demſelben Punkte O, und dieſe wollen wir dann die Verſammlungs-Kraft an O nennen; oder dieſe n in O verſammelten Kräfte halten ſich einander im unbedingten Gleichgewicht; nach (I. Th. Mech. Kapp. 2. und 3.).

Eben ſo aber vereinigen ſich auch die n hinzugetretenen Gegen-Paare nach (§. 16.) in ein einziges Gegen-Paar, und dies wollen wir dann das zum Verſammlungs-Punkt O gehörige mittlere Gegen-Paar nennen; oder dieſe n hinzugetretenen Gegen-Paare halten ſich einander im unbedingten Gleichgewicht.

Deshalb ſind vier Fälle möglich, nämlich entweder

1) Es entſteht eine Verſammlungs-Kraft P_0 an O, und noch ein, zu dieſem Verſammlungs-Punkte O gehöriges mittleres Gegen-Paar S, S, deſſen Moment $= Q_0$ ſeyn mag.

a) Liegt nun die Richtung der Verſammlungs-Kraft P_0 an O in der Ebene dieſes mittlern Gegen-Paares (oder mit ihr parallel *)), ſo laſſen ſich alle gegebenen Kräfte in eine einzige mittlere Kraft vereinigen nach (§. 25.), welche der Größe nach der Verſammlungs-Kraft P_0 an O gleich, mit letzterer parallel iſt, in der durch O gelegten Ebene des mittlern Gegen-Paares und von O, oder von der Verſammlungs-Kraft an O, um $\frac{Q_0}{P_0}$ entfernt und ſo liegt, daß ſie die Ebene in dem Sinne des Gegen-Paares um den Punkt O drehen will; alles genau nach (§. 25.).

b) Schneidet aber die Richtung der Verſammlungs-Kraft P_0 an O, die Ebene des zugehörigen mittlern Gegen-Paares S, S irgendwo, ſo laſſen ſich dann nach (§. 25.) un-

*) Die Ebene dieſes mittlern Gegen-Paares kann man aber immer durch den Verſammlungs-Punkt O gehen laſſen, nach (§. 11. M. 2. 4. 6.).

endlich viele gleichgeltende Kräften-Paare finden (nicht Gegen-Paare), von denen jedoch keines in einer und derselben Ebene liegt. Unter diesen Paaren von Kräften kann man allemal auch ein Paar herausſuchen, von welchem die eine der Kräfte durch einen beliebig gegebenen Punkt, die andere dagegen durch einen Punkt hindurchgeht, von welchem wenigſtens die Projektion auf eine beſtimmte Ebene gegeben ſeyn, oder ganz beliebig noch gewählt werden kann; nach (§. 25. Anmerk.).

Oder:

2) Es findet ſich eine Verſammlungs-Kraft P_0 an O, während die Gegen-Paare einander unbedingt das Gleichgewicht halten. — Dann iſt die Verſammlungs-Kraft P_0 zu gleicher Zeit die exiſtirende einzige mittlere Kraft; und es iſt dieſer Fall von dem Falle (1. a.) nur dadurch verſchieden, daß dasmal der Verſammlungs-Punkt O zufällig in der Richtung der exiſtirenden einzigen mittlern Kraft genommen worden iſt. — Oder:

3) Es halten ſich die in O verſammelten Kräfte einander unbedingt im Gleichgewicht, aber nicht die n zugehörigen Gegen-Paare. Dann beſtimmt das nun exiſtirende einzige mittlere Gegen-Paar allein (oder jedes gleichgeltende) die Wirkung aller n gegebenen Kräfte; d. h. dieſes Gegen-Paar iſt dann mit den gegebenen Kräften gleichgeltend. — Oder endlich:

4) Es halten ſich nicht bloß die n in O verſammelten Kräfte einander unbedingt im Gleichgewicht, ſondern auch die n zugehörigen Gegen-Paare. — Nur dann, aber auch dann allemal, halten ſich alle n gegebenen Kräfte am feſten Syſtem einander unbedingt das Gleichgewicht.

§. 27.

1) Denkt man ſich das, in Bezug auf das Centrum O genommene ſtatiſche Moment irgend einer Kraft P, welche irgend einen Punkt A in irgend einer Richtung AA′ angreift, als ein in der Ebene OAA′ liegendes Rechteck, welches P (als Linie gedacht) zur einen Kante, dagegen den Arm p des Moments,

d. h. die senkrechte Entfernung des Punktes O von der Richtung AA′, zur andern Kante hat (oder, was dasselbe ist, denkt man sich dieses Moment als das Doppelte eines Dreiecks, welches P in der Richtung AA′ zur Grundlinie, den Punkt O dagegen zur Spitze hat), so ist offenbar die Projektion dieses statischen Momentes P.p auf irgend eine durch O gelegte Ebene E, ein Parallelogramm, welches die Projektion P′ der Linie P auf die Ebene E zur Grundlinie, dagegen die senkrechte Entfernung des Punktes O von P′ zur Höhe hat (oder, was dasselbe ist, das Doppelte eines Dreiecks, welches P′ zur Grundlinie und O zur Spitze hat); also auch das statische Moment der Projektion P′ (diese Linie P′ wiederum als Kraft gedacht, welche die Projektion vom Punkte A zum Angriffs-Punkte hat), in Bezug auf O als Centrum der Momente genommen.

2) Läßt man nun die gegebene Kraft P nach einem beliebig gewählten Versammlungs-Punkte O parallel mit sich fortrücken, so ist nach (§. 23.) das Moment des zugehörigen Gegen-Paares nichts anders als das statische Moment der gegebenen Kraft P, in Bezug auf den Versammlungs-Punkt O, als Centrum des statischen Momentes genommen.

3) Die Projektionen der Momente der zum Versammlungs-Punkte O gehörigen n Gegen-Paare des (§. 26.) auf irgend eine durch den Versammlungs-Punkt O gelegte Ebene E, sind daher nichts weiter als die statischen Momente der Projektionen der gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n auf dieselbe Ebene E, in Bezug auf den Versammlungs-Punkt O, als Centrum der Momente genommen. — Legt man durch O noch eine Gerade OV auf die Ebene E senkrecht, so kann man die Kräfte P auch auf andere Ebenen E′, E″, E‴, ꝛc. ꝛc. projiciren, welche mit der Ebene E parallel laufen; wenn man nur die statischen Momente dieser Projektionen, in Bezug auf bezüglich die Punkte O′, O″, O‴, ꝛc. ꝛc., in welchen die Ebenen E′, E″, E‴, ꝛc. ꝛc. von der Geraden OV geschnitten werden, nimmt, und sie alle (positiv oder negativ, wie sie genommen werden müssen) zu einander addirt, so hat man wieder die Summe der Projektionen

der Momente der zum Versammlungs-Punkte O gehörigen Gegen-Paare auf die Ebene E, oder auf irgend eine mit ihr parallele Ebene. — Diese Gerade OV kann man auch die Axe der statischen Momente der Kräfte P nennen.

4) Bei der Vereinigung der n im (§. 26.) hinzugetretenen Gegen-Paare in ein einziges, nach (§. 19.) in Verbindung mit (§. 21.), wo zuerst die Summen L, M, N der Projektionen der Momente dieser Gegen-Paare auf drei auf einander senkrechte Koordinaten-Ebenen gefunden werden müssen, — kann man also statt der Projektionen der Momente der Gegen-Paare, diese statischen Momente der Projektionen der Kräfte in (Nr. 3.) berechnen und substituiren; wenn man nur dabei diejenigen dieser statischen Momente positiv in Rechnung bringt, deren (projizirten) Kräfte die Koordinaten-Ebene in ihrer (angenommenen) positiven Richtung drehen wollen, — während dann die übrigen dieser statischen Momente negativ in Rechnung gebracht werden müssen.

5) Wegen der (Nr. 3.) halten sich aber auch die im (§. 26.) hinzutretenden n Gegen-Paare nach (§. 22.) allemal unbedingt im Gleichgewicht, wenn die Summe der statischen Momente der Projektionen aller Kräfte auf drei beliebige Ebenen, in Bezug auf ihren Durchschnitts-Punkt als Centrum der Momente genommen, einzeln der Null gleich ist; oder wenn (wie man nach Nr. 3. dasselbe ausdrücken kann) die Summe der statischen Momente aller Kräfte, in Bezug auf drei solche Axen der Momente OV einzeln der Null gleich ist.

Daraus und aus (§. 26. Nr. 4.) folgt aber noch der nachstehende höchst wichtige Satz:

§. 28.

Gleichgewichts-Bedingungen.

Zum unbedingten Gleichgewicht beliebig gegebener Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$, welche ein festes System in beliebigen Richtungen an beliebigen Punkten $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ angreifen, ist nothwendig und ausreichend:

a) daß diese Kräfte sich unbedingt das Gleichgewicht halten, wenn sie alle parallel mit sich nach einem und demselben beliebig gewählten Angriffs-Punkte O hin gerückt gedacht werden (dies giebt drei Bedingungs-Gleichungen in den verschiedenen im I. Th. Mech. Kap. 3. 2te Abtheil. gefundenen Formen); — und noch

b) daß die Summe der statischen Momente der Projektionen der gegebenen Kräfte auf drei beliebige Ebenen in Bezug auf den zum Centrum der Momente genommenen Durchschnitts-Punkt dieser drei Ebenen einzeln der Null gleich sey; oder, — dasselbe nach (Nr. 3. §. 27.) mit andern Worten, — daß die Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n, in Bezug auf jede von drei beliebigen Axen der Momente genommen, der Null gleich sey.

Diese sechs Gleichungen, so verschiedene Formen, nach den willkührlich gelassenen Elementen sie nur immer annehmen mögen, sind daher zum unbedingten Gleichgewicht des festen Systems nothwendig und ausreichend.

Die Gleichungen des unbedingten Gleichgewichts sind aber deshalb so wichtig, weil sich alle statischen Aufgaben darauf zurückführen lassen. Sind nämlich die n Kräfte des (§. 26.) gegeben, und sucht man ihre Wirkung mittelst Rechnung auf, so weiß man nach (§. 26.) schon im Voraus, daß zwei mittlere Kräfte existiren werden, welche dasselbe leisten, daß aber diese zwei Kräfte zuweilen ein Gegen-Paar bilden, zuweilen auch in eine einzige Kraft vereinigt werden können; vorausgesetzt nämlich, daß die gegebenen Kräfte nicht im Gleichgewicht sind. — Man nimmt daher zwei unbekannte Kräfte P' und P'' in unbekannten Richtungen und an unbekannten Angriffs-Punkten an, welche den gesuchten beiden mittlern Kräften gleich, aber genau entgegen sind, welche daher mit den n gegebenen Kräften das (unbedingte) Gleichgewicht halten. Man stellt für diese n+2 Kräfte die sechs Gleichungen des Gleichgewichts hin, und

diese

diese werden dazu dienen, sechs der unbekannten Stücke zu finden *). —

Sind nun diese sechs Gleichungen identisch, wenn statt P' und statt P'' die Null gesetzt wird, so stehen die gegebenen n Kräfte in unbedingtem Gleichgewicht. — Setzt man aber bloß P'' der Null gleich, so hat man sechs Gleichungen zwischen den fünf Unbekannten, welche P' bestimmen. Findet man aus fünf dieser Gleichungen die fünf Unbekannten, und machen die Werthe derselben auch die sechste Gleichung identisch, so existirt eine einzige mittlere Kraft, welche der gefundenen P' genau gleich und entgegen ist. Würde aber diese sechste Gleichung nicht-identisch, so würde dieser Widerspruch anzeigen, daß dasmal die Bedingung der Existenz einer einzigen mittlern Kraft nicht erfüllt ist.

Alles in den (§§. 26. — 28.) Gesagte wollen wir nun durch die gewöhnliche Rechnung verfolgen.

§. 29.

Legt man durch den Versammlungs-Punkt O, an welchem man in der Aufgabe des (§. 26.) alle Kräfte vereint wirken lassen will, drei auf einander senkrechte Axen OX, OY, OZ; — sind, auf diese Axen bezogen, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ... x_n, y_n, z_n die Koordinaten-Werthe der Angriffs-Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$; — und sind ferner $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; ... $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ die Winkel, welche die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ mit den drei Axen machen, — so kann man die Resultate der (§§. 26. — 28.) durch nachstehende Rechnung verfolgen:

A. a) Was die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ betrifft, die alle den

*) Da die Lage einer Geraden im Raume durch vier Stücke völlig gegeben ist, und jeder Punkt in dieser Geraden zum Angriffs-Punkt gewählt werden kann, so hat man im Ganzen zehn Unbekannte, von denen also vier beliebig angenommen werden können. Daher findet man unendlich viele solcher Paare von Kräften P' und P'', von denen man jede in gerade entgegengesetzter Richtung nehmen muß, um ein Paar mittlerer Kräfte zu haben.

Versammlungs-Punkt O angreifen, so erhält man die Versammlungs-Kraft P_0 und ihre Richtung, nämlich die Winkel α_0, β_0 und γ_0 (im Falle eine solche Versammlungs-Kraft existirt) allemal nach (§. 17. I. Th. Mech.) durch folgende Rechnung: Man berechnet sich

1) $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = X$; 2) $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = Y$

und 3) $\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = Z$;

und nimmt dann

4) $P_0 = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;

so wie

5) $\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}$; $\cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0}$ und $\cos\gamma_0 = \frac{Z}{P_0}$.

b) Giebt es aber keine solche Versammlungs-Kraft, sondern halten sich diese neuen, den Versammlungs-Punkt O angreifenden Kräfte einander im unbedingten Gleichgewicht, so sind nach (I. Th. Mech. §. 20.) zu diesem Gleichgewicht nothwendig und ausreichend die drei Gleichungen

I. $X = 0$; II. $Y = 0$ und III. $Z = 0$;

wo X, Y und Z die in (1. — 3.) stehenden Ausdrücke vorstellen.

B. Das zugehörige mittlere Gegen-Paar, aus den n hinzutretenden Gegen-Paaren, deren Ebenen alle durch den Versammlungs-Punkt O gehen, wird nach den (§§. 19. u. 27. Nr. 4.) durch Rechnung gefunden. Zuerst findet man die Projektion des Moments P·p irgend eines dieser Gegen-Paare auf die Ebene XOY, indem man die Kraft P auf diese Ebene XOY projicirt, so daß man die Kraft $P \cdot \sin\gamma$ erhält (welche so gedacht wird, als wenn sie die Projektion des Angriffs-Punktes A in der Ebene XOY angriffe), dann aber in Bezug auf den Versammlungs-Punkt O als Centrum, das statische Moment dieser Projektion $P \cdot \sin\gamma$ nimmt, und solches positiv oder negativ in Rechnung bringt, je nachdem die Kraft $P \cdot \sin\gamma$ die Ebene XOY in ihrer als positiv angenommenen Richtung von OY nach OX hin, oder im entgegengesetzten Sinne um O herumdrehen will. Zuletzt werden alle diese Momente für alle n hinzugetretenen

Gegen-Paare addirt, und man hat die Projektion L des Moments des gesuchten mittlern Gegen-Paares auf die Ebene XOY. — Um aber das statische Moment der Kraft $P \cdot \sin\gamma$ leichter finden zu können, zerlegt man diese Kraft $P \cdot \sin\gamma$, welche so gedacht wurde, als wenn sie in der Ebene XOY die Projektion des Angriffs-Punktes A angriffe, parallel mit den Axen OX und OY in die beiden (positiven oder negativen) Seiten-Kräfte $P \cdot \cos\alpha$ und $P \cdot \cos\beta$, und nimmt nach (§. 9.) statt des gesuchten statischen Momentes der Kraft $P \cdot \sin\gamma$ die Summe der statischen Momente dieser Seiten-Kräfte, in Bezug auf dasselbe Centrum O. Von diesen Seiten-Kräften $P \cdot \cos\alpha$ und $P \cdot \cos\beta$ sind aber die Arme ihrer Momente bezüglich y und x, und ihre Momente selbst bezüglich und abgesehen vom Vorzeichen

$$P \cdot y \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad P \cdot x \cdot \cos\beta.$$

Denkt man sich nun die Drehung von OY nach OX hin, wie bisher immer als die positive, so ist offenbar

$$P \cdot y \cdot \cos\alpha - P \cdot x \cdot \cos\beta \quad \text{oder} \quad P \cdot (y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta)$$

das statische Moment der Projektion $P \cdot \sin\gamma$, um O als Centrum des Moments. — Bezeichnen wir die Summe dieser Projektionen der statischen Momente für alle Kräfte $P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$ durch L, so hat man

$$6) \qquad \Sigma P(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta) = L,$$

so daß diese Summe L der statischen Momente der Kräfte um die Axe OZ als Axe der Momente gedacht, nach (§. 27.) positiv, negativ oder Null, jedenfalls aber das Moment eines der drei (Seiten-) Gegen-Paare in den drei Koordinaten-Ebenen, und zwar das in der Ebene XOY befindliche ist, aus denen das einzige mittlere Gegen-Paar zuletzt zusammengesetzt wird.

Nun suche man ebenfalls die Summe der Projektionen der Momente aller n Gegen-Paare auf die beiden andern Koordinaten-Ebenen. Nehmen wir in der Ebene XOZ die Drehung der OX nach OZ hin, und in der Ebene YOZ die Drehung von OZ nach OY hin für die positive (so daß OZ, OY, OX die gleichartigen und positiven Seiten der Axen der bezüglich in den Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ be-

trachteten Gegen-Paare sind), so findet sich auf ganz analogem Wege

7) $\Sigma P(x \cdot \cos\gamma - z \cdot \cos\alpha) = M$

für die Summe der Momente der Kräfte um die Axe OY als Axe der statischen Momente genommen, d. h. für die Summe der auf die Koordinaten-Ebene XOZ projicirten Momente der n Gegen-Paare. — Eben so ist

8) $\Sigma P(z \cdot \cos\beta - y \cdot \cos\gamma) = N$

die Summe der Momente der Kräfte um die Axe OX als Momenten-Axe genommen, d. h. die Summe der auf die Koordinaten-Ebene YOZ projizirten Momente der n Gegen-Paare.

Ist nun Q_0 das Moment des gesuchten mittlern Gegen-Paares, und sind λ_0, μ_0, ν_0 die Winkel, welche dessen positive Axen-Seite mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so findet man sogleich nach (§. 19.)

9) $Q_0 = +\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$

und

10) $\cos\nu_0 = \frac{L}{Q_0}$; $\cos\mu_0 = \frac{M}{Q_0}$ und $\cos\lambda_0 = \frac{N}{Q_0}$,

wodurch das mittlere Gegen-Paar seinem Momente, seiner Axe und seiner Richtung nach bekannt ist.

Giebt es aber kein mittleres Gegen-Paar, d. h. halten sich alle n Gegen-Paare im unbedingten Gleichgewicht, so sind nach (§. 19. II.) dazu nothwendig und ausreichend die drei Gleichungen

IV. $L = 0$; V. $M = 0$ und VI. $N = 0$.

C. Zum unbedingten Gleichgewicht aller n gegebenen Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$, wie solche die gegebenen Punkte $A_1, A_2, \cdots A_n$ angreifen, sind daher nach (§. 28.) nothwendig und ausreichend die sechs Gleichungen

I. $X = 0$; II. $Y = 0$; III. $Z = 0$;
IV. $L = 0$; V. $M = 0$; VI. $N = 0$.

D. Finden die drei Gleichungen (I. — III.), nämlich

$X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$

ſtatt, aber von den drei Gleichungen (IV. — VI.) entweder keine, oder nur eine einzige, oder doch höchſtens nur zweie derſelben, ſo ſtehen die gegebenen Kräfte nicht im Gleichgewicht, ſondern ſie vereinigen ſich alle in ein Gegen-Paar, deſſen Moment, Axe und Richtung in (B. MM. 9. und 10.) gefunden ſtehen.

E. Finden die Gleichungen (IV. — VI.), nämlich

IV. $L = 0$; V. $M = 0$ und VI. $N = 0$

allein ſtatt, und von den Gleichungen (I. — III.) entweder keine, oder nur eine einzige, oder doch höchſtens nur zweie derſelben, ſo vereinigen ſich alle gegebenen Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ in eine einzige P_0, welche der Größe und Richtung nach in (A. MM. 4. und 5.) gefunden iſt, und welche noch überdies durch den Anfangs-Punkt O der Koordinaten hindurchgeht.

F. Da nach (§. 25.) die Verſammlungs-Kraft P_0 an O, und das zugehörige mittlere Gegen-Paar, deſſen Moment Q_0 iſt, in eine einzige mittlere Kraft ſich vereinigen, wenn die Axe des in (B.) gefundenen Gegen-Paares Q_0 auf der Richtung der in (A.) gefundenen Verſammlungs-Kraft P_0 ſenkrecht ſteht, alſo wenn nach (I. Th. Geom. §. 1.)

$$(\odot)\cdots \left\{ \begin{array}{l} \cos\nu_0\cdot\cos\gamma_0+\cos\mu_0\cdot\cos\beta_0+\cos\lambda_0\cdot\cos\alpha_0=0 \\ \text{oder} \qquad\qquad L\cdot Z+M\cdot Y+N\cdot X=0 \end{array} \right\}$$

iſt, ſo folgt, daß die gegebenen n Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ hinſichtlich ihrer Größe, ihrer Richtung und ihrer Angriffs-Punkte dieſer Bedingungs-Gleichung ($\odot$) genügen müſſen, wenn ſie alle in eine einzige mittlere Kraft ſollen vereinigt werden können. — Umgekehrt: iſt dieſe Gleichung ($\odot$) von den gegebenen Kräften erfüllt, ohne daß X, Y, Z alle drei zugleich Null ſind, ſo exiſtirt allemal eine einzige mittlere Kraft, welche der Verſammlungs-Kraft P_0 an O gleich, und mit ihr parallel iſt, und welche zugleich in der Ebene des zugehörigen mittlern, in (B.) genau beſtimmten Gegen-Paares, vom Verſammlungs-Punkte O um

11) $$p_0 = \frac{Q_0}{P_0}$$

entfernt und so liegt, daß sie um O in dem Sinne des mittlern Gegen-Paares drehen will, nach (§. 25.) *).

Ist $L = 0$, $M = 0$ und zugleich $N = 0$, so ist die Gleichung ($\odot$) ebenfalls erfüllt. Es wird aber dann: $Q_0 = 0$, $p_0 = 0$ und die einzige mittlere Kraft fällt dann genau mit der Versammlungs-Kraft an O zusammen; ganz so wie wir dies in (E.) schon gesehen haben.

G. So oft aber keiner der Fälle (C. D. E. und F.) statt findet, so oft erhält man doch statt aller n gegebenen Kräfte

a) die in (A. a.) gefundene Versammlungs-Kraft P_0 an O, welche ihrer Richtung und Größe nach in den (MM. 4. und 5.) daselbst gefunden ist; und noch

b) das zugehörige mittlere Gegen-Paar, dessen Moment Q_0 und dessen Axe und Richtung in (B.) gefunden sind.

Diese Versammlungs-Kraft P_0 an O, und dieses Gegen-Paar Q_0 kann man dann, nach (§. 25.), in zwei Kräfte vereinigen, die nicht in einer Ebene liegen; und zwar findet man unendlich viele verschiedene solcher Paare von Kräften, welche mit den n gegebenen Kräften gleichgeltend sind, so daß man noch den Angriffs-Punkt der einen ganz beliebig wählen kann, während dann aber von dem Angriffs-Punkte der andern nur dessen Projektion auf irgend eine Ebene noch ganz beliebig gewählt werden darf, nach (§. 25. Anmerk.).

---

*) Da nur dieser einzigen Gleichung ($\odot$) zu genügen ist, so begreift man, daß dieselben gegebenen Kräfte an denselben gegebenen Angriffs-Punkten, bald eine einzige mittlere Kraft haben werden, bald auch nicht, je nach verschiedenen Richtungen dieser Kräfte an ihren Angriffs-Punkten. Ja man begreift, daß selbst, wenn diese gegebenen Kräfte an ihren gegebenen Angriffs-Punkten unter sich fortwährend dieselben gegebenen Winkel machen, solche doch in unzählich vielen verschiedenen Richtungen gegen das feste System, eine einzige mittlere Kraft haben werden, in allen übrigen Lagen aber nicht. Dr. Minding hat in einem sehr interessanten Aufsatze (Crelle's Journal Jahrgang 1835. Bd. XIV.) nicht bloß diese letztere Frage näher behandelt, sondern auch die nächste Frage untersucht, ob die verschiedenen einzelnen mittlern Kräfte für die verschiedenen Lagen der gegebenen Kräfte gegen das angegriffene feste System, sich in einem und demselben Punkte schneiden werden oder nicht.

Anmerk. Diese Rechnung lehrt:

1) Die Versammlungs-Kraft P_0 und die Winkel α_0, β_0, γ_0, welche ihre Richtung mit den Koordinaten-Axen macht, bleiben immer dieselben, wo man auch den Versammlungs-Punkt O nehmen mag, wenn nur die durch den jedesmaligen Versammlungs-Punkt O gelegten Koordinaten-Axen immer parallel mit einander gedacht werden; — d. h. die Versammlungs-Kraft P_0 bleibt der Größe nach dieselbe und rückt bloß parallel mit sich fort, wenn irgend ein anderer Punkt im festen System zum Versammlungs-Punkt der Kräfte gewählt wird. —

2) Die Summen L, M, N der statischen Momente und auch das Moment Q_0 des mittlern Gegen-Paares ändern sich mit dem Versammlungs-Punkte, letzteres seiner Größe und Richtung nach, weil diese Ausdrücke auch die Koordinaten-Werthe der Angriffs-Punkte in sich aufnehmen, und diese in unserer Rechnung mit dem Versammlungs-Punkte selbst sich ändern.

Die direkteren Betrachtungen des (§. 31.), die sich dem (§. 26.) unmittelbar anschließen, lassen jedoch dasselbe viel einleuchtender erscheinen. — Zuvor noch die Rechnungsbelege zu dem im (§. 28.) über die Anwendungen der Gleichgewichts-Gleichungen Gesagten.

§. 30.

I. Man setze zuerst den Fall des (§. 29. F.) voraus, in welchem die Bedingungs-Gleichung

$$(\odot) \cdots \quad L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X = 0$$

erfüllt ist, so daß eine einzige mittlere Kraft existirt; diese nun nach (§. 28.) durch Rechnung zu finden.

Es sey P_0 die existirende einzige mittlere Kraft, und $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ seyen die Winkel, welche sie mit den beliebigen rechtwinklichen Koordinaten-Axen macht. Man denke sich nun an dem unbekannten Angriffs-Punkte x_0, y_0, z_0 dieser mittlern Kraft, statt selbiger eine eben so große, aber in genau entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft, welche mit den Axen OX, OY, OZ die Winkel α'_0, β'_0 und γ'_0 macht, so daß

$\cos\alpha'_0 = -\cos\alpha_0$, $\cos\beta'_0 = -\cos\beta_0$ und $\cos\gamma'_0 = -\cos\gamma_0$ ist, — zu den n gegebenen Kräften noch hinzugefügt, so werden alle n+1 Kräfte sich im unbedingten Gleichgewicht erhalten. Bezeichnen daher X', Y', Z', L', M', N' für alle n+1 Kräfte dasselbe, was X, Y, Z, L, M, N für die gegebenen n Kräfte vorstellen, so hat man nach (§. 29. C.)

1) $X' = 0$, d. h. $X + P_0 \cdot \cos\alpha'_0 = 0$,
2) $Y' = 0$, - $Y + P_0 \cdot \cos\beta'_0 = 0$,
3) $Z' = 0$, - $Z + P_0 \cdot \cos\gamma'_0 = 0$,
4) $L' = 0$, - $L + P_0 \cdot (y_0 \cdot \cos\alpha'_0 - x_0 \cdot \cos\beta'_0) = 0$,
5) $M' = 0$, - $M + P_0 \cdot (x_0 \cdot \cos\gamma'_0 - z_0 \cdot \cos\alpha'_0) = 0$,
6) $N' = 0$, - $N + P_0 \cdot (z_0 \cdot \cos\beta'_0 - y_0 \cdot \cos\gamma'_0) = 0$.

Die erstern drei dieser Gleichungen geben nun P_0 und α'_0, β'_0, γ'_0, also auch α_0, β_0, γ_0 genau so wie (§. 29. A.). Die drei letztern Gleichungen dagegen, wenn man in ihnen statt $P_0 \cdot \cos\alpha'_0$, $P_0 \cdot \cos\beta'_0$ und $P_0 \cdot \cos\gamma'_0$ ihre Werthe $-X$, $-Y$, $-Z$ aus (1. — 3.) substituirt, gehen in nachstehende drei Gleichungen über, nämlich in

I. $\quad y_0 \cdot X - x_0 \cdot Y = L$,
II. $\quad x_0 \cdot Z - z_0 \cdot X = M$,
III. $\quad z_0 \cdot Y - y_0 \cdot Z = N$;

und diese geben also die Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 des Angriffs-Punktes der einzigen mittlern Kraft P_0. —

Weil aber jeder Punkt in der Richtung der mittlern Kraft zum Angriffs-Punkt genommen werden kann, so ist voraus zu sehen, daß diese drei Gleichungen (I. — III.) nicht von einander unabhängig, sondern überhaupt nur die Gleichungen der Projektionen der Richtung dieser mittlern Kraft seyn werden. Und in der That, so wie man aus allen drei Gleichungen x_0 und y_0 eliminirt, so fällt z_0 von selbst mit fort, und man erhält die Gleichung ($\odot$) wieder, also eine identische Gleichung *). —

*) Auf diesem Wege hätte man also die Bedingungs-Gleichung ($\odot$) für die Existenz einer einzigen mittlern Kraft ebenfalls erhalten.

Die Gleichungen (I. — III.) sind daher die Gleichungen der drei Projektionen der Richtung der mittlern Kraft auf die drei Koordinaten-Ebenen, und irgend zweie davon reichen aus, um die Richtung dieser mittlern Kraft, d. h. die unendliche Reihe ihrer stetig neben einander liegenden Punkte x_0, y_0, z_0 zu finden, in so ferne sie zu jedem beliebig gewählten x_0, die zugehörigen y_0 und z_0 liefern.

Statt die $n+1^{te}$ Kraft P_0 ihrer Größe und ihrer Richtung nach in Rechnung zu bringen, kann man sich sogleich diese unbekannte Kraft in drei unbekannte, aber mit den Koordinaten-Axen parallele Kräfte X_1, Y_1, Z_1 zerlegt denken und letztere drei in Rechnung bringen. Die Gleichungen (I. — 6.) sehen dann, in so ferne nun X_1, Y_1, Z_1 bezüglich statt $P_0 \cdot \cos\alpha'_0$, $P_0 \cdot \cos\beta'_0$ und $P_0 \cdot \cos\gamma'_0$ gesetzt werden müssen, so aus:

1′) $X+X_1=0$, 2′) $Y+Y_1=0$, 3′) $Z+Z_1=0$,
4′) $L+(y_0 X_1 - x_0 Y_1)=0$, 5′) $M+(x_0 Z_1 - z_0 X_1)=0$,
6′) $N+(z_0 Y_1 - y_0 Z_1)=0$.

Die ersten drei geben X_1, Y_1 und Z_1, aus denen man wieder die mittlere Kraft P_0 und ihre Richtung zusammensetzen kann; die letztern drei Gleichungen sind aber wieder die Gleichungen (I. — III.) zwischen den Koordinaten-Werthen x_0, y_0 und z_0.

II. Denken wir uns immer noch das angegriffene feste System des (§. 26.) und die Bezeichnung des (§. 29.), und suchen wir, wenn der Bedingung

$$L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X = 0$$

von den gegebenen Kräften nicht genügt ist, die zwei Kräfte P' und P'', welche statt aller n Kräfte gesetzt werden können. Denken wir uns diese unbekannten Kräfte P' und P'', an ihren Angriffs-Punkten x', y', z' und x'', y'', z'' in genau entgegengesetzter Richtung angebracht, zu den n gegebenen Kräften noch hinzugefügt, so müssen sich alle $n+2$ Kräfte einander im unbedingten Gleichgewicht halten. Zerlegt man aber jede dieser unbekannten und so eben noch hinzugedachten Kräfte P' und P'' in drei ebenfalls unbekannte, mit den Koordinaten-Axen parallele Seiten-Kräfte X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2, wie wir solches im vorhergehenden Falle zuletzt vorgeschlagen haben, um nicht die unbekannten Winkel in Rechnung bringen zu müssen, also daß nun $n+6$ Kräfte einander im unbedingten Gleichgewicht

halten, so sind die sechs Gleichungen des Gleichgewichts nach (§. 28. oder §. 29. C.):

1) $X + X_1 + X_2 = 0$, 2) $Y + Y_1 + Y_2 = 0$,

3) $Z + Z_1 + Z_2 = 0$;

und

4) $L + (y' \cdot X_1 - x' \cdot Y_1) + (y'' \cdot X_2 - x'' \cdot Y_2) = 0$,

5) $M + (x' \cdot Z_1 - z' \cdot X_1) + (x'' \cdot Z_2 - z'' \cdot X_2) = 0$,

6) $N + (z' \cdot Y_1 - y' \cdot Z_1) + (z'' \cdot Y_2 - y'' \cdot Z_2) = 0$;

wo, wie bekannt, in den letztern drei Gleichungen die Ausdrücke zur Linken nichts anders sind, als die Summe der Momente der Projektionen aller $n+2$ (oder $n+6$) Kräfte auf jede der drei Koordinaten-Ebenen, in Bezug auf den willkührlich gewählten Anfangs-Punkt O der Koordinaten, als Centrum der Momente genommen.

Diese sechs Gleichungen bestimmen nun von den unbekannten zwölf Größen x', y', z'; x'', y'', z''; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2 und Z_2, im Allgemeinen sechse. — Hat man aber X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 gefunden, so vereinigt man sie in die beiden P' und P'', deren Größe und deren Winkel mit den Koordinaten-Axen dann ebenfalls bekannt sind. Statt dieser so gefundenen Kräfte P' und P'' nimmt man nun dieselben Kräfte an denselben Angriffs-Punkten, aber in genau entgegengesetzter Richtung, und man hat dann die beiden mittlern Kräfte, welche statt aller n Kräfte unbedingt gesetzt werden können.

Da in den Gleichungen (4. — 6.) auch noch die unbekannten Koordinaten-Werthe x', y', z'; x'', y'', z'' der Angriffs-Punkte vorkommen, so scheinen, dem ersten Anblicke zu Folge, die Angriffs-Punkte beliebig gewählt werden zu können. Weil wir aber durch (§. 25. Anmerk.) bereits vom Gegentheil überzeugt sind, so werden wir aus den sechs Gleichungen (1. — 6.) nach und nach die fünf Unbekannten X_1, Y_1, Z_1; X_2 und Y_2 eliminiren, anscheinend um zuletzt Z_2 finden zu können; — dann wird aber aus der entstehenden End-Gleichung dieser sechste Unbekannte Z_2 zugleich mit wegfallen, und man wird diese Gleichung haben:

$$(\odot)\ldots\ X\cdot(y'z''-z'y'')+Y\cdot(z'x''-x'z'')+Z\cdot(x'y''-y'x'')\ldots$$
$$+L\cdot(z'-z'')+M\cdot(y'-y'')+N\cdot(x'-x'')=0.$$

Dies ist also die Bedingungs-Gleichung, welche von den Koordinaten-Werthen der willkührlich gewählten Angriffs-Punkte der gesuchten beiden mittlern Kräfte und von den n gegebenen Kräften (oder von letzteren allein, wenn nämlich erstere gegeben sind) erfüllt seyn muß, wenn die beiden mittlern Kräfte gerade diese Angriffs-Punkte sollen haben können *).

Im Allgemeinen kann man also von den sechs Koordinaten-Werthen nur fünf beliebig annehmen, und muß von den sechs Kräften X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2 und Z_2 wenigstens eine beliebig lassen, wenn man, wie auch die n Kräfte gegeben seyn mögen, doch wirklich immer eines der unendlich vielen gleichgeltenden Kräften-Paare (nicht Gegen-Paare) erhalten will.

Anmerk. Hat das von den n Kräften angegriffene feste System

1) einen absolut festen Punkt, um welchen sich solches beliebig drehen kann, so erfolgt keine Drehung, also überhaupt keine Bewegung, die Kräfte selbst sind also dann um diesen absolut festen Punkt im (bedingten) Gleichgewicht, wenn alle n Kräfte nur eine einzige mittlere Kraft zulassen, die durch den absolut festen Punkt hindurchgeht. — Dies giebt die drei Bedingungs-Gleichungen (I. — III.) des (§. 30.), wenn x_0, y_0, z_0 die gegebenen Koordinaten-Werthe des absolut festen Punktes sind; und diese reduziren sich auf

I. $L=0$, II. $M=0$ und III. $N=0$,

wenn $x_0=y_0=z_0=0$ genommen wird, d. h. wenn die Koordinaten-Werthe durch den absolut festen Punkt gelegt sind (vgl. §. 29. E., wo das letztere bereits aufgelagt ist).

Hat aber das von den n Kräften angegriffene feste System

2) zwei absolut feste Punkte, also eine absolut feste Axe, um welche sich solches drehen kann, so wird keine Drehung erfolgen, also werden sich die Kräfte um diese absolut feste Axe im (bedingten) Gleichgewicht erhal-

*) Dies ist die im (§. 25. Anmerk.) bereits gefundene Bedingung, aber jetzt in Gleichung gebracht. Nimmt man $x'=y'=z'=0$, $x''=y''=0$, d. h. legt man die Koordinaten-Axen durch den einen der beiden gegebenen Punkte, die Axe OZ aber auch zugleich durch den andern, so reduzirt sich diese Gleichung $(\odot)$ bloß auf

$$L=0.$$

Diese muß also erfüllt seyn, wenn die beiden mittlern Kräfte gerade der Axe OZ begegnen sollen.

ten, sobald die zwei mittleren Kräfte, in welche sich die n gegebenen Kräfte vereinigen, durch diese absolut festen Punkte hindurchgehen, also wenn die obige Gleichung (⊙) unter der Voraussetzung erfüllt ist, daß x', y', z'; x'', y'', z'' die Koordinaten-Werthe der beiden absolut festen Punkte sind. — Es ist aber bequemer die Koordinaten-Axen durch den einen absolut festen Punkt zu legen, und OZ auch noch durch den andern. Dann reduzirt sich diese Bedingungs-Gleichung (⊙) bloß auf

$$L = 0,$$

welche Gleichung bekanntlich ausdrückt, daß die Summe der statischen Momente der Projektionen der n gegebenen Kräfte auf die Ebene XOY, welche auf der festen Axe OZ senkrecht steht, in Bezug auf den Durchschnitts-Punkt O dieser Ebene und dieser Axe, als Centrum der Momente genommen, der Null gleich ist, oder kürzer folglich besser gesagt, daß die Summe der statischen Momente um die Axe OZ, als Momenten-Axe genommen, der Null gleich ist.

Diesen Untersuchungen über die unfreien Systeme ist aber später ein eigenes Kapitel gewidmet, daher hier nur diese kurze Andeutung.

§. 31 *).

Verfolg der Untersuchung des (§. 26.).

Hat man, dem (§. 26.) gemäß, für n gegebene Kräfte P_1, P_2, ... P_n, welche ein festes System angreifen, an irgend einem bestimmten Versammlungs-Punkte O die Versammlungs-Kraft P_0 ihrer Größe und Richtung nach gefunden, und noch das zugehörige Gegen-Paar, seinem Momente Q_0, seiner Axe und seiner Richtung nach, so daß P_0 an O, nebst den beiden gleichen Kräften in dem zugehörigen Gegen-Paare, statt aller n gegebenen Kräfte unbedingt gesetzt werden können, — so darf man nur P_0 und die beiden im Gegen-Paar steckenden gleichen Kräfte allein als die gegebenen Kräfte ansehen, um sogleich statt aller n Kräfte unendlich viele verschieden liegende Versammlungs-Kräfte und zugehörige Gegen-Paare zu haben, so daß eine jede dieser Versammlungs-Kräfte und das zugehörige Gegen-Paar statt aller n gegebenen Kräfte unbedingt gesetzt werden können.

Wählt man nämlich irgend einen andern Versammlungs-Punkt O', welcher von der Richtung der vorhin gefundenen

*) Diese nächsten (§§. 31. — 34.) können bei'm ersten Lesen überschlagen werden.

Versammlungs-Kraft P_0 an O, um p_0 abliegt, so darf man nur die Kraft P_0 an O parallel mit sich nach O' hin fortrükken, und in der durch O' und P_0 an O gegebenen Ebene noch ein neues Gegen-Paar hinzutreten lassen, dessen Moment $p_0 \cdot P_0$ ist, um die Gesammtwirkung aller n Kräfte unverändert zu haben, nach (§. 23.). Vereinigt man nun die beiden Gegen-Paare, deren Momente Q_0 und $p_0 \cdot P_0$ sind, und die in gegebenen Ebenen liegen, in ein einziges Gegen-Paar, dessen Moment Q'_0 und dessen Ebene und Richtung nach (§. 14.) gefunden werden, so hat man zuletzt statt der Versammlungs-Kraft P_0 an O und dem zugehörigen Gegen-Paar Q_0, also auch statt aller n gegebenen Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$, erstlich die Versammlungs-Kraft P'_0 am neuen Versammlungs-Punkte O' (welche der P_0 gleich und parallel ist) und noch das zugehörige Gegen-Paar, dessen Moment Q'_0 und dessen Axe und Richtung so eben gefunden worden sind.

§. 32.

Weiterer Verfolg der Untersuchung des (§. 26.).

Aus diesen Betrachtungen geht nun unmittelbar hervor:

1) Die Versammlungs-Kraft bleibt ihrer Größe nach immer dieselbe, wo man auch den Versammlungs-Punkt O' nehmen mag; sie rückt bloß parallel mit sich an den neuen Versammlungs-Punkt hin; dagegen ändert sich mit jeder neuen Lage der Versammlungs-Kraft das zugehörige Gegen-Paar, seiner Axe und im Allgemeinen auch seinem Momente nach, so oft die neue Versammlungs-Kraft nicht genau in die Richtung der alten fällt.

2) Wird dagegen der neue Versammlungs-Punkt O' zwar außer O, aber doch in der Richtung der durch O gehenden alten Versammlungs-Kraft P_0 genommen, so ändert sich weder Größe noch Lage der Versammlungs-Kraft, und auch weder das Moment noch die Axe des zugehörigen Gegen-Paares.

3) Nimmt man den neuen Versammlungs-Punkt O' so, daß die Ebene des nun zugehörigen Gegen-Paares, dessen Moment Q'_0 seyn mag, auf der Richtung der alten Versammlungs-

Kraft P_0 an O, also auch auf der Richtung der neuen Versammlungs-Kraft P'_0 an O', senkrecht steht, so ist das Moment Q'_0 des zugehörigen Gegen-Paares kleiner, als für jeden andern Versammlungs-Punkt, der außerhalb der Richtung der neuen Versammlungs-Kraft P'_0 an O' genommen werden mag; dieses Moment Q'_0 ist also dann ein Minimum oder ein Kleinstes, und bleibt natürlich unverändert für jeden Versammlungs-Punkt, der in der Richtung von P'_0 selbst gewählt werden sollte.

Denn so wie, von P'_0 um p_0 entfernt, irgend ein neuer Versammlungs-Punkt O gewählt und daselbst P_0 der P'_0 gleich und parallel genommen wird, so tritt sogleich nach (§. 23.) in der durch O und P'_0 gegebenen, also auf der Ebene des Gegen-Paares Q'_0 senkrechten Ebene, das neue Gegen-Paar hinzu, dessen Moment $p_0 \cdot P_0$ ist; und beide Gegen-Paare $p_0 \cdot P_0$ und Q'_0 vereinigen sich sogleich nach (§. 14.) in ein einziges, dessen Moment $Q_0 = \sqrt{(p_0 \cdot P_0)^2 + Q'^2_0}$, also größer als Q'_0 ist, und dessen durch O gedachte Axe mit der Axe von Q'_0, also mit der Richtung der Versammlungs-Kraft P_0 einen Winkel ψ bildet, welcher durch die Gleichungen

I. $$\sin\psi = \frac{p_0 \cdot P_0}{Q_0} = \frac{p_0 \cdot P_0}{\sqrt{(p_0 \cdot P_0)^2 + Q'^2_0}}$$

und II. $$\cos\psi = \frac{Q'_0}{Q_0} = \frac{Q'_0}{\sqrt{(p_0 \cdot P_0)^2 + Q'^2_0}}$$

bestimmt und gegeben ist. — Dabei steht die Entfernung p_0 auf der Ebene dieses Winkels ψ senkrecht.

Diese im angegriffenen festen System völlig bestimmte einzige Gerade, in welcher alle diejenigen Versammlungs-Punkte liegen, die man wählen muß, wenn das zugehörige Gegen-Paar, dem Momente nach ein Kleinstes, seiner Ebene nach aber senkrecht auf der (allemal auch in der Richtung derselben Geraden wirkenden) Versammlungs-Kraft liegen soll, — wollen wir die Central-Axe des angegriffenen festen Systems nennen. — Diese Central-Axe ändert sich also im Allgemeinen mit den angreifenden Kräften zugleich.

4) Die vorstehende Betrachtung zeigt auch noch, daß für alle rings um die Central-Axe herum, von ihr in gleicher Entfernung gewählten Versammlungs-Punkte O (die also eine normale Cylinder-Fläche bilden, deren Axe die Central-Axe ist) die Größe Q_o des Moments des mittlern Gegen-Paares ein und dasselbe bleibt, ebenso der Winkel ψ, d. h. die Lage seiner Axe gegen die Richtung der Versammlungs-Kraft d. h. gegen die Central-Axe, aber nicht die Lage seiner Axe gegen das feste System selbst. Diese Axen der zugehörigen Gegen-Paare, wenn man sie alle durch einen und denselben Punkt der Central-Axe hindurch gehen läßt (was allemal erlaubt ist, da zur Axe eines Gegen-Paares jede auf seiner Ebene senkrechte Gerade genommen werden kann), bilden vielmehr die Oberfläche eines normalen Kegels, dessen Axe die Central-Axe ist, und der Winkel ψ oder 2ψ dieses Kegels wird dabei desto größer, je weiter diese Versammlungs-Punkte von der Central-Axe entfernt liegen, wie aus den Formeln (Nr. 3. I. und II.) hervorgeht.

5) Die Lage der Central-Axe eines angegriffenen festen Systems findet man daher auf folgende Weise: Man bestimmt nämlich zuerst für einen beliebig gewählten Versammlungs-Punkt O die Versammlungs-Kraft P_o, ihrer Größe und Lage nach, so wie das zugehörige Gegen-Paar, d. h. seine Axe und sein Moment Q_o. Läßt man diese Axe des zugehörigen Gegen-Paares durch den Versammlungs-Punkt O selbst gehen, so bildet sie mit der Richtung der Versammlungs-Kraft P_o daselbst eine Ebene und einen Winkel ψ, der nun bekannt ist. Errichtet man jetzt in O, senkrecht auf diese Ebene, ein Perpendikel von der Länge P_o, wie solche aus der Gleichung (Nr. 3. I.) sich ergiebt, so hat man im zweiten End-Punkte dieses Perpendikels *) einen Punkt der Central-Axe, durch welchen dann die Central-Axe selbst mit P_o an O parallel gelegt wird.

Man findet aber aus (Nr. I. und II.) nicht bloß

*) Das Perpendikel kann sich auf jeder der beiden Seiten dieser Ebene herausheben. Nur einer der beiden End-Punkte ist der gesuchte, solcher aber leicht zu erkennen.

III. $p_0 = \frac{Q_0 \cdot \sin\psi}{P_0}$, sondern auch IV. $Q'_0 = Q_0 \cdot \cos\psi$,

d. h. zu gleicher Zeit auch das (kleinste) Moment Q'_0 des zu jedem beliebigen Punkt der Central-Axe, als Versammlungs-Punkt der Kräfte genommen, gehörigen Gegen-Paares (dessen Ebene allemal auf der Central-Axe, d. h. auf der Richtung der Versammlungs-Kraft senkrecht steht).

6) Legt man durch O senkrechte Axen OX, OY und OZ, und gebraucht man überhaupt die Bezeichnung der (§§. 29. und 32.), so lassen sich an das Vorstehende noch neue interessante Betrachtungen anknüpfen.

Es ist nämlich nach (I. Th. Geom. §. 1. VII. 7.)

$$\cos\psi = \cos\alpha_0 \cdot \cos\lambda_0 + \cos\beta_0 \cdot \cos\mu_0 + \cos\gamma_0 \cdot \cos\nu_0,$$

d. h. nach (§. 29. A. Nr. 5. und B. Nr. 10.)

V. $$\cos\psi = \frac{L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X}{P_0 \cdot Q_0};$$

also auch, weil $Q_0 \cdot \cos\psi = Q'_0$ ist, das kleinste Moment

VI. $$Q'_0 = \frac{L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X}{P_0}$$ *).

Da das kleinste Moment Q'_0 und die Versammlungs-Kraft P_0 völlig bestimmte, von der Annahme der Koordinaten-Axen unabhängige Werthe sind, so zeigt die Gleichung (VI.) auch noch,

„daß der Ausdruck $L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X$ immer einen und denselben Werth behält, wie man auch den Anfangs-Punkt der Koordinaten-Axen, und die Lage derselben nur immer annehmen mag."

7) Da man unter Beibehaltung der Rechnungen des (§. 29.) die Winkel α_0, β_0, γ_0 kennt, welche jede der Versammlungs-Kräfte, also auch die Central-Axe mit den drei Koordinaten-Axen macht, so braucht man nur noch die Koordinaten-Werthe

eines

*) Der Zähler $L \cdot Z + M \cdot Y + N \cdot X$ dieses Ausdruckes für das zur Central-Axe gehörige (kleinste) Moment Q'_0 ist genau derjenige Ausdruck, welcher nach (§. 29. F.) der Null gleich seyn muß, wenn eine einzige mittlere Kraft existirt, oder soll existiren können.

eines der Punkte der Central-Axe, um die Gleichungen dieser letztern (im Sinne des I. Th. Geometrie §. 12.) bilden zu können.

Nennen wir aber a', b', c' die Koordinaten-Werthe desjenigen Punktes O' der Central-Axe, wo die aus dem Anfangs-Punkte O der Koordinaten-Axen auf sie gefällte Normale p_0 sie trifft, so hat man nach (I. Th. Geom. §. 1. V.), weil aus (Nr. 5. III.) $p_0^2 = \frac{Q_0^2 - Q'^2_0}{P_0^2}$ ist,

$$\text{VII.} \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{Q_0^2 - Q'^2_0}{P_0^2}.$$

Weil aber

$\frac{a'}{p_0}$, $\frac{b'}{p_0}$ und $\frac{c'}{p_0}$ } die Kosinusse der Winkel sind, welche bezüglich } $= \frac{P}{P_0}$

$\frac{X}{P_0}$, $\frac{Y}{P_0}$ und $\frac{Z}{P_0}$ } $= \frac{P}{P_0}$

und $\frac{N}{Q_0}$, $\frac{M}{Q_0}$ und $\frac{L}{Q_0}$ } und die Axe des Gegen-Paares Q_0

mit den drei Koordinaten-Axen machen, — und weil die Entfernung p_0 nicht bloß auf P_0, sondern auch auf der Axe des Gegen-Paares Q_0 senkrecht steht, so hat man nach (I. Th. Geometrie §. 1. VII. 8.) noch die beiden Gleichungen

$$\text{VIII.} \qquad a'X + b'Y + c'Z = 0$$

und $$\text{IX.} \qquad a'N + b'M + c'L = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen (VII. — IX.) finden sich also a', b' und c'. — Diese Gleichungen geben allemal zwei Punkte, und man muß daher denjenigen noch wählen, welcher wirklich allen Bedingungen der Aufgabe genügt, was jedesmal leicht zu erkennen ist.

§. 33.

Statt aber die Betrachtungen des (§. 32. Nr. 3. — 7.) anzustellen, hätte man sich unmittelbar nach dem (§. 29.) direkt die Frage vorlegen können: „Wo muß der neue Versammlungs-„Punkt O' genommen werden, damit das Moment Q_0 des zu

„gehörigen Gegen-Paares das kleinſte wird,“ — um ſich dieſe Frage durch die allgemeine Lehre vom Größten und Kleinſten (I. Th. Analyſ. §. 56.) direkt zu beantworten.

Zu dem Ende würde man zuvörderſt wieder einen beliebigen Verſammlungs-Punkt O wählen, durch denſelben Punkt O die Koordinaten-Axen legen, und überhaupt die Bezeichnung des (§. 29.) unverändert beibehalten, die Koordinaten-Werthe des neuen geſuchten Verſammlungs-Punktes O' durch a, b, c bezeichnen, durch dieſen Punkt O' neue Koordinaten-Axen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ parallel mit den alten legen, und die neuen Koordinaten-Werthe irgend eines der Angriffs-Punkte der n gegebenen Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ durch x', y', z' bezeichnen, wenn die alten durch x, y, z bezeichnet ſind; — ſo daß man hat

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c,$$

alſo $$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Stellen nun dasmal L', M', N' diejenigen Ausdrücke vor, welche aus den Ausdrücken L, M, N hervorgehen, wenn man in letzteren ſtatt der x, y, z überall die x', y', z' ſchreibt *), ſo hat man, wenn ſtatt x', y', z' ihre Werthe x—a, y—b, z—c geſetzt werden,

1) $L' = \Sigma P[(y-b)\cdot\cos\alpha - (x-a)\cdot\cos\beta] = a\cdot Y - b\cdot X + L,$

2) $M' = \Sigma P[(x-a)\cdot\cos\gamma - (z-c)\cdot\cos\alpha] = c\cdot X - a\cdot Z + M,$

3) $N' = \Sigma P[(z-c)\cdot\cos\beta - (y-b)\cdot\cos\gamma] = b\cdot Z - c\cdot Y + N,$

4) $$Q'_0{}^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2,$$

d. h.

5) $Q'_0{}^2 = (a\cdot Y - b\cdot X + L)^2 + (c\cdot X - a\cdot Z + M)^2 + (b\cdot Z - c\cdot Y + N)^2.$

Soll alſo Q'_0 oder $Q'_0{}^2$ ein Minimum werden, ſo muß man a, b, c ſo nehmen, nach (I. Th. Analyſ. §. 56.), daß

$$\partial(Q'_0{}^2)_a = 0; \quad \partial(Q'_0{}^2)_b = 0 \quad \text{und} \quad \partial(Q'_0{}^2)_c = 0$$

wird. Dies giebt aus (4. oder 5.) die Gleichungen

6) $L'\cdot Y - M'\cdot Z = 0; \quad N'\cdot Z - L'\cdot X = 0; \quad M'\cdot X - N'\cdot Y = 0;$

d. h.

*) Wir machen den Anfänger noch in's Beſondere darauf aufmerkſam, daß hier die Buchſtaben L', M' und N' eine andere Bedeutung haben, als diejenige, in welcher ſie im (§. 30.) eingeführt worden ſind.

7) $$\frac{L}{Z} = \frac{M}{Y} = \frac{N}{X}$$

oder

8) $$\frac{a\cdot Y - b\cdot X + L}{Z} = \frac{c\cdot X - a\cdot Z + M}{Y} = \frac{b\cdot Z - c\cdot Y + N}{X}.$$

Letztere Gleichungen (8.) sind demnach die (zwei von einander unabhängigen) Gleichungen zwischen a, b und c.

Stellt man die nöthigen Rechnungen mit den zweiten Differenzial-Koefficienten an, so überzeugt man sich auch leicht vom wirklichen Daseyn des Minimums von Q'_0, so oft diese Gleichungen (8.) erfüllt sind.

Diese Gleichungen (8.) sind nach (I. Th. Geom. §. 12.) die Gleichungen einer geraden Linie im Raume. Alle Versammlungs-Punkte, deren zugehöriges mittleres Gegen-Paar ein Minimum von Moment hat, liegen also in dieser Geraden; und umgekehrt, jeder Punkt dieser Geraden ist ein solcher Versammlungs-Punkt, wie wir ihn suchten. Diese Gleichungen (8.) sind daher die Gleichungen der Central-Axe, wenn man diese Gerade aufs Neue so nennen will. Dieselbe Central-Axe haben wir aber auch im (§. 32. Nr. 5.) bereits gefunden, und in (Nr. 7. daselbst) schon näher zu bestimmen gesucht. Doch dürfen wir nicht übersehen, daß sie jetzt noch etwas allgemeiner aufgefaßt und auch für den Fall eingeführt ist, wo das zu jedem in ihr genommenen Versammlungs-Punkte gehörige Gegen-Paar das Moment $Q'_0 = 0$ hat, d. h. wo $L\cdot Z + M\cdot Y + N\cdot X = 0$ ist, wo also nur eine einzige mittlere Kraft P_0 existirt, nach (§. 29.), deren Richtung mit der so eben gefundenen Central-Axe jetzt zusammenfallen muß. **Die Gleichungen (8.) der Central-Axe sind also zu gleicher Zeit auch die Gleichungen der Richtung der etwa existirenden einzigen mittlern Kraft.**

Betrachten wir jedoch den allgemeinen Fall noch weiter. Ist (a', b', c') irgend ein bestimmter Punkt dieser Central-Axe, so werden die Gleichungen (8.) identisch, wenn man a', b', c' statt a, b, c substituirt. Zieht man diese neuen identischen Gleichun-

gen von den Gleichungen (8.) ab, und eliminirt man aus den erhaltenen Gleichungen abwechselnd $c-c'$, $b-b'$ und $a-a'$, so erhält man

$$9)\quad \left\{\begin{array}{rl} & Y\cdot(a-a')-X\cdot(b-b')=0,\\ \text{oder} & \cos\beta_0\cdot(a-a')-\cos\alpha_0\cdot(b-b')=0,\\ & X\cdot(c-c')-Z\cdot(a-a')=0,\\ \text{oder,} & \cos\alpha_0\cdot(c-c')-\cos\gamma_0\cdot(a-a')=0,\\ & Z\cdot(b-b')-Y\cdot(c-c')=0,\\ \text{oder} & \cos\gamma_0\cdot(b-b')-\cos\beta_0\cdot(c-c')=0, \end{array}\right.$$

und dies sind die Gleichungen der Projektionen der Central-Axe. Diese Gleichungen zeigen aber an, daß die Central-Axe mit der Mensurations-Kraft parallel läuft oder zusammenfällt. — Solches ist jedoch auch aus (§. 32. Nr. 3.) schon hervorgegangen. Die Gleichungen (7.) in Verbindung mit den (§. 29. B. Nr. 10.) zeigen auch noch, daß entweder $L'=M'=N'=0$, d. h. daß $Q'=0$ ist, oder daß die Axe des (kleinsten) Gegen-Paares mit der Central-Axe zusammenfällt, welches letztere auch bereits im (§. 32. Nr. 3.) behauptet und bewiesen ist. Sind nämlich λ', μ', ν' die Winkel, welche die Axe des (kleinsten) Gegen-Paares Q'_0 mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht, so hat man nach (§. 29. B. Nr. 10.)

$$10)\quad \cos\nu'_0=\frac{L'}{Q'_0},\quad \cos\mu'_0=\frac{M'}{Q'_0}\quad\text{und}\quad \cos\lambda'_0=\frac{N'}{Q'_0}.$$

Deshalb sind die Gleichungen (7.) erfüllt, wenn

$$\nu'_0=\alpha_0,\quad \mu'_0=\beta_0\quad\text{und}\quad \lambda'_0=\gamma_0$$

ist.

Multiplizirt man endlich die Gleichungen (1., 2. und 3.) bezüglich mit Z, Y und X, und addirt man sie, so erhält man

$$11)\quad L'\cdot Z+M'\cdot Y+N'\cdot X=L\cdot Z+M\cdot Y+N\cdot X,$$

und dies ist das im (§. 32. Nr. 6.) bereits erhaltene Resultat.

Aus den Gleichungen (7.) erhält man noch:

$$12)\quad \frac{L'}{Z}=\frac{M'}{Y}=\frac{N'}{X}=\frac{L'\cdot Z}{Z^2}=\frac{M'\cdot Y}{Y^2}=\frac{N'\cdot X}{X^2}$$
$$=\frac{L'\cdot Z+M'\cdot Y+N'\cdot X}{Z^2+Y^2+X^2}.$$

Ferner geben dieselben Gleichungen

$$(13.)\quad \frac{L^2}{Z^2} = \frac{M^2}{Y^2} = \frac{N^2}{X^2} = \frac{L^2+M^2+N^2}{Z^2+Y^2+X^2} = \frac{Q_0^2}{P_0^2}.$$

Zieht man nun aus (13.) die Quadrat-Wurzel, und vergleicht man das Resultat mit (12.), so hat man noch

$$(14)\quad LZ + MY + NX = P_0 Q_0;$$

und dies ist bereits im (§. 32. Nr. 6.) nachgewiesen.

(§. 34.*).

Wir beschließen dieses Kapitel, indem wir noch einmal alles rekapitulliren, was wir von den statischen Momenten der n Kräfte, die ein festes System angreifen, bisher gesagt haben; dabei aber noch einiges hinzufügen, was besonders in der Dynamik fester Körper von Wichtigkeit wird.

A) Wird ein festes System von n beliebigen Kräften P_1, P_2, ... P_n im Raume in beliebigen Richtungen angegriffen, und wird außerdem noch ein beliebiger Punkt O gedacht, so bildet die Richtung einer jeden der Kräfte mit dem Punkte O eine Ebene, und die Kraft hat in Bezug auf diesen Punkt O, als Centrum genommen, ein statisches Moment (I. Th. Mech. §. 30.). Diese Ebene und dieses statische Moment sind zu gleicher Zeit die Ebene und das Moment des Gegen-Paares, welches noch hinzutreten muß, wenn die Kraft P parallel mit sich nach dem Punkt O fortgerückt gedacht wird, und wenn dabei keine Aenderung in der Wirkung statt finden soll; nach (§. 23.). — Die Axe und die Richtung dieses Gegen-Paares (§. 11.) nennen wir auch die Axe und Richtung des P eben gedachten statischen Momentes, so daß wir auch eine positive und negative Seite der Axe unterscheiden; alles genau wie in (§. 17. Nr. 2.).

B) Jedes solche statische Moment, oder jedes solche Moment dieses Gegen-Paares denken wir uns allemal als ein Rechteck,

(*) Auch diesen (§. 34.) kann der Anfänger bei'm ersten Lesen überschlagen.

deſſen Inhalt dieſes Moment iſt (oder als das Doppelte eines Dreiecks, welches die Kraft zur Grundlinie, das Centrum O aber zur Spitze hat), und welches dabei (Rechteck oder Dreieck) jedenfalls in der Ebene dieſes Moments liegt. Die Projektion eines ſo gedachten ſtatiſchen Moments auf eine beliebige durch O gelegte Ebene E, iſt dann allemal dem Momente der auf dieſelbe Ebene E projizirten Kraft gleich, in Bezug auf daſſelbe Centrum O der Momente genommen, oder auch, nach (§. 27. Nr. 3.), dem ſtatiſchen Momente der Projektion der Kraft auf eine mit E parallele Ebene E', in Bezug auf den Punkt O' als Centrum des Moments genommen, in welchem die durch O gelegte, auf die Ebene E ſenkrechte Axe des Moments OV der Ebene E' begegnet. Dieſe Projektionen nehmen wir aber poſitiv oder negativ, je nachdem die projicirten Kräfte das feſte Syſtem um OV in der, als poſitiv gedachten, oder in der entgegengeſetzten, negativen Richtung der Ebene E, herumdrehen wollen.

C) Wir gebrauchen nun genau die Koordinaten-Ebenen und überhaupt die Bezeichnung des (§. 29.); außerdem legen wir aber durch den Punkt O noch drei neue rechtwinklige Koordinaten-Axen OX', OY' und OZ', welche gegen die alten gegeben ſind, durch die Winkel X'OX, X'OY, X'OZ, Y'OX, Y'OY, Y'OZ, Z'OX, Z'OY und Z'OZ. Haben ferner L', M', N' in Bezug auf die neuen Koordinaten-Axen dieſelbe Bedeutung, welche L, M, N in Bezug auf die alten haben, d. h. bedeuten ſie die Summe der (poſitiv oder negativ genommenen) ſtatiſchen Momente der Kräfte um dieſe neuen Koordinaten-Axen als Momenten-Axen, nach (§. 27. Nr. 3.) *); und bezeichnen λ'_0, μ'_0 und ν'_0 die Winkel, welche die poſitive Seite der Axe des zum Verſammlungs-Punkt O gehörigen mittlern Gegen-Paares Q_0 mit den neuen Koordinaten-Axen OX', OY' und OZ' macht, ſo hat man nach (§. 19.)

*) Dieſe L', M', N' haben alſo wieder eine andere Bedeutung, als dieſelben Buchſtaben im (§. 30.), und auch eine andere als im (§. 33.); worauf wir den Anfänger beſonders aufmerkſam machen zu müſſen glauben.

1) $L = Q_0 \cdot \cos\nu_0$; $M = Q_0 \cdot \cos\mu_0$ und $N = Q_0 \cdot \cos\lambda_0$;

2) $L' = Q_0 \cdot \cos\nu'_0$; $M' = Q_0 \cdot \cos\mu'_0$ und $N' = Q_0 \cdot \cos\lambda'_0$;

3) $Q_0^2 = L^2 + M^2 + N^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2$.

„Die Summe der Quadrate der Momenten-Summen in dreien „auf einander senkrechten Koordinaten-Ebenen, oder um drei „auf einander senkrechte Momenten-Axen ist daher von der Lage „dieser Ebenen oder Axen ganz unabhängig, immer eine und „dieselbe, und immer dem Quadrat des Moments des mittlern „Gegen-Paares gleich, welches noch zur Versammlungs-Kraft „P_0 hinzutritt, wenn das angenommene Centrum O der (stati„schen) Momente, d. h. der Durchschnitts-Punkt der drei Mo„menten-Axen zu gleicher Zeit zum Versammlungs-Punkt der „Kräfte gewählt wird."

Da nach (Nr. 2.) $L' = Q_0$ wird, so oft $\cos\nu'_0 = 1$, also $\nu'_0 = 0$ ist, d. h. so oft die Ebene $X'OY'$ mit der Ebene des mittlern Gegen-Paares Q_0 zusammenfällt, — und da nach (Nr. 3.) Q_0 der größeste Werth ist, den die Ausdrücke L', M', N' nur immer annehmen können, so folgt hieraus noch:

α) Die Ebene des zum Versammlungs-Punkt O gehörigen mittlern Gegen-Paares hat die Eigenschaft, daß in ihr die Summe der (positiv und negativ genommenen) statischen Momente aller auf sie projicirten Kräfte ein Maximum ist, nämlich größer als in jeder andern Ebene, so lange nur das Centrum O der Momente dasselbe bleibt und zum Versammlungs-Punkt der Kräfte genommen wird. — Die Ebene des mittlern Gegen-Paares kann man daher auch die Ebene der größten Momenten-Summe nennen, so wie dann nach (§. 27. Nr. 3.) die Richtung der zum Versammlungs-Punkt O gehörigen Versammlungs-Kraft dann auch die Axe der größten Momenten-Summe genannt werden kann.

β) In jeder andern Ebene $X'OY'$, d. h. nach (§. 27. Nr. 3.) um jede andere durch O hindurch gehende Momenten-Axe OZ', hat die Momenten-Summe

$$L' = Q_0 \cdot \cos \nu'_0$$

immer denselben Werth, so lange der Winkel ν'_0 derselbe bleibt, d. h. so lange die Ebene $X'OY'$ und die Ebene des mittlern Gegen-Paares (oder richtiger die positiven Seiten der Axen dieser Ebenen) mit einander einen und denselben Winkel bilden.

γ) In jeder Ebene $X'OY'$, welche auf der Ebene der größten Momenten-Summe senkrecht steht, d. h. nach (§. 27. Nr. 3.) um jede durch O gehende Momenten-Axe, welche auf der Axe der größten Momenten-Summe senkrecht steht, ist daher die Summe der (statischen) Momente aller auf sie projicirten Kräfte allemal der Null gleich.

D) Nach (I. Th. Geom. §. 1. VII. Nr. 7.) ist

4) $\cos \nu'_0 = \cos \nu_0 \cdot \cos Z'OZ + \cos \mu_0 \cdot \cos Z'OY + \cos \lambda_0 \cdot \cos Z'OX.$

Multiplizirt man daher diese Gleichung mit Q_0 und substituirt man zugleich statt $Q_0 \cdot \cos \nu'_0$, $Q_0 \cdot \cos \nu_0$, ꝛc. ꝛc. ihre Werthe aus (1. und 2.), so ergiebt sich

5) $L' = L \cdot \cos Z'OZ + M \cdot \cos Z'OY + N \cdot \cos Z'OX;$

d. h. „die Momenten-Summe L' in irgend einer neuen Ebene „$X'OY'$ findet man, wenn man die Momenten-Summen L, „M, N in drei auf einander senkrecht stehenden Koordinaten-„Ebenen bezüglich mit den Kosinussen der Winkel multiplizirt, „welche jede dieser letztern Ebenen mit der neuen Ebene $X'OY'$ „macht (oder richtiger, die Momenten-Summe L' um irgend „eine neue Momenten-Axe OZ' findet man, wenn man die Mo-„menten-Summen L, M, N um die drei auf einander senkrech-„ten Momenten-Axen OZ, OY, OX bezüglich mit den Kosi-„nussen der Winkel multiplizirt, welche die positiven Seiten die-„ser Axen mit der Axe OZ' machen), zuletzt aber die drei Produkte „addirt.“ (Vergl. I. Th. Mech. §. 16., wo der analoge Satz für Kräfte entwikkelt steht.)

E) In (A. B. C. und D.) ist vorausgesetzt worden, daß das Centrum O der Momente immer ein und dasselbe bleibt,

d. h. daß die Momenten-Axen alle durch einen und denselben Punkt O hindurchgehen. — Vergleichen wir nun die Momenten-Summen der angreifenden n Kräfte mit einander, welche zu verschiedenen Centris O und O′ gehören.

Nimmt man das neue Centrum O′ der Momente in der Richtung der durch O gehenden Versammlungs-Kraft, so ändern sich die Ebene und das Moment Q_0 des mittlern Gegen-Paares, d. h. die Ebene der größten Momenten-Summe, so wie diese größte Momenten-Summe Q_0 selbst nicht, nach (§. 32. Nr. 2.).

So wie aber das neue Centrum O′ der Momente, der Central-Axe des angegriffenen festen Systems näher rückt, wird die größte Momenten-Summe Q_0 immer kleiner (bleibt aber immer die größeste, gegen die für dasselbe neue Centrum O′ genommenen Momenten-Summen in den Ebenen, welche durch denselben Punkt O′ gelegt sind, aber nicht mit der Ebene des zum Versammlungs-Punkt O′ gehörigen mittlern Gegen-Paares zusammenfallen); und die Ebene dieser zu O′ gehörigen größten Momenten-Summe macht mit der Central-Axe immer größere Winkel. Wenn aber endlich das neue Centrum O′ in der Central-Axe selbst genommen wird, so steht die Ebene der größten zugehörigen Momenten-Summe auf der Central-Axe senkrecht, und die größte Momenten-Summe Q'_0 selbst ist dann ein Kleinstes, d. h. die kleinste, in Bezug auf alle größten Momenten-Summen, welche zu andern außerhalb der Central-Axe des angegriffenen festen Systems liegenden Centris der Momente gehören.

Für alle Centra, welche in einer mit der Central-Axe parallelen Geraden liegen, behält die Ebene der größten Momenten-Summe, und die größte Momenten-Summe selbst allemal einen und denselben Werth, nach (§. 32.).

Für alle Centra, welche rings herum von der Central-Axe gleich weit abstehen, behält die größte Momenten-Summe einen und denselben Werth; die Ebene der größten Momenten-Summe macht mit der Ebene der kleinsten größten Momenten-Summe

allemal einen und denſelben Winkel; die abſolute Lage dieſer Ebenen der größten Momenten-Summe ändert ſich dagegen, in ſo ferne die Axen dieſer Ebenen, wenn man ſie alle durch einen beliebigen Punkt der Central-Axe gehen läßt, die Oberfläche eines normalen Kegels bilden, deſſen Axe die Central-Axe iſt; nach (§. 32.).

Die Statik fester Körper.

Viertes Kapitel.

Einige spezielle Fälle der allgemeinsten Aufgabe.

Vorerinnerung.

Obgleich mit der allgemeinsten Aufgabe des (§. 26.) und mit den Untersuchungen darüber im (§. 29.) das Wesentlichste der Statik fester Körper abgeschlossen und beendigt ist, so ist es doch bequem, einige besondere Fälle noch besonders betrachtet und die Resultate für sie besonders niedergelegt zu haben. Namentlich heben sich zwei Fälle hervor, welche in den Anwendungen beständig wiederkehren, nämlich:

a) wenn die Richtungen aller auf ein festes System einwirkenden Kräfte in einer und derselben Ebene liegen, — und

b) wenn die Richtungen aller Kräfte zwar nicht in einer und derselben Ebene liegen, aber doch alle mit einander parallel laufen.

Wie sich nun die Resultate für diese beiden besonderen Fälle einfacher gestalten, als im allgemeinen Fall, und wie sie für die praktischen Anwendungen am bequemsten hingestellt werden, dies mag das laufende Kapitel in's Besondere noch nachweisen.

Erste Abtheilung.

Wenn mehrere Kräfte ein festes System angreifen, deren Richtungen alle in einer und derselben Ebene liegen.

§. 35.

Liegen die Richtungen der n Kräfte P_1, P_2 ... P_n des (§. 26.), welche ein festes System angreifen, alle in einer und

derſelben Ebene (übrigens zum Theil, oder alle, oder nicht zweie derſelben mit einander parallel), ſo kann man bei dem Verfahren des (§. 26.) den Verſammlungs-Punkt O aller Kräfte irgend wo in derſelben Ebene ſelbſt wählen. Die Verſammlungs-Kraft P_0 in O liegt dann in derſelben Ebene, und wird nach (I. Th. Mech. §. 14.) gefunden, wenn nicht die in O verſammelten Kräfte einander unbedingt das Gleichgewicht halten. Die n nach (§. 26.) hinzutretenden Gegen-Paare liegen ebenfalls alle in derſelben Ebene, und vereinigen ſich ſogleich in ein einziges, deſſen Moment nach (§. 21. und §. 17.) der Summe L der ſtatiſchen Momente aller Kräfte in Bezug auf den Punkt O als Centrum der Momente genommen, gleich iſt. Dieſelben n Gegen-Paare halten ſich aber einander unbedingt im Gleichgewicht, wenn letztere Summe L der ſtatiſchen Momente $= 0$ ſeyn ſollte; wiederum nach (§. 17.).

1) Findet nun P_0 am Verſammlungs-Punkte wirklich ſtatt, und iſt auch L nicht Null, ſo vereinigt ſich die Verſammlungs-Kraft P_0 an O, und das mittlere Gegen-Paar, deſſen Moment L iſt, nach (§. 26. Nr. 1.) ſogleich in eine einzige mittlere Kraft, welche der Größe nach der Verſammlungs-Kraft P_0 an O gleich, mit letzterer in derſelben Ebene parallel und von O um $\pm p_0$ entfernt liegt, ſo daß

$$P_0 \cdot p_0 = L$$

iſt. — „Die einzige mittlere Kraft iſt alſo der Größe und Lage „nach immer ſo, daß das ſtatiſche Moment der mittlern Kraft „P_0, der Summe L der ſtatiſchen Momente der n gegebenen „Kräfte (alle Momente in Bezug auf ein und daſſelbe beliebig „gewählte Centrum O der Momente genommen) gleich iſt." — Daſſelbe Reſultat iſt bereits im (§. 9. Anmerk. 1. A. ⊙) angeführt.

2) Exiſtirt P_0 an O, iſt aber $L = 0$, ſo geht die einzige mittlere Kraft durch den zum Verſammlungs-Punkt der Kräfte gewählten Punkt O ſelbſt, und iſt daher von der Verſammlungs-Kraft durch gar nichts mehr verſchieden.

3) Halten ſich dagegen die in O verſammelten n Kräfte

einander im unbedingten Gleichgewicht, ohne daß jedoch L = 0 ist, d. h. ohne daß sich die n Gegen-Paare einander das Gleichgewicht halten, so existirt dasmal keine einzige Kraft, sondern ein mittleres Gegen-Paar, welches in derselben Ebene beliebig wo gedacht werden kann, dessen Moment L ist, und dessen Richtung aus dem positiven oder negativen Werth von L erkannt wird (§. 11. und §. 17.).

4) Halten sich endlich die n Kräfte am Versammlungs-Punkte O einander unbedingt das Gleichgewicht, und ist zu gleicher Zeit L = 0, d. h. halten sich auch die n Gegen-Paare einander unbedingt das Gleichgewicht, so sind nur dann, aber dann auch allemal, alle n gegebenen Kräfte mit einander unbedingt im Gleichgewicht.

§. 36.

Berechnung.

I. Legt man daher durch den beliebig gewählten Versammlungs-Punkt O zwei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX und OY, und sind $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \cdots \alpha_n, \beta_n$ die Winkel, welche die gegebenen Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ mit diesen Axen machen, so wie $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_n, y_n$ die Koordinaten-Werthe ihrer Angriffs-Punkte; — so findet sich nach und nach, wenn P_0 die gesuchte Versammlungs-Kraft ist, und α_0, β_0 die Winkel vorstellen, welche ihre Richtung mit den Koordinaten-Axen OX, OY macht, nach (I. Th. Mech. §. 14.)

1) $X = \Sigma(P \cdot \cos\alpha)$; 2) $Y = \Sigma(P \cdot \cos\beta)$;

3) $P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2}$;

4) $\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}$ und $\cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0}$;

wodurch die Größe der Versammlungs-Kraft P_0 an O und auch ihre Lage gegen die Koordinaten-Axen gefunden ist.

Zuletzt findet sich noch das Moment L des mittlern Gegen-Paares, d. h. die Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf das Centrum O, dadurch am bequemsten,

daß man jede Kraft P an ihrem Angriffs-Punkte, parallel mit den Axen in die beiden Seiten-Kräfte $P \cdot \cos\alpha$ und $P \cdot \cos\beta$ zerlegt, und dann die Summe der statischen Momente aller 2n Kräfte angiebt. Dadurch findet man sogleich

5) $$L = \Sigma P(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta).$$

Die einzige mittlere Kraft, in welche sich alle n Kräfte vereinigen, ist daher der Größe nach und hinsichtlich ihrer Lage gegen die Axen in den (Nr. 3. u. 4.) gefunden. Hinsichtlich ihres Abstandes $\pm p_0$ vom Anfangs-Punkte O der Koordinaten ist sie aber gegeben durch die Gleichung

6) $$P_0 \cdot p_0 = L, \text{ oder } P_0 \cdot p_0 = \Sigma P(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta),$$

während diese Kraft P_0 auf der einen oder der andern Seite des Punktes O genommen werden muß, nämlich jedesmal so, daß diese Kraft P_0 in der als positiv oder negativ angenommenen Richtung um O herum drehen will, je nachdem sich die Summe L der Momente positiv oder negativ ausrechnet.

Denkt man sich die mittlere Kraft P_0 an einem ihrer Punkte, dessen Koordinaten-Werthe x_0 und y_0 seyn mögen, selbst wieder in die beiden Seiten-Kräfte X oder $P_0 \cdot \cos\alpha_0$ und Y oder $P_0 \cdot \cos\beta_0$ zerlegt, so ist das statische Moment $P_0 \cdot p_0$ dieser mittlern Kraft wieder gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seiten-Kräfte, nach (§. 9.), nämlich

$$P_0 \cdot p_0 = P_0 \cdot (y_0 \cdot \cos\alpha_0 - x_0 \cdot \cos\beta_0), \text{ oder } P_0 \cdot p_0 = X \cdot y_0 - Y \cdot x_0.$$

Substituirt man diesen Werth statt $P_0 \cdot p_0$ in die Gleichung (6.), so hat man

7) $$Y \cdot x_0 - X \cdot y_0 + L = 0$$

für die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x_0, y_0 eines jeden beliebigen Punktes (also aller Punkte) der gesuchten einzigen mittlern Kraft P_0.

Diese Gleichung (7.) ist also die Gleichung der Geraden, in welcher die mittlere Kraft P_0 wirkt. Sie giebt aber nicht den Sinn, in welchem diese Kraft wirkt; letzterer muß daher aus den, in (4.) gefundenen Winkeln, oder wenigstens aus dem po-

sitiven oder negativen Werthe von X und Y in den Zählern dieser Ausdrücke (für $\cos\alpha_0$ und $\cos\beta_0$) entnommen werden *).

II. Die n gegebenen Kräfte sind dagegen nach (§. 35. Nr. 4.) im unbedingten Gleichgewicht, so oft

1) $X = 0$, 2) $Y = 0$ und 3) $L = 0$,

d. h. so oft

I. $\Sigma(P\cdot\cos\alpha) = 0$; II. $\Sigma(P\cdot\cos\beta) = 0$;

III. $\Sigma P\cdot(y\cdot\cos\alpha - x\cdot\cos\beta) = 0$

ist; und diese drei Gleichungen sind zum (unbedingten) Gleichgewicht nothwendig und ausreichend **).

III. Weil aber das Gleichgewicht nach (§. 35. Nr. 4.) bloß davon abhängt, daß die im beliebig gewählten Punkt O versammelten Kräfte allein, und auch die zu diesem Versammlungs-Punkte O gehörigen Gegen-Paare allein, sich im unbedingten Gleichgewicht erhalten; und da ferner nach (I. Th. Mech. §. 30.) alle Kräfte, die in einer Ebene liegen und einen Punkt O angreifen, im Gleichgewicht sind, so oft zwei mal, und zwar in Bezug auf zwei Centra, die nicht alle beide mit O in derselben Geraden liegen, die Summe der statischen Momente der Kräfte, der Null gleich ist, so folgt auch noch:

„daß die hier vorausgesetzten n Kräfte, (deren Richtungen alle „in einer und derselben Ebene liegen, und) die ein festes Sy-

*) Dies alles hätte man aber auch aus der Betrachtung der allgemeinen Aufgabe des (§. 26.) und den zugehörigen Resultaten und Rechnungen der (§. 29. und §. 33. Nr. 8. oder 9.) ohne weiteres erhalten, wenn man hier, wie dort, drei Koordinaten-Ebenen gedacht, die Ebene XOY aber mit der Ebene der Kräfte hätte zusammenfallen lassen. Dann wären nämlich alle Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \ldots = 90°$, alle ihre Kosinusse $= 0$ gewesen; also wäre auch $\cos\gamma_0 = 0$, d. h. $\gamma_0 = 90°$ geworden, ferner wären alle $z_1, z_2, \ldots z_n$ der Null gleich gewesen; folglich wäre, weil jetzt auch $P_0\cdot\cos\gamma_0 = 0$ ist, $M = 0$, $N = 0$, dagegen das dortige L genau das hiesige L geworden; und so findet sich der Uebergang jenes allgemeinsten Falles zu den hiesigen Resultaten unmittelbar.

**) Man vergleiche diese Resultate mit denen, die im (I. Kap. Anm. 1. zu §. 9.) gefunden sind, und man wird die völlige Uebereinstimmung derselben sogleich wahrnehmen.

daß man jede Kraft P an ihren Angriffs-Punkte, parallel mit den Axen in die beiden Seiten-Kräfte $P\cdot\cos\alpha$ und $P\cdot\cos\beta$ zerlegt, und dann die Summe der statischen Momente aller 2n Kräfte angiebt. Dadurch findet man sogleich

5) $$L = \Sigma P(y\cdot\cos\alpha - x\cdot\cos\beta).$$

Die einzige mittlere Kraft, in welche sich alle n Kräfte vereinigen, ist daher der Größe nach und hinsichtlich ihrer Lage gegen die Axen in den (Nr. 3. u. 4.) gefunden. Hinsichtlich ihres Abstandes $\pm p_0$ vom Anfangs-Punkte O der Koordinaten ist sie aber gegeben durch die Gleichung

6) $P_0\cdot p_0 = L$, oder $P_0\cdot p_0 = \Sigma P(y\cdot\cos\alpha - x\cdot\cos\beta)$,

während diese Kraft P_0 auf der einen oder der andern Seite des Punktes O genommen werden muß, nämlich jedesmal so, daß diese Kraft P_0 in der als positiv oder negativ angenommenen Richtung um O herum drehen will, je nachdem sich die Summe L der Momente positiv oder negativ ausrechnet.

Denkt man sich die mittlere Kraft P_0 an einem ihrer Punkte, dessen Koordinaten-Werthe x_0 und y_0 seyn mögen, selbst wieder in die beiden Seiten-Kräfte X oder $P_0\cdot\cos\alpha_0$ und Y oder $P_0\cdot\cos\beta_0$ zerlegt, so ist das statische Moment $P_0\cdot p_0$ dieser mittlern Kraft wieder gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seiten-Kräfte, nach (§. 9.), nämlich

$$P_0\cdot p_0 = P_0\cdot(y_0\cdot\cos\alpha_0 - x_0\cdot\cos\beta_0), \text{ oder } P_0\cdot p_0 = X\cdot y_0 - Y\cdot x_0.$$

Substituirt man diesen Werth statt $P_0\cdot p_0$ in die Gleichung (6.), so hat man

7) $$Y\cdot x_0 - X\cdot y_0 + L = 0$$

für die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x_0, y_0 eines jeden beliebigen Punktes (also aller Punkte) der gesuchten einzigen mittlern Kraft P_0.

Diese Gleichung (7.) ist also die Gleichung der Geraden, in welcher die mittlere Kraft P_0 wirkt. Sie giebt aber nicht den Sinn, in welchem diese Kraft wirkt; letzterer muß daher aus den, in (4.) gefundenen Winkeln, oder wenigstens aus dem po-

ſitiven oder negativen Werthe von X und Y in den Zählern dieſer Ausdrücke (für $\cos\alpha_0$ und $\cos\beta_0$) entnommen werden *).

II. Die n gegebenen Kräfte ſind dagegen nach (§. 35. Nr. 4.) im unbedingten Gleichgewicht, ſo oft

1) $X = 0$, 2) $Y = 0$ und 3) $L = 0$,

d. h. ſo oft

I. $\Sigma(P\cdot\cos\alpha) = 0$; II. $\Sigma(P\cdot\cos\beta) = 0$;

III. $\Sigma P\cdot(y\cdot\cos\alpha - x\cdot\cos\beta) = 0$

iſt; und dieſe drei Gleichungen ſind zum (unbedingten) Gleichgewicht nothwendig und ausreichend **).

III. Weil aber das Gleichgewicht nach (§. 35. Nr. 4.) bloß davon abhängt, daß die im beliebig gewählten Punkt O verſammelten Kräfte allein, und auch die zu dieſem Verſammlungs-Punkte O gehörigen Gegen-Paare allein, ſich im unbedingten Gleichgewicht erhalten; und da ferner nach (I. Th. Mech. §. 30.) alle Kräfte, die in einer Ebene liegen und einen Punkt O angreifen, im Gleichgewicht ſind, ſo oft zwei mal, und zwar in Bezug auf zwei Centra, die nicht alle beide mit O in derſelben Geraden liegen, die Summe der ſtatiſchen Momente der Kräfte, der Null gleich iſt, ſo folgt auch noch:

„daß die hier vorausgeſetzten n Kräfte, (deren Richtungen alle „in einer und derſelben Ebene liegen, und) die ein feſtes Sy-

*) Dies alles hätte man aber auch aus der Betrachtung der allgemeinen Aufgabe des (§. 26.) und den zugehörigen Reſultaten und Rechnungen der (§. 29. und §. 33. Nr. 8. oder 9.) ohne weiteres erhalten, wenn man hier, wie dort, drei Koordinaten-Ebenen gedacht, die Ebene XOY aber mit der Ebene der Kräfte hätte zuſammenfallen laſſen. Dann wären nämlich alle Winkel γ_1, γ_2, ꝛc. ꝛc. $= 90°$, alle ihre Koſinuſſe $= 0$ geweſen; alſo wäre auch $\cos\gamma_0 = 0$, d. h. $\gamma_0 = 90°$ geworden, ferner wären alle $z_1, z_2, \cdots z_n$ der Null gleich geweſen; folglich wäre, weil jetzt auch $P_0\cdot\cos\gamma_0 = 0$ iſt, $M = 0$, $N = 0$, dagegen das dortige L genau das hieſige L geworden; und ſo findet ſich der Uebergang jenes allgemeinſten Falles zu den hieſigen Reſultaten unmittelbar.

**) Man vergleiche dieſe Reſultate mit denen, die im (I. Kap. Anm. 1. zu §. 9.) gefunden ſind, und man wird die völlige Uebereinſtimmung derſelben ſogleich wahrnehmen.

„stem angreifen, im unbedingten Gleichgewicht sind, so oft „die Summe der statischen Momente der Kräfte drei mal der „Null gleich ist, und zwar in Bezug auf drei beliebig ge„wählte, aber nicht in einer und derselben Geraden liegende „Centra der Momente *)."

Zweite Abtheilung.

Theorie der parallelen Kräfte im Raume. Bestimmung des Central-Punktes paralleler Kräfte.

§. 37.

Sind die n Kräfte des (§. 26.), welche das feste System angreifen, zwar beliebig im Raume, aber alle unter sich parallel, und nimmt man irgend einen Versammlungs-Punkt O an, so fallen daselbst alle Kräfte in eine und dieselbe Richtung zusammen. Die Versammlungs-Kraft P_0 an O ist daher der Summe aller parallelen Kräfte gleich, wenn man, was wir bei den parallelen Kräften allemal thun wollen, diejenigen negativ in Rechnung bringt, welche im entgegengesetzten Sinne derer wirken, die man als positive Zahlen in Rechnung gebracht hat; — so wieder, daß $P_0 = 0$ anzeigt, daß diese an O versammelten Kräfte einander unbedingt das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich nun eine Ebene E senkrecht auf die Richtungen der parallelen Kräfte, so stehen die n nach (§. 23. oder nach §. 26.) noch hinzutretenden Gegen-Paare alle auf dieser Ebene E senkrecht; sie vereinigen sich daher, wenn sie sich nicht unbedingt das Gleichgewicht halten, allemal in ein mittleres Gegen-Paar, dessen Ebene ebenfalls auf der Ebene E senkrecht steht, und dessen Moment Q_0 nach (§. 20.) gefunden wird.

1)

*) Die dritte dieser Gleichungen ist nämlich die $L = 0$, während L die Summe der statischen Momente ist in Bezug auf O als Centrum der Momente genommen, wobei jedoch der Punkt O selbst wieder jeder beliebige Punkt seyn kann.

1) Existirt nun P_0 und auch Q_0, so liegt hier doch allemal die Richtung der Versammlungs-Kraft P_0 in der Ebene des Gegen-Paares Q_0. Also vereinigen sich nach (§. 25.) diese parallelen Kräfte jetzt allemal in eine einzige mittlere Kraft, welche der Größe nach ebenfalls $= P_0$ ist, in der Ebene des Gegen-Paares mit der Versammlungs-Kraft an O parallel läuft, und vom Versammlungs-Punkte O um $\pm p_0$ abliegt, so aber, daß

$$P_0 \cdot p_0 = Q_0$$

ist, nach (§. 26. Nr. 1.).

2) Ist aber $Q_0 = 0$, dagegen nicht P_0 der Null gleich, so ist die Versammlungs-Kraft P_0 an O zu gleicher Zeit ganz genau in jeder Beziehung die existirende einzige mittlere Kraft.

3) Ist $P_0 = 0$, aber nicht Q_0 der Null gleich, so drückt dieses, seiner Axe, seinem Momente und seiner Richtung nach bekannte Gegen-Paar Q_0 ganz allein die Gesammt-Wirkung aller n Kräfte aus. Auch existirt dann keine einzige mittlere Kraft.

4) Ist endlich $P_0 \neq 0$, und auch $Q_0 = 0$, so sind nun erst, aber nun auch allemal, die gegebenen n Kräfte mit einander im unbedingten Gleichgewicht.

§. 38.

Verfolgt man das so eben Gesagte durch Rechnung direkt, so werden die Rechnungen hier einfacher, als die des (§. 29.) für den allgemeinsten Fall unserer statischen Aufgabe werden konnten. Weil aber die Resultate des (§. 29.) auch hier gelten müssen, so wollen wir eine neue Rechnung nicht weiter vornehmen, sondern bloß geradezu die Resultate der (§§. 26. 29.) hier benützen.

A. Wir legen aber hier die Koordinaten-Ebene XOY senkrecht auf die Richtungen der parallelen Kräfte, so daß OZ beliebig wo, aber parallel mit den parallelen Kräften liegt; und man hat nun

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n &= 90^\circ \\ \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n &= 90^\circ \end{aligned}\right\}$$ also die Kosinusse aller dieser Winkel der Null gleich.

Anmerk. Liegen die parallelen Kräfte mit ihren Richtungen alle in einer und derselben Ebene, so ist es bequemer, diese Ebene zur Ebene XOY zu nehmen, und die Axe OX senkrecht auf die Richtungen der Kräfte. Man hat dann

$$X = 0, \quad Y = \Sigma(P), \quad Z = 0,$$

$$L = -\Sigma(P \cdot x), \quad M = 0 \text{ und } N = 0;$$

und die Gleichungen (Nr. 8. oder Nr. 9. des §. 33.) für die Richtung der mittlern Kraft, welche der Größe nach immer $= \Sigma(P)$ ist, fallen nun in die einzige

$$(\odot) \cdots \qquad x_0 \cdot \Sigma(P) = \Sigma(P \cdot x)$$

zusammen, d. h. „das statische Moment der mittlern Kraft $\Sigma(P)$ „ist der Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte „gleich, wenn das Centrum O der Momente beliebig wo in der „Ebene der Kräfte genommen wird."

Dieser spezielle Fall der parallelen Kräfte ist natürlich auch in dem Falle enthalten, den wir in den (§§. 35. und 36.) behandelt haben, so daß die dortigen Resultate hier angewandt werden können, und natürlich mit den hiesigen wieder übereinstimmen müssen.

§. 39.

Vom Central-Punkt der parallelen Kräfte.

Wenn ein festes System von n parallelen Kräften angegriffen wird, die eine einzige mittlere Kraft wirklich haben, und man ändert die Richtung der parallelen Kräfte gegen das feste System ab, jedoch so, daß die Kräfte wieder dieselben, unter sich parallel sind, und auch genau dieselben Angriffs-Punkte behalten, so haben sie abermals eine mittlere Kraft, die mit der jetzigen neuen Lage der parallelen Kräfte parallel läuft, und deren Richtung im festen System wiederum eine bestimmte Stelle einnimmt *).

*) Nach (§. 32.) ist die bestimmte Stelle, welche die Richtung der einzigen mittlern Kraft, wenn eine solche existirt, allemal einnimmt, diejenige Linie, welche im (§. 33.) in dem allgemeinern Begriff der Central-Axe enthalten ist.

Es entsteht nun die Frage, ob beide bestimmte Richtungen der mittlern Kräfte in einer und derselben Ebene liegen, folglich sich schneiden werden, oder nicht; und wenn sie sich schneiden, welches Gesetz diese Durchschnitts-Punkte befolgen, wenn die Lage der parallelen Kräfte gegen das feste System immer anders und anders gedacht wird.

Um diese Frage zu beantworten, behalten wir erstlich die Annahme des (§. 38.) bei, also die Gleichungen (B. II. III.) daselbst, für die Richtung der erstern mittlern Kraft P_0. — Aendern wir nun die Lage der parallelen Kräfte gegen die mit dem festen System fest gedachten Koordinaten-Axen, und sind α, β, γ die Winkel, welche sie in dieser neuen Lage mit den drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ machen, so hat man bei dieser Annahme

$$X = \cos\alpha \cdot \Sigma(P); \quad Y = \cos\beta \cdot \Sigma(P); \quad Z = \cos\gamma \cdot \Sigma(P)$$

und

$$L = \cos\alpha \cdot \Sigma(P \cdot y) - \cos\beta \cdot \Sigma(P \cdot x),$$
$$M = \cos\gamma \cdot \Sigma(P \cdot x) - \cos\alpha \cdot \Sigma(P \cdot z),$$
$$N = \cos\beta \cdot \Sigma(P \cdot z) - \cos\gamma \cdot \Sigma(P \cdot y).$$

Die Gleichungen (Nr. 8. oder Nr. 9. des §. 33.) für die Richtung dieser neuen mittlern Kraft sind daher, wenn x_0, y_0, z_0 wiederum die Koordinaten-Werthe eines beliebigen ihrer Punkte vorstellen,

1) $[\cos\alpha \cdot y_0 - \cos\beta \cdot x_0] \cdot \Sigma(P) = \cos\alpha \cdot \Sigma(P \cdot y) - \cos\beta \cdot \Sigma(P \cdot x)$,

2) $[\cos\gamma \cdot x_0 - \cos\alpha \cdot z_0] \cdot \Sigma(P) = \cos\gamma \cdot \Sigma(P \cdot x) - \cos\alpha \cdot \Sigma(P \cdot z)$,

3) $[\cos\beta \cdot z_0 - \cos\gamma \cdot y_0] \cdot \Sigma(P) = \cos\beta \cdot \Sigma(P \cdot z) - \cos\gamma \cdot \Sigma(P \cdot y)$,

von denen jedoch zweie ausreichen, um die Richtung der mittlern Kraft vollständig zu geben, weil die dritte jedesmal nur eine algebraische Folgerung aus den beiden andern ist.

Haben nun die Richtungen der beiden mittlern Kräfte, wie solche durch die Gleichungen (§. 38. B. II. III.) und durch die vorliegenden Gleichungen (1. — 3.) gegeben sind, einen gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt, dessen Koordinaten-Werthe gerade durch x_0, y_0 und z_0 vorgestellt seyn sollen, so müssen letztere die so eben genannten fünf Gleichungen alle zugleich iden-

tisch machen, oder wenigstens die (II. III. B. des §. 38.) und irgend zweie, z. B. die (2. und 3.) der hiesigen drei Gleichungen (1. — 3.).

Findet man aber aus dreien dieser vier Gleichungen, z. B. aus (II. III. B. des §. 38.) und aus der hiesigen (3.), die drei Werthe x_0, y_0 und z_0, so erhält man zu ihrer Bestimmung

I. $\quad x_0 \cdot \Sigma(P) = \Sigma(P \cdot x)$,

II. $\quad y_0 \cdot \Sigma(P) = \Sigma(P \cdot y)$,

und III. $\quad z_0 \cdot \Sigma(P) = \Sigma(P \cdot z)$;

und da diese Werthe auch, wie man sich sogleich überzeugt, der vierten (und dann natürlich auch der fünften) Gleichung genügen, so schneiden sich nicht nur die beiden Richtungen der jedesmaligen mittlern Kraft wirklich, sondern die Koordinaten-Werthe ihres Durchschnitts-Punktes sind bestimmt und gegeben durch die vorliegenden Gleichungen (I. — III.).

Weil aber diese Gleichungen (I. — III.) die Winkel α, β, γ gar nicht mehr enthalten, so bleibt der Durchschnitts-Punkt der mittlern Kräfte allemal ein und derselbe, wie man auch die Lage der parallelen Kräfte gegen das feste System nur immer verändert nehmen mag, wenn nur die Angriffs-Punkte dieselben bleiben.

Also schneiden sich, man mag die Lage der parallelen Kräfte abändern so oft, und wie man nur immer will, die jedesmaligen mittlern Kräfte (wenn überhaupt eine solche einmal existirt), also die jedesmaligen Central-Axen des angegriffenen festen Systems in einem und demselben Punkte.

Diesen, durch die Gleichungen (I. — III.) gegebenen Punkt, nennen wir den Central-Punkt der parallelen Kräfte*). — Er existirt immer, so oft überhaupt die parallelen Kräfte eine einzige mittlere Kraft zulassen; er ist deshalb so wichtig, weil er zum Angriffs-Punkt der mittlern Kraft gewählt werden kann, und als solcher immer derselbe bleibt, wie auch die Lage

*) Werden die wirkenden parallelen Kräfte alle einander und der Schwerkraft g-dt gleich, so heißt dieser Central-Punkt in diesem besondern Falle der Schwer-Punkt des festen Systems.

der angreifenden parallelen Kräfte gegen das von ihnen angegriffene feste System nur immer sich abändern mag *). — Hat man daher diesen Central-Punkt der parallelen Kräfte gefunden, so bringt man in ihm die Kraft $\Sigma(P)$ parallel mit den parallelen Kräften an, und man hat die mittlere Kraft ihrer Lage, Größe und ihrem Angriffs-Punkte nach, also ganz und vollständig bestimmt.

Anmerk. Da in der Untersuchung des (§. 9. B.) der dortige Punkt A_0 unabhängig gefunden wird von dem Winkel, welchen die Richtung der parallelen Kräfte mit der Linie A_1A_2 machen, so ist A_0 daselbst der Central-Punkt der parallelen Kräfte P_1 und P_2, welche die Punkte A_1 und A_2 angreifen. Und da in der (Anmerk. 2. zu §. 9.) bei der successiven Vereinigung der parallelen Kräfte jedesmal wieder der Central-Punkt der 3, der 4 und zuletzt der n parallelen Kräfte gefunden wird, so fällt in die Augen, warum die End-Formeln in der (Anm. 2. des §. 9.) für die Koordinaten-Werthe des Angriffs-Punktes der mittlern Kraft genau mit den hiesigen Formeln (§. 39. I. — III.), welche den Central-Punkt der parallelen Kräfte liefern, zusammenfallen.

§. 40.

Von dem Central-Punkt der parallelen Kräfte folgt aus den Formeln (§. 39. I. — III.) sogleich noch:

1) Der Central-Punkt eines angegriffenen festen Systems bleibt derselbe, wenn man statt der parallelen Kräfte die gleich vielfachen, oder die gleich vielten Theile derselben setzt.

2) Liegen die Angriffs-Punkte der parallelen Kräfte in einer und derselben Ebene, die man zur Ebene XOY nehmen kann, so liegt der Central-Punkt in derselben Ebene und ist durch die beiden Gleichungen

*) Dies ist z. B. bei den von der Schwere angegriffenen Körpern der Fall, wenn man den Körper in eine andere Lage gegen die Vertikale bringt.

I. $x_0 \cdot \Sigma(P) = \Sigma(P \cdot x)$

und II. $y_0 \cdot \Sigma(P) = \Sigma(P \cdot y)$

völlig bestimmt.

3) Liegen aber die Angriffs-Punkte der parallelen Kräfte alle in einer und derselben Geraden, die man zur Axe OX nehmen kann, so liegt der Central-Punkt in derselben Geraden, und ist durch die einzige Gleichung

$(\odot) \cdots \quad x_0 \cdot \Sigma(P) = \Sigma(P \cdot x)$

völlig bestimmt.

Die Statik fester Körper.

Fünftes Kapitel.

Materie. Masse. Volumen. Dichtigkeit. Attraktion. Schwere. Gewicht. Specifisches Gewicht*).

§. 41.

Unter materiellen Atomen verstehen wir hier entweder unendlich-kleine oder kleinste Theilchen der Schöpfung, welche mit der Eigenschaft begabt sind, daß jeder für jeden eine Kraft ist, die in der Richtung zwischen beiden auf jeden gleichmäßig wirkt, um sie beide gegen einander zu bewegen, — und welche ihre Wirkung äußert, es mögen die Atome in Ruhe seyn oder in Bewegung.

Diese Kraft selber, welche zwei materielle Atome auf einander ausüben, nennt man die Anziehungs-Kraft oder die Attraktion. Denkt man sich solche von der Entfernung der beiden Atome abhängig und so, daß sie wächst, wenn die Entfernung abnimmt, so kann sie, wenn die Atome einander ganz nahe rücken, so groß werden, daß durch sie zugleich die Möglichkeit eines (materiellen) festen Körpers im Sinne des (§. 1.) gegeben ist **). —

*) Anfänger können die nächsten drei Kapitel überschlagen und später vornehmen.

**) In der Physik unterscheidet man noch die Molecular-Attraktion von der allgemeinen. Wir lassen hier diesen Unterschied bei Seite

Dieſe Attraktion müſſen wir uns übrigens nach (I. Th. Mech. §. 31.) immer unendlich-klein denken, nämlich $= f_u \cdot dt$, wo f_u irgend eine Funktion der Entfernung u der beiden Atome von einander vorſtellt. Aber auch dieſer Faktor f_u iſt noch unendlich-klein, wie die nächſte Folge lehren wird.

Nach dieſer Definition der materiellen Atome, können übrigens dieſelben verſchiedene oder einerlei Geſtalt, verſchiedene oder dieſelbe Größe haben. Es iſt ihnen nur zur Bedingung gemacht, daß ſie in derſelben Entfernung u von einander auch immer mit derſelben Kraft $f_u \cdot dt$ gegen einander getrieben werden. Fielen daher n ſolche materielle Atome in einen und denſelben Punkt zuſammen, ſo würde die Anziehung dieſes Punktes gegen einen andern Punkt in der Entfernung u, in welchem ſich ein einziger materieller Atom befindet, $= n \cdot f_u \cdot dt$ ſeyn; während dieſelbe Anziehung zwiſchen denſelben beiden Punkten $= m \cdot n \cdot f_u \cdot dt$ ſeyn würde, wenn auch in dem letztern Punkt ſtatt eines einzigen materiellen Atoms, eine Anzahl m derſelben vorhanden ſeyn ſollte.

§. 42.

Unter materieller Linie, Fläche oder Körper verſtehen wir Reihen an einander liegender materieller Atome, welche in einer Linie, Fläche oder in einem Körper-Raume vertheilt ſind. — Dieſe materiellen Linien, Flächen oder Körper werden homogen genannt, wenn gleich große, übrigens noch ſo kleine Raum-Theile derſelben allemal gleichviel materieller Atome enthalten. — Außerdem heißen ſie heterogen.

§. 43.

Die Menge der materiellen Atome, welche eine materielle Linie, eine materielle Fläche, oder ein materieller Körper enthält, nennt man die Maſſe der materiellen Linie, Fläche, oder des materiellen Körpers. — Der Raum-Inhalt eines materiellen Körpers wird dagegen deſſen Volumen genannt. — Das Verhältniß der Maſſe zum Volumen (d. h. der Quozient aus der Maſſe durch das Volumen dividirt, nachdem Maſſe und Volumen vorher durch Zahlen ausgedrückt ſind, die ſich auf beſtimmte Maſſen- und Raum-Einheiten beziehen) heißt die Dichtigkeit eines homogenen Körpers.

---

geſtellt, und haben nur Attraktion im Allgemeinen im Auge, ohne über die Größe oder Natur derſelben etwas vorauszuſetzen.

Bedeuten also M die Masse, V das Volumen eines homogenen materiellen Körpers, und D seine Dichtigkeit, so hat man die Gleichungen

$$\text{I. } D = \frac{M}{V}; \quad \text{II. } M = D \cdot V \quad \text{und} \quad \text{III. } V = \frac{M}{D}.$$

Die Dichtigkeit eines homogenen materiellen Körpers wird daher durch eine absolute Zahl D in Rechnung gebracht, welche völlig bestimmt ist, so oft die Massen-Einheit und die Raum-Einheit gewählt sind. — In den Anwendungen muß man sich daher vor allen Dingen über die Raum-Einheit und über die Massen-Einheit vereinigen, um alles hieher gehörige völlig bestimmt in Zahlen ausdrücken zu können.

Besteht ein materieller Körper aus zwei, drei, oder beliebig viel Theilen, welche verschiedene Dichtigkeiten D', D'', D''', ꝛc. ꝛc. haben, und deren Massen bezüglich M', M'', M''', ꝛc. ꝛc., so wie deren Volumina bezüglich V', V'', V''', ꝛc. ꝛc. sind, so ist die Dichtigkeit D dieses Körpers nach der vorstehenden Definition so, nämlich

$$D = \frac{M' + M'' + M''' + \cdots (= \text{Gesammt-Masse})}{V' + V'' + V''' + \cdots (= \text{Gesammt-Volumen})},$$

$$\text{oder } D = \frac{D' \cdot V' + D'' \cdot V'' + D''' \cdot V''' + \cdots}{V' + V'' + V''' + \cdots};$$

und diese Dichtigkeit D nennt man wohl auch die mittlere Dichtigkeit des Körpers.

§. 44.

Denkt man sich zwei materielle feste Körper E und K in einer bestimmten Lage gegen einander, so wirkt jeder Atom von E auf einen bestimmten Atom α von K nach Maaßgabe der jedesmaligen Lage der Atome und ihrer Entfernungen. Alle diese Anziehungs-Kräfte lassen sich aber in eine einzige mittlere Kraft vereinigen, welche der Größe und Lage nach mittelst des (I. Th. Mech. §. 17.) gefunden wird. Diese heißt dann die Attraktion des ganzen Körpers E auf den Atom α von K.

Diese Attraktionen des Körpers E auf alle die einzelnen Atome des Körpers K lassen sich aber wieder in eine einzige mittlere Kraft vereinigen, welche der Größe und Lage nach mittelst der

(§§. 26. und 29.) gefunden wird, und diese drückt dann die Gesammt-Attraktion der Körper E und K gegen einander aus.

Führt man aber diese Aufgabe für verschiedene Körper von gegebener Gestalt und gegebener gegenseitiger Lage zu einander aus, so behandelt man das „Problem der Attraktionen," mit welchem wir uns im achten Kapitel beschäftigen wollen.

§. 45.

Ist der eine dieser beiden Körper z. B. E, unsere Erde, der andere K aber im Bereiche des Menschen nahe an der Erd-Oberfläche, so ist die Attraktion der ganzen Erde auf jeden einzelnen Atom α des Körpers K: das, was wir die Schwere nennen. Wird solche Kraft durch die Umdrehung der Erde um ihre Axe nach (I. Th. Mech. §. 51.) vermindert, so entsteht die örtliche Schwere, die uns immer zunächst in die Sinne fällt, die wir also unter dem Namen der Schwere schlechtweg beobachten und durch g·dt bezeichnen, und deren Faktor g wir im (I. Th. Mech. §. 51. B. Note) möglichst genau bestimmt gegeben haben. — Die Gesammt-Attraktion der Erde gegen den ganzen Körper K ist dagegen dasjenige, was wir das Gewicht des Körpers nennen.

Die Erfahrungen und Rechnungen nach (§. 26. u. §. 29.) erlauben es, die Richtungen der Schwere bei allen einzelnen Atomen eines solchen ganz nahe an der Erd-Oberfläche befindlichen materiellen Körpers K, unter sich parallel anzunehmen; wir thun dies hier ein für allemal, und nennen diese Richtungen vertikale. Jede auf sie senkrechte Ebene wird Horizontal-Ebene genannt, und jede Linie in einer solchen Ebene heißt Horizontal-Linie.

Das Gewicht eines Körpers ist daher nichts anders als die mittlere Kraft aus allen parallelen Schwer-Kräften aller einzelnen materiellen Atome des Körpers. Solches ist daher der Summe aller dieser Schwer-Kräfte, d. h. dem Produkte aus der (unendlich-kleinen) Schwer-Kraft g·dt des einzelnen ma-

terselben Atoms, mit der (unendlich großen) Anzahl der Atome des Körpers multiplizirt, gleich.

§. 46.

Giebt man dem Körper K nach und nach immer eine andere und andere Lage (an derselben Stelle der Erd-Oberfläche) gegen den Horizont oder gegen die Vertikal-Linien, so haben die die einzelnen Atome derselben angreifenden Schwer-Kräfte g·dt ihre Angriffs-Punkte nicht geändert, auch sind sie noch immer unter sich parallel, und nur ihre Lage gegen den Körper selbst ist geändert. Die mittlere Kraft oder das Gewicht des Körpers ist daher der Größe nach dasselbe, wirkt auch immer noch parallel mit den parallelen Kräften, also in der Richtung der Vertikalen (oder der Schwere), dagegen schneiden sich diese mittleren Kräfte alle in dem Central-Punkt der parallelen Kräfte (§. 39.), und dieser wird nun in's Besondere der Schwer-Punkt genannt.

Die Auffindung des Schwer-Punktes geschieht also genau nach den Formeln des (§. 39.) und des (§. 40.).

§. 47.

Bezeichnen wir durch $n:dt$ oder $\frac{n}{dt}$ die unendlich vielen Atome, welche die Massen-Einheit hat (wo n eine endliche, wenn auch unbekannte Zahl ist), so ist die Anzahl aller Atome, welche in der Masse M stekken,

$$= M \cdot \frac{n}{dt}.$$

Wird nun das Gewicht dieser Masse M durch P bezeichnet, so hat man nach (§. 45. zu Ende)

$$P = n \cdot M \cdot g.$$

Ist p das Gewicht der Massen-Einheit, so folgt hieraus

$$p = n \cdot 1 \cdot g, \text{ oder } n = \frac{P}{g},$$

wodurch die unbekannte Zahl n in das Gewicht p der Massen-Einheit und in die (§. 51. I. B. Note des I. Th. Mech.) bestimmte Zahl g ausgedrückt sich sieht.

Häufig nimmt man statt der Gleichung zwischen der Masse M und ihrem Gewichte P, bloß diese Gleichung

$$\text{I.} \qquad P = M \cdot g \quad \text{und} \quad M = \frac{P}{g},$$

indem man $n = 1$, d. h. $p = g$ sich denkt, d. h. indem man zur Massen-Einheit das gfache der Masse nimmt, welche die Gewichts-Einheit repräsentirt.

Verbindet man mit dieser Gleichung (I.), d. h. mit

$$P = M \cdot g,$$

die Gleichung des (§. 43. II.), nämlich

$$M = D \cdot V,$$

so erhält man noch

$$\text{(II.)} \qquad P = D \cdot V \cdot g,$$

wo V das Volumen des Körpers, D dessen Dichtigkeit und P dessen Gewicht vorstellt, wenn zum Volumen eine beliebige Raum-Einheit, zur Massen-Einheit aber das gfache der Masse genommen wird, welche in der Gewichts-Einheit steckt, und wenn die Dichtigkeit D das Verhältniß ist der Masse zum Volumen, d. h. der Quozient aus den absoluten Zahlen, in welche Masse und Volumen des Körpers ausgedrückt sind, wenn sie auf diese festgestellten Einheiten bezogen werden.

§. 48.

Ist P das Gewicht eines materiellen Körpers, dessen Volumen V und dessen Dichtigkeit D ist; und ist p das Gewicht eines anderen materiellen Körpers, der dasselbe Volumen V, aber die Dichtigkeit d hat, so folgt aus (§. 47. II.)

$$P = D \cdot V \cdot g \quad \text{und} \quad p = d \cdot V \cdot g;$$

folglich ist auch

$$\frac{P}{p} = \frac{D}{d}.$$

Das Verhältniß $\frac{P}{p}$ der Gewichte zweier gleich großen Körper ist also auch das Verhältniß (der Quozient) ihrer Dichtigkeiten. Solches Verhältniß wird aber das spezifische oder eigenthümliche Gewicht des ersten Körpers in Bezug auf den andern genannt.

Setzt man die Dichtigkeit d dieser letzteren Materie der Einheit gleich, d. h. nimmt man die Menge der letzteren Materie, die in der Raum-Einheit steckt, zur Massen-Einheit (so daß für sie $M = V$, also $d = \frac{M}{V} = 1$ wird), so hat man

$$\frac{P}{p} = D;$$

d. h. die Dichtigkeit D des erstern materiellen Körpers ist dann zu gleicher Zeit sein spezifisches Gewicht, in Bezug auf den andern materiellen Körper, dessen Dichtigkeit $= 1$ gesetzt worden ist. —

§. 49.

Wir nehmen hier zur Längen-Einheit den rheinischen oder preußischen Fuß, der sich zum Pariser Fuß verhält, wie 13913 zu 14400; das Quadrat und den Würfel dieses rheinischen Fußes nehmen wir zur Flächen- und Körper-Einheit. — Die Masse reinen (destillirten) Wassers bei 15° Reaum., welche in einem solchen rheinischen Kubikfuß steckt, nehmen wir dagegen zur Massen-Einheit, wenn nicht ausdrücklich (wie z. B. bei der Masse der Planeten) das Gegentheil angegeben ist, so daß wir dadurch die Dichtigkeit dieses reinen Wassers $= 1$ setzen. — Unter spezifischem Gewicht irgend eines Körpers schlechtweg, verstehen wir ferner hier allemal das Verhältniß seines absoluten Gewichtes, zu dem absoluten Gewicht einer, dem Raum-Inhalt nach gleich großen Menge dieses reinen Wassers. — Unter dieser Voraussetzung ist das spezifische Gewicht eines materiellen Körpers eine absolute Zahl, welche zu gleicher Zeit seine Dichtigkeit ausdrückt, sobald die Dichtigkeit

des oben gedachten reinen Wassers = 1; gesetzt worden, nach (§. 48). — Als Gewichts-Einheit nehmen wir ferner, statt des Gewichtes eines rheinischen Kubikfußes dieses reinen Wassers, den 66sten Theil davon, den wir Berliner Pfund oder schlechtweg Pfund nennen und durch das Zeichen ℔ bezeichnen.

Unter diesen Voraussetzungen bleibt genau wahr die Gleichung des (§. 43.), nämlich

I. $$M = D \cdot V,$$

wo M die Masse, V das Volumen und D die Dichtigkeit ist; und zwar unabhängig von der Größe der örtlichen Schwere, für jeden irdischen wie für jeden Himmels-Körper. — Dagegen ändern sich nach diesen geänderten Einheiten die Gleichungen (I. und II. des §. 47.); namentlich wird die dortige $P = D \cdot V \cdot g$ jetzt

II. $$P = 66 \cdot D \cdot V;$$

wo V den Raum-Inhalt (das Volumen) des Körpers in rheinischen Kubikfußen, D sein spezifisches Gewicht, und P sein Gewicht in Berliner Pfunden ausdrückt.

Diese Formel (II.) ist für den Techniker von großer Wichtigkeit, weil sie aus dem Raum-Inhalt, und dem spezifischen Gewicht augenblicklich sein absolutes Gewicht finden läßt; so wie sie umgekehrt auch dazu benutzt werden kann, um aus dem bekannten absoluten Gewicht P und dem spezifischen Gewicht D den Raum-Inhalt des Körpers zu finden *).

Die

*) Sie kann sogar auch dazu dienen, um aus dem bekannten Gewicht P und Volumen V eines Körpers die Dichtigkeit D desselben zu finden; obgleich dieses Verfahren, die Dichtigkeit zu bestimmen, in den seltensten Fällen ein praktisches genannt werden kann.

Der gewöhnlichste Weg, die Dichtigkeit D eines Körpers zu finden, der im Wasser keine Veränderung erleidet, aber doch spezifisch schwerer als Wasser ist, besteht darin, daß man neben seinem Gewicht P (in der Luft) auch noch sein Gewicht P′ findet, wenn er ganz unter Wasser gesetzt ist. Dann ist $P - P'$ sein Gewichts-Verlust im Wasser und zugleich das Gewicht einer eben so großen Menge Wassers. Folglich ist $\frac{P}{P - P'}$ sein spezifisches Gewicht.

Die spezifischen Gewichte der verschiedenen Materien werden aber ein- für allemal durch Anwendung der dazu nöthigen, vorzüglich physikalischen Hilfsmittel aufgefunden. Wir lassen hier eine Tabelle dieser spezifischen Gewichte folgen, welche wir vorzüglich aus Gehler's physikalischem Wörterbuche und Eytelwein's trefflicher „Statik fester Körper" entnehmen. Die Zahlen in dieser, wie in jeder solchen Tabelle, können natürlich nur als Mittel-Werthe angesehen werden, da z. B. die Dichtigkeit eines und desselben Metalles in verschiedenen Stücken verschieden sich zeigt. Der Techniker, welcher nur mit wenigen und immer dieselben bleibenden Materien zu thun haben sollte, wird, wenn ihm größere Genauigkeit wünschenswerth ist, am besten thun, wenn er seine spezifischen Gewichte auf den von der Physik anzugebenden Wegen selbst ausmittelt.

Tafel der spezifischen Gewichte.

A. Feste Körper.

(Das spezifische Gewicht des reinen Wassers ist = 1 gesetzt.)

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Abrikosenholz, vom Stamme, trocken		Albit 2,53	2,630
- 0,711	0,868	Allanit 3,52	4,000
Acazienholz, v. Stamme trocken . . 0,650	0,702	Aluminit 1,66	1,705
Achat	2,590	Ambra, grauer . . .	0,926
Agalmatholith, chines. Speckstein . . 2,785	2,815	- schwärzlicher . . .	0,780
Ahornholz, gemeines, v. Stamme, trocken	0,755	Ametist 2,653	2,785
- virginisches	0,629	Ammoniakgummi . . .	1,207
Alabaster . . . 2,611	2,876	Analcim	2,086
weißer antiker . . .	2,730	Anatas	3,820
Alaun	1,714	Andalusit . . . 3,10	3,160
- Erde 1,20	1,740	Anhydrit 2,70	2,899
- Schiefer, gemeiner 1,805	2,490	Anthophyllit	3,120
- Stein . . . 1,378	2,424	Anthracit . . . 1,40	1,480
- kristallisirt	2,694	Antimon	6,702
		- Blende	4,600
		- Glanz	4,600
		- Oxyd	5,560
		- Silber . . . 9,44	9,820
		Apatit 3,128	3,218

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Apfelbaumholz	0,793	Blätterkohle . . 1,27	1,340
Apaphyllit	2,335	Blättertellur . . 7,00	8,910
Arragonit	2,920	Blasenstein, menschl.	1,700
Arsenige Säure . . .	3,698	Blei, gegossen, englisches . . . 11,324	11,875
Arsenik	5,760	- - deutsches . . .	11,310
- geschmolzen . . .	5,763	- Asche	1,666
- weißer, gemeiner .	3,594	- chromsaures . . .	6,000
- gelber	3,452	- Glanz	7,585
- Kies	6,127	- Hornerz	6,660
- Nickel	7,650	- Kalk	8,940
- Säure	3,698	- Oxyd, verglaset . .	8,010
Asbest, biegsam 0,908	2,444	- phosphorsaures . .	7,090
- gemeiner . 2,500	2,800	- Spath	6,460
- schwimmender 0,680	0,993	- Vitriol	6,309
Asphalt 1,07	1,160	- Weiß	3,156
Augit 3,23	3,340	- Zucker	2,395
Auripigment	3,480	Blende	4,070
Austerschaalen	2,092	Blutkuchen	1,126
Axinit	3,270	Blutstein	4,360
Balsam, peruvianischer	1,150	Bohnenbaum	0,920
Baryt 3,30	4,800	Bolus 1,90	2,050
Baryum	4,000	- armenischer	2,727
Basalt 2,722	2,864	Boracit . . . 2,566	2,911
Benzoe	1,063	Borax	1,720
Bergblau	3,608	- Glas	2,600
Bergkork . . . 0,680	0,993	- Säure, geschmolzen	1,830
Bergkrystall . 2,685	2,880	- - krystallisirt . .	1,479
Bergmehl . . 0,360	1,372	Bournonit	5,790
Bergtheer	1,130	Brasilienholz	1,031
Beryll, Aquamarin 2,250	2,759	Braunkohle	1,280
Bernstein . . . 1,065	1,085	Braunstein . . 3,530	4,116
- Säure	1,350	Brandsteinkiesel . . .	3,600
Bildstein	2,810	Brogniartin . . 2,73	2,800
Bimstein . . . 0,914	1,647	Bronzit . . . 3,201	3,252
Birkenholz, frisch vom Stamme	0,702	Buchenholz (Rothbuchen) vom Stamme, trocken . . . 0,666	0,854
- trocken	0,580	- vom Splint trocken 0,600	0,721
Birnbaumholz, trocken	0,661	Buchsbaumh. franz.	0,912
Bitterkalk	2,878	- holländ.	1,028
Bittersalz	1,750	- brasil.	1,031
Bitterspath	2,926		

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Buntkupfererz	5,000	Diamant, gelber braf.	3,666
Butter	0,942	- grüner	3,524
Cacaobutter	0,892	- orangenrother	3,550
Calomel	5,600	- rosenrother	3,531
Camphechenholz	0,913	- weißer	3,521
Campher	0,986	- Spath . . . 3,71	3,962
Caoutchouc	0,934	Diaspor	3,430
Carniol	2,620	Disthen . . . 3,545	3,676
Cebernh., wildes	0,596	Drachenblut	1,196
- aus Palästina	0,613	Dysodill 1,14	1,250
- indisches	1,315	Ebenholz, amerik.	1,331
- amerikan.	0,561	- indisches	1,209
Cerer (neutr. flüss.)	4,700	- von den Alpen	1,054
Cererit	4,930	- spanisches	0,809
Cerin	0,969	Edingtonit	2,710
Chabasie	2,040	Eibenbaum, holländ.	0,788
Chalcedon (Onyx) 2,207	2,691	- spanisch	0,807
Chinawurzel	1,071	Eichenholz.	
Chrom	5,900	Sommereichen, vom Kern, trocken 0,720	0,795
Chromeisen	4,362	- Kern und Splint, trocken . . 0,618	0,695
Chrysoberyll	3,750	- Splint, trocken	0,610
Chrysolith, gelbgrüner Topas 3,34	3,440	- Stamm, frisch 0,845	0,850
Chrysopras . . 2,479	3,250	- Wurzel, frisch	0,880
Cimolit 2,00	2,180	- Zweige, frisch 0,698	0,780
Citronenholz	0,726	Wintereichen (Steineichen) vom Stamme, frisch . 0,990	1,100
Citronensäure	1,617	- vom Stamme trok- ken 0,724	0,760
Cocusbaumholz	0,726	- von der Wurzel frisch . . . 1,008	1,200
Cölestin	3,858	- Zweige, frisch 0,819	0,832
Copal, durchsichtiger	1,045	Eis, im Mittel	0,950
- undurchsichtiger	1,140	Eisen, gegossen 7,113	7,230
Corallen, rothe	2,689	- geschmiedet.	
- weiße	2,500	- brandenb. Bandeis.	8,189
Cordierit	2,580	- harzer	8,291
Crichtonit	4,000	- schwedisches	8,341
Cronstetit	3,348	- suhler	8,215
Cyanit (blauer Schörl) 3,092	3,622		
Cyprissenholz, span., tr.	0,644		
Dachschiefer . 2,670	3,500		
Datolith 2,85	2,980		
Diamant, blau. orient.	3,525		

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Eisen-Glanz	5,218	Feldspat, glasigter 2,518	2,589
- Kiesel (krystallisirt. Pechstein) . 2,476	3,205	Fergusonit	5,839
- Schlacke	2,855	Fernambuckholz . . .	1,014
- Meteor . . 7,600	7,830	Fett, Ochsen	0,923
- phosphorsaures	2,660	- Schweine	0,937
- Chrom	4,498	- Hammel	0,924
- Oxyd, rothes . . .	5,240	- Kalbs	0,934
- - Hydrat	3,940	Feuerstein . . 2,594	2,700
- Oxydul	3,500	Fieberrinde	0,780
- Sinter 2,20	2,400	Fliederholz	0,770
- Vitriol	1,970	Flußspat . . . 3,094	3,194
Elaterit 0,90	1,230	Franklinit	5,090
Elemi	1,083	Franzosenholz	1,333
Elfenbein . . . 1,825	1,917	Gadolinit	4,230
Elzbeerholz, trocken .	0,879	Gahnit 4,23	4,700
Enzianwurzel	0,800	Gallensteinsäure 0,80	1,000
Epheuharz	1,295	Galläpfel	1,034
Epidot 3,269	3,425	Galmei 3,380	3,524
Epistilbit	2,249	Gelberde	2,240
Erde, lehmigte, festgestampft		Gehlenit	3,020
- frisch	2,063	Glanzerz (Schwefelsilber)	7,000
- trocken	1,929	Glas, grünes	2,642
- Gartenerde, frisch	2,047	- engl. Spiegelgl. .	2,450
- - trocken	1,630	- Krystall . . 2,892	3,000
- trockene, magere .	1,338	- Flint. engl. 3,373	3,442
Erdkobald	2,240	- - franz. . 3,158	3,200
Erdpech	0,902	- Körners	3,341
Erlenholz, v. Stamme, frisch 0,788	0,800	- Frauenhofer's . .	3,779
- v. St. trock. 0,586	0,660	Glaskopf, rother . . .	4,898
- Splint, trck. 0,485	0,574	Glaubersalz	1,470
Eschenholz, v. Stamme, trocken . 0,725	0,845	Glaukolith	2,900
- v. Zweige trocken .	0,734	Glimmer . . . 2,654	2,934
Euklas	3,090	Gmelinit	2,050
Fahlerz 4,79	5,100	Gneis 2,630	2,710
Fahlunit 2,61	2,660	Gold, gediegen 13,00	18,000
Feigenbaumholz . . .	0,690	- gegossen	19,258
Feldspat, gemein. 2,43	2,600	- gehämmert	19,361
- dichter (Feldstein) 2,609	3,389	- Dukaten, holl. . .	19,352
		- franz. zu 22 Karat, gegossen	17,486
		- - geschlagen . . .	17,589

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Gold, guineisches . .	18,888	Hisingerit	3,040
- v. engl. Guineen .	17,629	Holunderholz . 0,695	0,730
Granat, gemein. 3,668	3,757	Holz, fossiles . . 0,20	1,380
- edler . . . 3,839	4,230	Holzkohle . . . 0,280	0,440
Granatbaum	1,354	Holzstein, versteinertes	
Granit, ägypt.	2,654	Holz, Kieselh. 2,045	2,675
- gemeiner . 2,538	2,956	Honig	1,450
Graphit 1,80	2,100	Honigstein . . . 1,58	1,660
Grappwurzel	0,765	Hornbaum (Weißbuche) vom Stamme,	
Guajakharz	1,205	trocken . . . 0,755	0,805
Guajakholz	1,632	Hornblende . 2,922	3,410
Griesholz	1,200	Hornblendeschiefer	
Grobkohle . . . 1,45	1,600	2,909	3,153
Gummi, arab.	1,452	Hornsilber, chlorf. . .	5,550
- guttae	1,482	Hornstein (Felskiesel)	
- lack	1,139	2,532	2,745
- sandrak	1,092	Hühnereier	1,090
- tragant	1,333	Hyazinth 4,35	4,680
Gyps, dichter 1,872	2,964	Hyperstehn	3,390
- faserigter	2,300	Jalappharz	1,218
- körniger . . 2,199	2,310	Jamesonit	5,560
- - sperenberger 2,199	2,266	Jasminholz	0,770
- gebrannter sperenb.	1,810	Jaspis, ägypt. 2,564	2,600
- frisch gegossen. sperenberger	1,292	- gemeiner . 2,580	2,700
- gegoss. ausgetrock.	0,973	Idokras 3,08	3,400
Gypsspat (Fraueneis) 1,761	2,322	Indigo	0,769
- halbdurchsichtiger sperenberg. 1,761	2,322	Jod	4,948
Harmotom	2,390	Iridium	19,500
Harz, d. Fichten . . .	1,073	Ittnerit	2,300
- fossiles	1,046	Kadmium, gegossen .	8,604
Haselnußholz	0,600	- gehämmert	8,694
Hausenblase	1,111	- Oxyd	8,183
Hauyn 2,28	2,833	Kalium	0,865
Heliotrop (grün. Jaspis) 2,620	2,700	Kali, arsenikf. . . .	2,638
Helvin	3,100	- chromf.	2,612
Hirschhorn	1,875	- kohlens.	2,600
Hirschhornsalz, flüchtiges	1,496	- schwefels.	2,636
		- Hydrat . . 1,708	2,100
		Kalk, gebrannter . . .	1,842
		- phosphorf. . . .	3,810
		Kalkmörtel, frisch . .	1,789
		- trocken	1,638

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Kalksinter, Tropfstein 2,325	2,741	Korkholz	0,240
Kalkspath . . 2,070	2,720	Korund . . . 3,90	3,970
Kalkst., dichter 2,200	2,700	Krebsaugen	1,890
- - rüdersdorfer .	2,396	Kreide, schwarze (Zeichenschiefer) . 2,144	2,277
- körniger . . 2,707	2,862	- weiße . . . 1,797	2,790
- gebrannt., rüdersd.	1,274	Kreuzstein, Kreuzkrystall 2,353	2,364
Kannelkohle . . 1,21	1,270	Kryolith	2,968
Kaolin	2,210	Krystall, isländischer	2,720
Karneol . . . 2,597	2,630	Kupfer, gegossen . .	8,788
Karpolit	2,930	- gehämmert . . .	9,000
Kastanienbaum, Roßkastanie	0,610	- Draht	8,878
Katzenauge, silex catophtalin . . 2,567	3,259	- japanisch . . .	8,434
Kiefernholz, v. Kerne frisch, harzig 0,725	0,728	- Erz, rothes . . .	5,990
- Kern und Splint, frisch . . . 0,640	0,657	- Glanz	5,690
- v. Kerne trocken .	0,625	- Kies	4,160
- Kern u. Splint, tr.	0,600	- Lasur	3,831
- Splint, tr. 0,440	0,570	- Glimmer	2,540
Kieselerde	2,660	- Oxydul	5,749
Kieselmangan . 3,50	3,600	- Schaum	3,090
Kieselkupfer	2,100	- Smaragd . . 2,10	3,278
Kieselschiefer (Hornschiefer) . . . 2,596	2,860	- Vitriol . . 2,19	2,300
Kieselsinter (Quarzsinter) 1,807	1,917	- phosphorsaures . 3,60	3,800
Kirschbaumholz . . .	0,715	- Manganerz	3,190
Kirschgummi	1,482	- Blei-Vitriol . . .	5,430
Kleesäure	1,507	Labrador . . . 2,714	2,751
Klingstein (Hornschiefer) 2,512	2,700	Lambertsnußholz . . .	0,600
Knebelit	3,710	Lasurstein . . 2,771	2,945
Knochen (Ochsen-) .	1,656	Lava 2,795	2,823
Kobald, gegossen . . .	7,811	Lazulith . . . 3,024	3,039
- gestreckt	9,152	Lebensbaumh. 1,220	1,327
- arsenikf.	3,033	Leberkies	4,630
- Glanz	6,290	Lehm, fetter, frisch . .	1,664
Kochsalz 2,17	2,300	- - erhärtet	1,516
Kohle (Eichenholz) . .	1,573	- m. Stroh vermischt, zum Stacken, frisch	1,192
Korallen	2,690	- - trocken	1,072
		Leuzit 2,48	2,500
		Lerchenholz	0,622
		Lievrit 3,82	3,990
		Limonienbaum	0,703
		Lindenholz	0,604

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Lorbeerbaum . 0,524	0,822	Melanit (schw. Granit)	3,691
Lydischer Stein (Probierst., schwarz. Jaspis) 2,596	2,887	Menakan 4,10	4,500
		Mennig	8,940
Magneteisenstein . . .	5,090	Mergel, erdiger 1,606	2,400
Mahagoni . . 0,637	1,063	- erhärteter . 2,300	2,700
Malachit . . . 3,670	4,001	Mesotyp	2,249
Mandelbaumholz . . .	1,102	Messing, gegossen . .	8,396
Mandelstein . 2,231	2,594	- Drath	8,544
Mangan	7,000	Meteorstein . . . 3,55	3,600
- Oxyd	4,328	Mispelbaum	0,944
- Oxydoxydul . . .	4,720	Molybdän . . . 7,50	8,600
- Glanz	3,950	- Glanz	4,590
Marmor, bayreuther	2,840	- Säure	3,460
- carrarischer, weißer 2,717	2,763	Monophan	2,150
		Mühlenstein	2,490
- ägyp. grüner . . .	2,668	Natrium	0,972
- vom Harz, blankenburger	2,675	Natronhydrat	1,536
		Natron, weinst. . . .	1,744
- - elbingerod . .	2,851	Nephelin	2,760
- italienisch., schwarzer	2,712	Nephrit	3,020
		Nickel, gegossen . . .	8,279
- - weißer	2,715	- gestreckt	8,666
- v. Paris, weißer .	2,837	- Antimonglanz . . .	6,450
- schlesischer Jaspis	2,739	Nußbaumholz, deutsch.	0,664
- schlesischer, blauer	2,711	- französ.	0,671
- - grüner	2,700	- virgin. schwarzes .	0,827
- - weißer	2,648	Obsidian (Glasachat)	2,348
- schwedisch., grüner	2,725	Ochsenhorn	1,840
Mastixbaum	0,849	Olivenbaum	0,927
Mastix	1,074	Olivin (grün. Schörl) 3,032	3,403
Mauer mit Kalkmörtel v. rüdersdorf. Bruchsteinen, frisch	2,461	Opal, edler oriental. 1,700	2,114
		- gemeiner . 2,015	2,144
- - trocken	2,396	Ophit	2,560
- - von magdeburger Sandstein., frisch	2,123	Opium	1,336
		Orangenbaumh. . . .	0,705
- - trocken	2,047	Orthit	3,280
- v. Ziegelst. fr. 1,554	1,699	Palladium, geschm. 11,30	11,800
- - trocken 1,471	1,593	- gehämmert	12,148
Maulbeerbaum 0,626	0,897	Pappel, Schwarzpappel, trocken . 0,383	0,557
Meerschaum . 0,336	1,600		

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Pappel, Weißpappel trocken . . . 0,529	0,810	Queckſilber, gefroren 14,391	15,612
- caroliniſch	0,419	- Peroxyd	11,290
- italieniſch	0,398	- Kalk	9,230
Paradiesholz	1,177	Quittenbaum	0,705
Pech, weißes	1,072	Realgar	3,600
Pechkohle 1,29	1,350	Reisblei, deutſch . . .	2,460
Pechſtein . . . 2,049	2,669	- engl.	2,089
Perlen, orient.	2,684	Retinit 1,07	1,350
- gemeine	2,750	Rhodium	11,000
Petalith	2,440	Rohr, ſpaniſches . . .	0,400
Pfeifenſtrauchholz . .	1,099	Roſenholz	1,125
Pfirſichbaumholz . . .	0,749	Rothſtein . . . 1,666	3,139
Pflaumenbaum 0,785	0,790	Rothtanne, Fichte, fr.	0,546
Pharmakolith	2,640	- - trocken. 0,360	0,498
Phosphor . . . 1,70	1,770	Rubin, oriental. . . .	3,990
- Säure	2,687	Rutil	4,240
- Eiſen	6,700	Salmiak 1,45	1,600
- Kupfer	7,122	Salpeter	1,900
Pikrosmin . . . 2,59	2,660	- feuerbeſtändiger . .	2,745
Platin, geſchmolz. . .	20,855	Sand, gemeiner, trock.	1,638
- gehämmert	21,314	- aus Bächen . . .	1,900
- geprägt	21,343	- mit Waſſer geſättigt	1,945
- Draht	19,267	Sandarach	1,050
- Sand	15,601	Sandelholz, weißes .	1,041
Polyhalit . . . 2,65	2,769	- rothes	1,128
Polymigmit	4,800	- gelbes	0,809
Porphyr 2,70	2,800	Sandſtein . . 1,933	2,699
Porzellan, Meiſſen . .	2,493	- magdeburger 1,971	2,123
- Wien . . . 2,075	2,386	Saphir, orient. 4,29	4,830
- China	2,385	- braſil.	3,130
- Berlin	2,293	Sapphirin	3,420
- Sevres	2,146	Sardonix . . 2,595	2,628
Praſem, Praſer . . .	2,580	Saſſafrasholz, trocken	0,482
Prehnit (grüner Feldſpath)	2,925	Sauſſürit . . 3,256	3,343
Probirſtein	2,415	Scammonienharz . . .	1,200
Puzzolane . . . 2,51	2,800	Schaumkalk	2,530
Pyrodmalith	3,080	Scheelit	6,760
Pyrorthit	2,190	Schiefer	2,672
Quarz, gemein. 2,486	2,763	Schieferthon . 2,600	2,680
- milchweißer	2,652	Schießpulver, gehäuft	0,836
Queckſilber	13,597	- geſchüttelt	0,932
		- geſtampft	1,745

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Schillerspath	2,691	Stangenstein (weißer	
Schmiergel	3,922	Schörl)	3,530
Schörl, gem. schwar-		Staurolith	3,720
zer 2,92	3,212	Stechpalme	0,760
Schrifttellur	5,800	Steinkohlen . 1,232	1,510
Schwefel, Stang. 1,92	1,990	Steinmark, verhärte-	
- gediegen . . . 2,07	2,100	tes 2,5	2,815
- krystallisirt	2,033	Steinsalz . . . 2,143	2,412
- Blumen	2,086	Stilbit 2,192	2,213
- Kies	4,908	Stinkstein . . 2,699	2,712
- Wismuth	6,500	Storaxgummi	1,110
Schwerspath, gemein.		Strahlkies . . . 4,69	4,840
4,342	4,760	Strahlstein (Strahl-	
- dichter . . . 4,30	4,400	schörl) . . . 2,806	3,452
- faseriger . . 4,4	4,496	Straß 3,5	3,600
- körniger	4,380	Stroh, in d. Scheunen,	
Schwimmstein 0,405	0,797	gebunden	0,053
Selen	4,310	- zusammengepreßt .	0,125
- Blei	7,697	Strontian 3,4	3,958
Serpentin . . . 2,43	2,669	- kohlens.	3,605
Silber, gegossen . . .	10,414	- schwefels. . . . 3,5	3,900
- gehämmert	10,622	Strontium 4,0	5,000
- Glanz 6,9	7,200	Süßerde	2,967
- Hornerz	4,804	Syenit 2,635	2,710
- rothgiltig . . 5,42	5,830	Takamahak	1,046
- schwarzgiltig 5,9	6,260	Talk (gem. Talkst.) 2,7	3,000
- weißgiltig	5,322	- schiefer . . 2,768	3,020
Skorodit	3,162	- erde	2,350
Smaragd . . 2,678	2,775	- phosphors. . . .	3,130
Soladit 2,37	2,490	Tannenharz	1,073
Speck	0,948	Tantalerde	6,500
Speckstein, gem. 2,614	2,880	Tantolit (v. Kimito) 7,6	7,900
Speiskobalt	6,460	Taxusbaum, holländ.	0,788
Spinell (Rubinspath)		- span.	0,807
3,48	3,640	Tellur 5,72	6,115
Spiesglas, geschmolz.	6,702	- Wismuth	7,820
- rohes	4,064	Tennantit	4,375
Stahl, geschlagen . .	7,840	Teufelsdreck	1,327
- ungeschlagen . . .	7,833	Therpentin	0,991
- kölnischer	8,215	Thomsonit	2,370
- Feder	8,215	Thon, gemeiner 1,80	2,630
- von engl. Feilen .	8,189	Thonerde, reine	
- Guß-	7,919	1,305	1,699

Körper.	Sp. Gw.	Körper.	Sp. Gw.
Thonschiefer, Dachschiefer 2,67	3,500	Wasserglas	1,250
Thumerstein (Axinit, Glasschörl) . 3,250	3,295	Wawellit	2,330
Thuyasbaumholz . . .	0,561	Weidenholz . . 0,390	0,585
Titan	5,300	Weihrauch	1,221
- Eisen 4,62	4,890	Weinreben	1,327
- Oxyd	4,240	Weinsäure	1,750
Titanit 3,49	3,600	Weinstein	1,849
Tomback	9,185	Weinsteinrahm	1,900
Topas, orient.	4,011	Weinsteinsalz	1,550
- sächsisch	3,564	Weißdorn	0,910
- brasil.	3,536	Weißtanne, Stamm, frisch 0,444	0,453
Traganth	1,316	- - trocken . 0,420	0,424
Trapp 2,78	3,021	Wernerit	2,720
Tripel 1,0	2,200	Weihrauch	1,173
Triphan	3,690	Wetzschiefer . 2,609	2,955
Tropfstein . . 2,324	2,675	Wismuth, gegossen . .	8,716
Türkis 2,86	3,000	- gehämm.	9,822
Tungstein	6,066	- Ocker	4,360
Turmalin (elektrischer Schörl) . . 3,054	3,470	- Oxyd	8,449
Ulme, vom Stamme, trocken . . . 0,600	0,742	- Glanz	6,540
Uranium . . . 6,440	7,000	Witherit 4,27	4,436
Uran	9,000	Wolfram	7,600
- Glimmer . . 3,12	3,300	- Säure	6,120
Veroneserde (Grünerde)	2,637	Wollastonit	2,805
Vesuvian (vulkanischer Schörl) . . . 3,365	4,000	Wootz	7,665
Vitriol, danziger . . .	1,715	Wundersalz (Glaubersalz)	2,246
- englischer	1,880	Würfelerz	2,990
- salz	1,900	Yttererde	4,842
Wachholderholz . . .	0,556	- phosphors.	4,557
Wachs, gelbes	0,965	- schwefels.	2,790
- weißes	0,969	Zeolith, strahliger 2,035	2,100
Wacke 2,622	2,893	Ziegel, gebrannt 1,410	2,215
Walkererde 1,5	2,000	Zink, gegossen	7,213
Wallnußbaum	0,671	- gehämmert	7,861
Wallrath	0,942	- Oxyd	5,430
Wallroßzahn	1,933	- Vitriol	1,912
Wasserblei	4,733	- Spath	4,441
		- Blende	4,166
		Zinn, engl., gegoss. .	7,291
		- - gehämm. . . .	7,799

Körper	Sp. Gw.	Körper	Sp. Gw.
Zinn-Erz 6,51	6,960	Zinnober, hochroth	6,902
- Kies	4,350	Zirkon 4,9	4,700
- Oxydul	6,666	- Erde	4,300
- Oxyd (Zinnstein)	6,900	Zucker, weiß	1,606
Zinnober, braunroth	10,218	Zurkit	3,274

B. Flüssigkeiten.

Flüssigkeiten.	Sp. Gw.	Flüssigkeiten.	Sp. Gw.
Aethersäure	1,0150	Eselsmilch	1,0350
Alkohol	0,7920	Essig, destillirter	1,0090
Ambrageist	1,0310	- rother	1,0250
Ambrabl	0,9780	- weißer	1,0130
Ameisensäure	1,1168	Essigäther	0,8660
Ameisens. Naphtha	0,9157	Essigsäure, concentr.	1,0791
Ammoniak	0,8750	Essigsäurehydrat	1,0630
Anisöl	0,9857	Fenchelöl	0,9970
Apfelwein (Cyder)	1,0180	Flußsäure	1,0609
Arack	1,4570	Hanfsamenöl	0,9260
Arsenikäther	0,6900	Harn	1,0110
Arsenikfäure, stärkste	2,5500	Haselnußöl	0,9160
Baumöl, Olivenöl	0,9150	Honig	1,4500
Bier, braunes	1,0340	Hydriotnaphtha	1,9206
- weißes	1,0230	Hydriodsäure	1,7000
Blausäure	0,7050	Isoppöl	0,9680
Blutwasser 1,025	1,0310	Kleesäure	1,0450
Brandwein, gemeiner	0,8370	Krausemünzöl	0,9750
Brenz. Essiggeist	0,7864	Kuhmilch	1,0320
Boraxsäure	1,7770	Lavendelöl	0,8930
Bucheckernöl	0,9230	Leinöl	0,9400
Cajaputöl	0,9780	Mandelöl	0,9170
Calmusöl	0,8990	Menschenblut	1,0400
Cascarillenöl	0,9380	Mohnöl	0,9220
Citronenöl 0,847	0,8517	Mohnsaft, türk.	1,3630
Chlorschw. im Min.	1,7000	Muskatnußöl	0,9459
- im Max.	1,6280	Naphtha	0,8470
Chlorstickstoff	1,6530	Nelkenöl	1,0340
Cyan, flüss.	0,9000	Nußöl	0,9470
Delphinöl	0,9178	Oelsäure	0,8900
Delphinsäure	0,9410	Olivenöl	0,9153
Dillenöl	0,9940	Petroleum	0,7560
Erdöl 0,75	0,8400	Pfeffermünzöl	0,9200

Flüssigkeiten.	Sp. Gw.	Flüssigkeiten.	Sp. Gw.
Pferdemilch	1,0350	- Unterschwff.-Hydrat	1,3470
Pomeranzenschalöl	0,8880	Seewasser	1,0286
Ricinusöl	0,9699	- todtes Meer	1,2122
Rosenöl	0,8320	Spiesglasöl	2,4700
Rosmarinöl	0,8886	Spiköl	0,8770
Rüböl (Rapsöl)	0,9193	Steinöl	0,8780
Sadebaumöl	0,9860	Terpentinöl	0,7920
Salpeternaphtha	0,8000	Thran	0,9270
Salpetersäure, gem.	1,2720	Wachholderöl	0,9110
- rauchende	1,5830	Wasserstoffhyperoxyd	1,4520
Salpeterige Säure	1,4510	Wein, rhnl.	0,9925
Salzäther	0,8740	- französ., weißer	1,0200
Salzsäure	1,194	- Bordeaux	0,9940
Salveiöl	0,8640	- Burgunder	0,9920
Sassafrasöl	1,0940	- Champagner	0,9620
Schaafsmilch	1,0410	- Capwein	1,0210
Schlehensaft	1,5150	- Canarien	1,0330
Schwefeläther	0,710	- Madeira	1,0380
Schwefelblausäure	1,0220	- Malaga	1,0150
Schwefelkohlenstoff	1,2720	- Pontak	0,9930
Schwefelnaphtha	0,7160	- Portwein	0,9970
Schwefelsäure	1,9546	- Tokayer	1,0540
- geschmolzen	1,9700	Weinsteinöl	1,5400
- Nordhäuser	1,8960	Ziegenmilch	1,0340
- Vitriolöl	1,8450	Zimmetöl	1,0350

C. Gase und Dämpfe.

(Das spezifische Gewicht der atmosphärischen Luft ist = 1 gesetzt.)

Namen der Gase.	Sp. Gw.	Namen der Gase.	Sp. Gw.
Atmosph. Luft	1,0000	Salzsaures Gas	1,2847
Sauerstoffgas	1,1111	Hydriodsäure Gas	4,3750
Stickgas	0,9722	Kohlensäure Gas	1,5277
Wasserstoffgas	0,0694	Kohlenoxydgas	0,9722
Chlor	2,5000	Oelerzeugendes Gas	0,9722
Chloroxydul	2,4444	Kohlenwasserst. Gas	0,5555
Chloroxyd	4,1182	Geschwef. Wasserstoff-Gas	1,1805
Chlorkohlenst. Säure	3,4722		
Stickstoffoxydul	1,5277	Gephosph. Wass. Gas	0,9027
Stickstoffoxyd	1,0416	Phosph. Wass. Gas	0,9722
Salpetrigs. Gas	3,1764	Phosgen-Gas	3,3894
Ammoniakgas	0,5903	Cyan	1,8055

Namen der Gase.	Sp. Gw.	Namen der Gase.	Sp. Gw.
Schwefels. Gas . . .	2,2222	Alkoholdampf	1,6133
Flußs. Gas	2,3694	Schwefeläther dampf .	2,5860
Fluorborongas	2,3709	Schwefelkohlenstoffd.	2,6447
Fluorsiliciumgas . . .	3,5735	Hydriodnaphthad. . .	5,4749
Arsenikwasserst. Gas .	0,5290	Terpentinspiritusd. . .	5,0130
Phosphordampf . . .	0,8333	Salpetrigs. Dampf . .	2,6380
Kohlendampf	0,4166	Salzätherdampf . . .	2,2190
Schwefeldampf . . .	1,1111	Schwefeläther	2,4434
Joddampf	8,6805	Blausäuredampf . . .	0,9476
Wasserdampf	0,6234	Chlorcyandampf . . .	2,1530
Quecksilberdampf . .	6,9760		

In Bezug auf die letztere Tafel ist noch zu bemerken, daß bei einer Temperatur von 0° Reaum., und bei einem Barometerstand von 0,76 Metres oder 28″ 0‴,9 (Par.), das spezifische Gewicht der atmosphärischen Luft gegen das des Wassers, wenn letzteres = 1 gesetzt wird,

$$= 0{,}00128308, \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{779{,}37}$$

ist.

Die Statik fester Körper.

Sechstes Kapitel.

Stehende Koordinaten-Systeme und sonstige stehende Bezeichnungen. Allgemeine Sätze der Summation durch Integration, in Bezug auf gegebene, begrenzte Räume. Inhalts- und Massen-Bestimmungen durch Integration.

§. 50.

Stehende Koordinaten-Systeme.

I. Wir gebrauchen in der Folge, so wie bisher immer, ein rechtwinkliches Koordinaten-System, dessen drei Axen durch OX, OY, OZ bezeichnet werden, oder welches nur die beiden Axen OX und OY hat, wenn alles in einer und derselben Ebene liegt, die wir dann zur Axen-Ebene nehmen.

II. Aber außer diesem System rechtwinklicher Koordinaten werden wir auch noch ein Polar-Koordinaten-System anwenden, welches mit ersterem jedesmal auf folgende Art zusammenhängen soll. Wir denken uns nämlich in OX einen Punkt O', der den Abscissen-Werth e haben mag, legen durch O' und durch den beliebigen Punkt m im Raume, der die drei Koordinaten-Werthe x, y und z hat, den Radius-Vektor $mO'=r$, welcher mit $O'X$ den Winkel $mO'X=\varphi$ macht, und bezeichnen den Winkel, welchen die Ebene $mO'X$ mit der Ebene XOY bildet, durch θ (so daß $\sin\theta$ mit z zugleich positiv oder negativ wird). Wir drücken φ und θ nie in Graden, sondern im Bo-

gen-Längen-Maaß aus für den Radius 1, und so hat man die drei Polar-Koordinaten r, φ, θ für denselben Punkt m im Raume. Beide Gattungen von Koordinaten hängen (wenn sie einem und demselben Punkt m im Raume angehören) durch folgende Gleichungen mit einander zusammen, nämlich

1) $x - e = r \cdot \cos\varphi$, 2) $y = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta$

und 3) $z = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$.

Um mittelst dieser Polar-Koordinaten im Raume jeden Punkt m im Raume zu erreichen, muß man dem θ alle möglichen Werthe von 0 bis 2π, dem φ dagegen bloß alle möglichen Werthe von 0 bis π geben, übrigens auch r allemal positiv nehmen.

III. Hat man es jedoch bloß mit Punkten m zu thun, die alle in einer und derselben Ebene liegen, so hat man z nicht und θ nicht, sondern bloß

1) $x - e = r \cdot \cos\varphi$ und 2) $y = r \cdot \sin\varphi$.

Aber um nun alle Punkte m in der Ebene zu erreichen, muß man dem φ nicht bloß alle Werthe von 0 bis π, sondern alle Werthe von 0 bis 2π geben, und r wieder jedesmal positiv nehmen.

§. 51.

Was nennen wir Normal-Figuren?

Für den folgenden Vortrag ist es bequem, den Begriff der Normal-Figur fest zu halten. Wir verstehen aber darunter diejenigen Flächen- oder Körper-Räume, welche die in (I. II. III.) näher bezeichneten Grenzen haben.

I. Ebene Normal-Figuren.

a) Gebrauchen wir nämlich rechtwinkliche Koordinaten, so setzen wir bei einer ebenen Normal-Figur (in deren Ebene wir die Axen OX und OY legen) voraus, daß sie in der Richtung der mit OY parallelen Ordinaten durch zwei Kurven (oder Gerade) begrenzt sey, deren Ordinaten wir immer durch y' und y'' bezeichnen, welche im Allgemeinen Funktionen von x, aber

auch nach x konſtant ſeyn können *). Ferner ſetzen wir voraus, daß dieſelbe ebene Flächen-Figur noch durch zwei Gerade, auf OX ſenkrechte Linien begrenzt werde, welche durch die Abſciſſen-Werthe x' und x'' gegeben ſind. Zuletzt ſetzen wir immer $x'' > x'$ und für ein und daſſelbe x auch jedesmal noch $y'' > y'$ voraus.

Man betrachte z. B. (Fig. 15.), wo ECDFE, auch ECABE, ECGBE, ſelbſt BADFB und BHDFB, ſolche einfach begrenzte ebene Figuren ſind, wie wir ſie hier ein- für allemal vorausſetzen. In ECDFE iſt für $OP = x$, $PN = y''_x$, $-PN' = y'_x$, $OA = x'$, $OB = x''$. — In ECABE dagegen iſt $y'_x = 0$, $y''_x = PN$. — In ECGBE iſt $y''_x = PN$, $y' = 0$, $x'' = OB$, dagegen $x' = -OG$. In BADFB iſt $y'' = 0$, $y'_x = -PN'$, $x' = OA$ und $x'' = OB$. — In BHDFB endlich iſt $y'' = 0$, $y'_x = -PN'$, $x' = OH$, $x'' = OB$. —

Die Figur ECGHDFE dagegen iſt keine ebene Normal-Figur, läßt ſich aber durch die HK (ſenkrecht auf OX) in die beiden Normal-Figuren KGHK und KHDFEK zerlegen.

b) Gebraucht man aber bei Betrachtung einer ebenen Figur das Polar-Koordinaten-Syſtem r und φ, ſo nennen wir ſie nur dann Normal-Figur, wenn ſie folgende Grenzen hat: Erſtens zwei beliebige gerade oder krumme Linien, welche durch Gleichungen zwiſchen r' und φ und zwiſchen r'' und φ gegeben ſind, ſo daß r' und r'' Funktionen von φ (auch wohl von φ unabhängig) werden **). Als fernere Grenzen unſerer Normal-Flächen-Figur ſetzen wir dann noch zwei durch O' gehende, mittelſt der konſtanten Werthe φ' und φ'' von φ gegebene, Gerade voraus, während wir wieder $\varphi'' > \varphi'$ und für ein und daſſelbe φ auch allemal $r'' > r'$ vorausſetzen.

In

*) Iſt y' oder y'' nach x konſtant, ſo iſt die entſprechende Grenzlinie eine mit OX parallele Gerade. Iſt aber z. B. $y'' = 0$, ſo fällt dieſe Grenz-Linie mit OX ſelber zuſammen, d. h. OX iſt ſelbſt die eine Grenze. Und iſt z. B. $y' = ax + b$, ſo iſt dieſe Grenzlinie eine Gerade, die nicht mit OX parallel läuft. — In allen andern Fällen ſind dieſe Grenz-Linien beliebige krumme Linien, und recht häufig auch die beiden Zweige einer und derſelben krummen Linie.

**) Iſt z. B. r' konſtant, ſo iſt dieſe Grenz-Linie eine Kreis-Linie, welche O' zum Mittel-Punkt hat. Iſt $r' = 0$, ſo fällt dieſe zweite Grenz-Linie mit dem Punkte O' zuſammen, und hört ganz auf zu ſeyn.

In der (Fig. 15.) ist z. B. CLC′L′ ein Flächen-Stück, welches die hier vorausgesetzten Grenzen hat, wo, während $MOX = \varphi$ ist, $O'M = r''_\varphi$, $O'M' = r'_\varphi$, und wo $LO'X = \varphi'$ und $CO'X = \varphi''$ ist.

Desgleichen sind aber auch GO′L und LO′S einfach begrenzte Flächen-Figuren, wie wir sie hier voraussetzen. Bei GO′L ist $r' = 0$, $r'' = O'M$, $LO'X = \varphi'$ und $\varphi'' = \pi$, unter π wie hier immer den Halbkreis für den Radius 1, also die Zahl 3,14159··· verstanden. — Bei LO′S dagegen ist $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = LO'X$.

Hat man eine ganz geschlossene Figur, wie z. B. die Ellipse (Fig. 16.), so nimmt man die Gleichung der Ellipse zwischen r'' und φ, und findet daraus die Grenze r''_φ, während die andere Grenze $r'_\varphi = 0$ ist. Hernach nimmt man $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 2\pi$, und so zeigt sich diese ganze geschlossene Figur als eine solche, welche die hier vorausgesetzten Grenzen hat, also Normal-Figur genannt wird *).

II. Gekrümmte Normal-Flächen-Figuren.

a) Ist die zu betrachtende Flächen-Figur keine ebene, sondern eine gekrümmte, deren Fläche durch irgend eine Gleichung zwischen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x, y, z gegeben ist, so wird sie für den Fall, daß rechtwinkliche Koordinaten-Werthe gebraucht werden, nur dann Normal-Figur genannt, wenn sie durch zwei ganz beliebige (ebene oder doppelt gekrümmte) Linien begrenzt ist, welche, auf die Ebene XOY projizirt, zwei solche Kurven (oder Gerade) geben, wie wir sie in (I. a.) durch die Ordinaten y' und y'' vorgestellt uns dachten **). Außerdem setzen wir voraus, daß dieselbe Flächen-Figur noch durch

*) Gebraucht man bei derselben Ellipse rechtwinkliche Koordinaten, so hat man eine Gleichung zwischen x und y für die Ellipse, welche zu jedem x zwei Werthe von y liefert. Den größern davon setzt man dann statt y'', den kleinern statt y'; und um die Grenz-Werthe x' und x'' zu erhalten, zieht man zwei auf OX senkrechte Tangenten AB und CD an die Ellipse, und nimmt $x' = -OA$ und $x'' = OC$. — Eine solche geschlossene ebene Flächen-Figur, welche durch eine einzige krumme Linie begrenzt wird, hat also auch die Grenzen, wie wir sie bei rechtwinklichen Koordinaten voraussetzen; solche wird daher jedesmal Normal-Figur genannt.

**) Die Gleichungen zwischen x und y', eben so zwischen x und y'', welche diese Ordinaten y' und y'' als Funktionen von x (oder als konstante Werthe) geben, sind zu gleicher Zeit die Gleichungen zweier Cylinder-Flächen oder Ebenen, welche auf XOY senkrecht stehen und die krumme Flächen-Figur in ihren gedachten beiden Grenz-Linien schneiden.

zwei Ebenen begrenzt wird, welche auf OX ſenkrecht ſtehen, und durch die Abſciſſen-Werthe x' und x'' gegeben ſind. — Mit andern Worten, wir ſetzen die Grenzen der krummen Normal-Flächen-Figur ſo voraus, daß wenn man ſie auf die Ebene XOY projicirt, ihre Projektion eine ebene Figur mit ſolchen Grenzen bilde, wie wir ſie in (I. a.) bei dem Gebrauche rechtwinklicher Koordinaten, ebene Normal-Figur genannt haben.

b) Gebrauchen wir aber bei einer nicht ebenen Flächen-Figur die Polar-Koordinaten (während die krumme Fläche ſelber durch eine Gleichung zwiſchen den Polar-Koordinaten θ, φ und r gegeben ſeyn mag), ſo ſetzen wir, wenn ſie Normal-Figur genannt wird, voraus, daß ſie einerſeits durch zwei allgemeine Kegel-Flächen *) ausgeſchnitten ſey, deren Spitzen in O' liegen und deren Seiten mit O'X bezüglich die als Funktionen von θ, oder konſtant, gedachten Winkel φ' und φ'' bilden, daß aber andererſeits durch O'X noch zwei Ebenen gelegt ſeyen, welche mit XOY die, konſtant gedachten Winkel θ' und θ'' bilden, ſo daß die Durchſchnitte dieſer Ebenen mit der krummen Fläche, die Flächen-Figur völlig begrenzen. Dabei denken wir uns immer $\theta'' > \theta'$, aber keines von beiden größer als 2π; eben ſo für jeden Werth von θ, auch $\varphi'' > \varphi'$, aber keines von beiden größer als π.

Iſt z. B. $\varphi' = 0$, ſo hat ſich die eine Kegel-Fläche auf die Axe O'X zurückgezogen, und iſt als Grenze verſchwunden. Die andere durch φ'' gegebene Kegel-Fläche begrenzt dann das Flächen-Stück allein. Iſt aber zu gleicher Zeit $\varphi'' = \pi$, ſo fällt dieſe Kegel-Fläche mit der rückwärts gedachten Verlängerung von O'X zuſammen, und verſchwindet ebenfalls als Grenze. Die gegebene krumme Fläche muß ſich dann auf beiden Seiten von O', bis O'X und bis auf deren rückwärts gedachte Verlängerung herunter wölben, wenn unter dieſen Vorausſetzungen eine völlig beſtimmte Flächen-Figur doch noch möglich werden ſoll. — Eben ſo kann $\theta' = 0$ ſeyn; dann wird die krumme Flächen-Figur von der Ebene XOY ſelbſt begrenzt.

*) Eine allgemeine Kegel-Fläche wird diejenige Fläche genannt, welche eine unendliche Gerade beſchreibt, die beſtändig in einem und demſelben Punkte O' bleibt, dabei aber ſich ganz beliebig bewegt. Eine ſolche allgemeine Kegel-Fläche geht daher in einem beſonderen Falle auch in eine Ebene über.

Ist dann $\theta'' = \pi$, so begrenzt dieselbe Ebene XOY in ihrer rückwärts von OY gedachten Verlängerung das Flächen-Stück abermals, und es wölbt sich dann das Flächen-Stück auf beiden Seiten von OX bis auf XOY herab. — Wird aber, während $\theta' = 0$ ist, $\theta'' = 2\pi$ gesetzt, so geht die Wölbung der gegebenen Flächen-Figur rings um OX herum, in der durch ihre Gleichung gegebenen Form; und das Flächenstück ist nur noch von den beiden durch φ' und φ'' gegebenen Kegel-Flächen begrenzt. Und ist zugleich $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \pi$ gesetzt, so hat man eine ganze, rings herum geschlossene krumme Oberfläche im Auge.

III. Normal-Körper.

a) Gebraucht man bei einem völlig begrenzten Körper rechtwinkliche Koordinaten, so nennen wir ihn Normal-Körper, wenn er erstlich zwei gekrümmte oder ebene Grenz-Flächen hat, welche alle, durch den Körper parallel mit OZ laufenden Geraden begrenzen, und welche an jeder durch x und y gegebenen Stelle die Ordinaten z' und z'' haben, so daß z' und z'' im Allgemeinen Funktionen von x und y seyn werden, aber auch nur einen dieser Veränderlichen enthalten, auch nach x und nach y konstant seyn können *). Ferner setzen wir voraus, daß in demselben Körper alle durch ihn mit OY parallel gehenden Geraden durch zwei Cylinder-Flächen oder Ebenen begrenzt werden, welche senkrecht auf XOY stehen, und diese Ebene XOY in zweien Linien schneiden, deren mit OY parallele Ordinaten y' und y'' Funktionen von x oder konstant sind, wie in (I. a.) **). Zuletzt

*) Enthält z. B. z' bloß x allein, so ist die durch z' vorgestellte Fläche eine Cylinder-Fläche, deren Seiten mit OY parallel laufen. — Enthält z' bloß y allein, so stellt z' eine Cylinder-Fläche vor, deren Seiten mit OX parallel laufen. — Ist z' nach x und nach y konstant, so stellt z' eine ebene Fläche vor, welche mit XOY parallel läuft. — Und ist $z' = 0$, so ist die Ebene XOY selbst die durch z' vorgestellte Grenz-Fläche. — Auch können z' und z'' die beiden Werthe von z aus einer Gleichung zwischen x, y und z seyn, welche eine krumme Fläche vorstellt, die von den mit OZ parallelen Geraden in zweien Punkten getroffen wird.

**) Ist z. B. y' konstant, so ist diese Grenze eine mit der Ebene XOZ parallele Ebene. — Ist $y' = 0$, so ist XOZ selbst diese eine Grenze. — Ist $y' = a \cdot x + b$, so ist diese Grenze ebenfalls eine auf XOY senkrechte Ebene, welche aber mit der Ebene XOZ einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= a$ ist.

Wölbt sich die Grenz-Fläche $z'' = z''_{x,y}$ bis auf XOY herunter, so

ſetzen wir voraus, daß der Körper noch durch zwei auf OX ſenkrechte Ebenen begrenzt werde, welche durch die Koordinaten-Werthe x' und x'' gegeben ſind, wodurch der Normal-Körper dann völlig begrenzt iſt *). Dabei denken wir uns immer $x'' > x'$; für ein und daſſelbe x auch $y'' > y'$; endlich für dieſelben Werthe von x und y auch $z'' > z'$.

b) Gebraucht man dagegen bei einem begrenzten Körper die Polar-Koordinaten, ſo ſetzen wir allemal, wenn wir ihn Normal-Körper nennen, als Grenzen voraus: Erſtens zwei beliebige krumme Flächen, welche durch Gleichungen zwiſchen θ, φ und r', ſo wie zwiſchen θ, φ und r'' gegeben ſind, und von denen die eine ſich auch auf den bloßen Punkt O' zurückziehen kann; dann noch dieſelben beiden durch φ' und φ'' gegebenen Kegel-Flächen, und auch dieſelben beiden durch θ' und θ'' gegebenen Ebenen, welche wir in (II. b.) vorausgeſetzt haben.

Auch im Uebrigen gelten dann hier alle Bemerkungen, welche bereits in (II. b.) und in den dazu gehörigen Noten gemacht worden ſind, nur daß wir hier immer den vollen Körper, dort aber nur ſeine Oberfläche im Auge haben.

§. 52.

Von der nach dem verſchiedenen Koordinaten-Syſtem verſchiedenen Zertheilung der Linien, Flächen und Körper in unendlich-kleine Elementchen.

I. Jede (gerade, einfach oder doppelt gekrümmte) Linie bezeichnen wir ihrer Länge nach, von einem beliebigen oder beſtimmten Anfangs-Punkte an gerechnet, bis zu einem unbeſtimm-

---

kann y'' der Werth von y aus $z'' = 0$ werden, weil $z'' = 0$ die Durchſchnitts-Linie der krummen Fläche $z'' = z''_{x,y}$ mit der Ebene XOY vorſtellt. — Ja es können y' und y'' die beiden Werthe von y aus $z'' = 0$ werden.

*) Dieſe Grenz-Ebenen können bloße Tangential-Ebenen werden, oder doch mit dem Körper ſelbſt bloß eine Linie oder bloß einen Punkt gemein haben, wenn ſeine übrigen Grenzen in dieſer Linie oder in dieſem Punkte zuſammenlaufen.

ten Punkte hin, durch s, so daß s eine Funktion von x (von φ, oder von θ) ist (je nachdem wir mit rechtwinklichen oder mit Polar-Koordinaten, in der Ebene oder im Raume, rechnen). Indem wir nun x um dx (oder φ um $d\varphi$, oder θ um $d\theta$) wachsen lassen, und dx ($d\varphi$, $d\theta$) unendlich-klein denken, wächst s um ds, und in alle diese unendlich-kleinen ds, welche zu den, um dx unterschiedenen Werthen von x gehören, denken wir uns nun hier irgend einen bestimmten Bogen dieser Kurve zertheilt.

a) Ist nun die Kurve einfach gekrümmt, und sind OX und OY in derselben Ebene genommen, so hat man allemal nach (I. Th. Geom. §. 6.)

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}, \quad \text{oder} \quad ds = d\varphi \cdot \sqrt{\partial r_\varphi^2 + r^2},$$

wo y eine Funktion von x, oder r eine Funktion von φ ist, in so ferne die Kurve selbst durch eine Gleichung zwischen y und x, oder durch eine Gleichung zwischen r und φ gegeben ist.

b) Ist aber die Kurve doppelt gekrümmt (oder auch einfach gekrümmt, ja selbst eine Gerade, aber durch zwei Gleichungen zwischen Koordinaten-Werthen im Raume gegeben), so ist allemal nach (I. Th. Geom. §. 16.)

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2},$$

oder

$$ds = d\theta \cdot \sqrt{r^2 \cdot \sin\varphi^2 + r^2 \cdot \partial\varphi_\theta^2 + \partial r_\theta^2}\ ^*),$$

wo y und z Funktionen von x, oder r und φ Funktionen von θ sind, und zwar diejenigen Funktionen, welche aus den beiden Gleichungen der Kurve sich ergeben.

II. Jede ebene Normal-Flächen-Figur, wenn sie die bei rechtwinklichen Koordinaten vorausgesetzten Grenzen hat, denken wir uns durch unzählich viele mit OY parallele und um dx

---

*) Man betrachtet ds als die Diagonale eines rechtwinklichen Parallelepipedums, dessen drei Kanten bezüglich $r \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$, $r \cdot d\varphi$ und dr sind, während $d\varphi = \partial\varphi_\theta \cdot d\theta$ und $dr = \partial r_\theta \cdot d\theta$ ist, weil dasmal r und φ als Funktionen von θ gegeben sind. — Diese Ansicht rechtfertigt sich dadurch, daß man bei der strengern Rechnung, wenn man zuletzt nach (§. 20. Anal. Th. I.) die Unendlich-Kleinen der höheren Ordnung wegläßt, genau dasselbe bekommt.

von einander entfernte gerade Linien in lauter Streifen, diese Streifen aber wieder durch Linien, welche mit OX parallel laufen und um das unendlich-kleine dy von einander abstehen, in lauter Rechteckchen zerlegt, deren Inhalt

1) $= dx \cdot dy$

ein Unendlich-Kleines der zweiten Ordnung ist *). Dabei sind x und y Koordinaten-Werthe einer beliebigen Stelle (im Innern oder an den Grenzen) der Flächen-Figur, also beide von einander ganz unabhängig.

Gebraucht man aber die Polar-Koordinaten r und φ, und setzt man voraus, daß die Figur auch die Grenzen habe, welche wir für Normal-Figuren bei dem Gebrauche der Polar-Koordinaten nach (§. 51. I. b.) immer voraussetzen, so zertheilt man die Figur durch unendlich viele, von O′ auslaufende, im Winkel um $d\varphi$ von einander abstehende Gerade in lauter Streifen, welche von O′ an immer breiter werden, je weiter sie fortlaufen, in der Entfernung r (von O′) die Breite $r \cdot d\varphi$ (im Bogen) haben, daher immer doch unendlich-klein in der Breite bleiben.

Alle diese Streifen zertheilt man dann wieder durch Kreis-Linien, welche ihre Mittel-Punkte alle in O′ haben, und deren Radien immerfort um dr von einander verschieden sind, in vierseitige Elementchen, die als Rechtecke oder als Differenzen zweier Kreis-Sektoren berechnet, sobald man die Unendlich-Kleinen höherer Ordnung dem (§. 20. Analys. Th. I.) zu Folge wegläßt, immer denselben Flächen-Inhalt, nämlich

2) $dr \times r \cdot d\varphi$ oder $r \cdot dr \cdot d\varphi$

---

*) An den krummlinigen Grenzen bilden sich natürlich solche Elementchen, welche nur Theile dieser Rechteckchen $dx \cdot dy$, also noch kleiner als sie sind.

Auch bei den folgenden Zertheilungen bleiben an den krummen Grenzen häufig Theilchen übrig, welche gleichsam nicht mehr vollständige Elementchen sind, weil die krumm laufende Grenze häufig Ecken abschneidet, welche zur Vollständigkeit des Elementes gehören. — Indem wir hier ein für allemal hierauf aufmerksam machen, werden wir es bei den einzelnen Zertheilungen selbst nicht mehr thun.

haben, also immer unendlich-klein von der zweiten Ordnung sind; obgleich dieser Inhalt, wie man sieht, immer größer wird, je größer r ist, d. h. je weiter das Elementchen von O′ abliegt. Dabei sind φ und r die Koordinaten-Werthe einer beliebigen Stelle (im Innern oder an den Grenzen) der Flächen-Figur, und beide sind von einander ganz unabhängig.

III. Jede gekrümmte Normal-Flächen-Figur, wenn auf sie rechtwinkliche Koordinaten angewandt werden, und wenn sie also auch die dabei vorausgesetzten Grenzen (§. 51. II. a.) hat, zerlegen wir immer durch Ebenen, welche bezüglich mit YOZ oder mit XOZ parallel laufen, und dabei bezüglich um dx oder um dy von einander abstehen, in lauter vierseitige Elementchen, deren Projektion auf XOY die Rechteckchen dx·dy sind, deren Inhalt selbst also nach (I. Th. Geom. §. 15.)

1) $= \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\times dx\cdot dy$

ist, wo z eine durch die Gleichung der krummen Fläche gegebene Funktion von x und y ist, so daß der Inhalt dieser Elementchen, nach ihren verschiedenen durch x und y bestimmten Lagen, selber verschieden ist.

Ist aber die krumme Normal-Flächen-Figur auf die Polar-Koordinaten r, φ, θ bezogen, und hat sie also die dann vorausgesetzten Grenzen (§. 51. II. b.), so zerlegt man sie in andere Elementchen. Man legt nämlich zuerst durch OX lauter Ebenen, welche im Winkel um $d\theta$ von einander abliegen; dann aber durch O′ lauter normale *) Kegel-Flächen, dadurch daß man den Winkel φ, welchen die Seite einer solchen Kegel-Fläche mit OX macht, immer fort um $d\varphi$ wachsen läßt. — Dadurch zerlegt sich die gegebene Flächen-Figur wiederum in lauter vierseitige Elementchen, deren Inhalt aber

2) $= r\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\varphi{}^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\theta{}^2}\times d\varphi\cdot d\theta$ **)

*) D. h. solche Kegel-Flächen, deren Durchschnitte mit, auf O′X senkrechten Ebenen, Kreise werden.

**) Um den Inhalt dieses Elementchens zu finden, muß man solches auf die mit r beschriebene Kugel-Fläche projiciren. Diese Projektion kann

iſt, wo r die durch die Gleichung der krummen Fläche gegebene Funktion von φ und θ iſt, ſo daß das Elementchen ſelbſt, nach den verſchiedenen Werthen von φ und θ, alſo nach ſeiner verſchiedenen Lage, auch der Größe nach verſchieden iſt, aber immer unendlich-klein von der zweiten Ordnung bleibt.

IV. Iſt endlich ein Körper gegeben; gebraucht man dabei rechtwinkliche Koordinaten, und iſt der Körper für ſolche ein Normal-Körper, d. h. hat er die dann (§. 51. III. a.) vorausgeſetzten Grenzen, ſo zertheilt man ihn durch Ebenen, welche bezüglich mit YOZ, XOZ und XOY parallel laufen und dabei bezüglich um dx, dy und dz von einander entfernt ſind, zuerſt in Scheiben von der Dicke dx, welche ſenkrecht auf OX ſtehen, dann jede Scheibe in prismatiſche Körperchen, welche ſenkrecht auf XOY ſtehen und die Breite dy (außer der Dicke dx) haben, endlich jedes dieſer letztern Körperchen in lauter rechtwinkliche Parallelepipeda, deren Inhalt

1) $= dx \cdot dy \cdot dz$

iſt, wo x, y, z beliebige, von einander ganz unabhängige Koordinaten-Werthe einer beliebigen Stelle (im Innern oder an den Grenzen des Körpers) vorſtellen. Dieſer Inhalt iſt alſo unendlich-klein von der dritten Ordnung.

Gebraucht man aber die Polar-Koordinaten r, φ und θ, und iſt der Körper für ſie ein Normal-Körper, d. h. hat er

---

man als ein Rechteck anſehen, deſſen eine Kante $r \cdot d\varphi$, deſſen andere Kante aber $r \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$, deſſen Inhalt alſo $= r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$ iſt. Sucht man nun noch den Winkel, welchen das oben gedachte Elementchen mit dieſer Projektion macht, ſo findet ſich ſein Koſinus (durch die entſprechende geometriſche Betrachtung)

$$= \frac{r \cdot \sin\varphi}{\sqrt{r^2 \cdot \sin\varphi^2 + \partial r_\varphi{}^2 \cdot \sin\varphi^2 + \partial r_\theta{}^2}};$$

und da die Projektion $r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$ durch dieſen Koſinus dividirt, allemal das Elementchen ſelbſt giebt, nach (I. Th. Geom. §. 2. III.), ſo findet ſich ſolches wie oben in (2.).

Strengere Rechnungen geben, da man nach (§. 20. Analyſ. Th. I.) die Unendlich-Kleinen der höheren Ordnungen nicht rechnen darf, genau daſſelbe Reſultat.

die für diesen Fall (§. 51. III. b.) vorausgesetzten Grenzen, so zerlegt man ihn in andere Elementchen. Man legt nämlich zuerst die Ebenen und die Kegel-Flächen, wie in (III.); dadurch wird der Körper in lauter vierseitige abgekürzte oder volle pyramidenförmige Stückchen zerlegt. Dann aber denkt man sich von O' aus als Mittel-Punkt lauter Kugel-Flächen beschrieben mit Halbmessern, welche von der einen Grenze r' bis zur andern Grenze r'' beständig um dr wachsen. Diese Kugel-Flächen zertheilen die letztern Körperchen in lauter parallelepipedalisch aussehende Stücken, deren drei Kanten (gleichsam) $r \cdot d\varphi$, $r \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$ und dr sind. Berechnet man diese Körperchen als rechtwinkliche Parallelepipeda, oder als Differenzen zweier vierkantigen Kugel-Ausschnitte, so erhält man allemal, sobald im letztern Falle die Unendlich-Kleinen der höhern Ordnung (dem §. 20. Analys. des I. Th. gemäß) weggelassen werden, den Inhalt dieser Elementchen

$$2) \qquad = r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta,$$

wo θ, φ, r von einander ganz unabhängige Koordinaten-Werthe einer beliebigen Stelle (im Innern oder an den Grenzen) des Körpers vorstellen, so daß diese Elementchen, je nach ihrer verschiedenen Lage im Körper von verschiedener Größe, dagegen immer Unendlich-Kleine der dritten Ordnung sind.

§. 53.

Von der Summation durch Integration, in Bezug auf geometrische Figuren.

I. Hat man eine einfach oder doppelt gekrümmte Linie nach (§. 52. I.) in die Elemente ds zerlegt; und wird dann verlangt, man soll jedes dieser (in der Regel einander nicht gleichen, sondern nach deren verschiedener Lage auch verschiedenen, aber immer unendlich-kleinen) Elementchen ds mit einer Funktion F seiner Lage, also mit einer Funktion von x, oder von φ, oder von θ, multipliziren, alle diese unendlich vielen Produkte aber addiren, — so findet man die Summe aller dieser Produkte nach (§. 35. Analys. Th. I.)

a) in der ebenen Kurve nach (§. 52. I. a.)

$= \int_{x''\div x'} F \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2} \times dx$, auch $= \int_{\varphi''\div\varphi'} F \cdot \sqrt{r^2+\partial r_\varphi^2} \times d\varphi$,

wo im erſtern Integral F als eine Funktion von x, im andern dagegen F als eine Funktion von φ hergeſtellt ſeyn muß.

b) In der doppelt gekrümmten Kurve dagegen findet ſich dieſelbe Summe der Produkte, aus demſelben Grunde und aus (§. 52. I. b.)

$$= \int_{x''\div x'} F \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2} \times dx,$$

auch $= \int_{\theta''\div\theta'} F \cdot r \cdot \sqrt{r^2 \cdot \sin\varphi^2 + r^2 \cdot \partial\varphi_\theta^2 + \partial r_\theta^2} \times d\theta.$

II. Hat man eine ebene Normal-Figur nach (§. 52. II. 1.) in ihre Elementchen dx·dy zerlegt; und wird dann verlangt, daß man jedes derſelben mit einer Funktion ſeiner Stelle, alſo mit einer Funktion F von x und y multipliziren, zuletzt aber alle dieſe unendlich mal unendlich vielen Produktchen addiren ſoll, — ſo giebt das Integral

1) $\int_{y''\div y'} (F \cdot dx) \cdot dy$, oder $dx \cdot \int_{y''\div y'} F \cdot dy$

die Summe dieſer Produkte für alle die Elementchen, welche den zu demſelben x gehörigen, auf OX ſenkrechten unendlich ſchmalen Streifen bilden, der zwiſchen den durch y' und y'' gegebenen Grenz-Linien der gegebenen ebenen Figur liegt. — Nimmt man nun hiervon noch einmal das Integral nach x, ſo erhält man

2) $$\int_{x''\div x'} \left(\int_{y''\div y'} F \cdot dy \right) \cdot dx,$$

und dieſes doppelte Integral drückt nun nach demſelben (§. 35. Analyſ. Th. I.) wiederum die Summe aller der vorgedachten Produktchen aus, für alle Elemente, welche in allen den Streifen liegen, die zwiſchen den zu x' und x'' gehörigen, auf OX ſenkrechten Grenz-Linien zu finden ſind.

Dieſer Ausdruck (2.) iſt alſo der verlangte, wenn nur die gegebene Flächen-Figur die vorausgeſetzten Grenzen wirklich hat.

III. Hat man aber eine ebene Normal-Figur nach (§. 52. II. 2.) in ihre Polar-Elementchen $r \cdot dr \cdot d\varphi$ zerlegt, und wird nun verlangt, daß man jedes derſelben mit einer Funktion ſeiner Stelle, alſo mit einer Funktion F von r und φ multipliziren

ren, zuletzt aber alle diese unendlich mal unendlich vielen Produktchen addiren soll, — so giebt nach (I. Th. §. 35. Analys.) das Integral

1) $\int_{x''\div x'}(F\cdot r\cdot d\varphi)\cdot dr$, oder $d\varphi\cdot\int_{x''\div x'}F\cdot r\cdot dr$

die Summe aller derjenigen dieser Produkte, deren Elementchen zwischen den durch φ und $\varphi+d\varphi$ gegebenen, von O' auslaufenden Geraden liegen; während dann das doppelte Integral

2) $\int_{\varphi''\div\varphi'}(\int_{x''\div x'}F\cdot r\cdot dr)\cdot d\varphi$

die verlangte Summe liefert, nämlich für alle Elementchen, die in allen diesen Streifen liegen, auf welche sich das Integral (1.) bezieht; alles genau nach (I. Th. Analys. §. 35.).

IV. Hat man eine gekrümmte Normal-Flächen-Figur nach (§. 52. III.) in ihre Elementchen zerlegt; wird dann jedes Elementchen mit einer Funktion F seiner Stelle, d. h. von x und y, oder von φ und θ, multiplizirt, und sucht man die Summe aller dieser unendlich mal unendlich vielen Produktchen, so findet sich solche, immer aus denselben Gründen,

a) bei rechtwinklichen Koordinaten, und wenn die Normal-Fläche die, für sie im (§. 51. II. a.) vorausgesetzten Grenzen hat,

$$=\int_{x''\div x'}(\int_{y''\div y'}F\cdot\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\cdot dy)\cdot dx\ *);$$

b) bei den Polar-Koordinaten, und wenn die Normal-Flächen-Figur die nun nach (§. 51. II. b.) vorausgesetzten Grenzen hat,

$$=\int_{\theta''\div\theta'}(\int_{\varphi''\div\varphi'}F\cdot r\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\varphi^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\theta^2}\cdot d\varphi)\cdot d\theta\ **).$$

---

*) Die erste Integration (nach y) giebt die verlangte Summe für den Streifen, der durch die zu x und x+dx gehörigen auf OX senkrechten Ebenen ausgeschnitten wird. Die zweite Integration (nach x) giebt dann die Summe der Produkte für alle diese Streifen, welche die ganze Flächen-Figur ausmachen.

**) Die erste Integration nach φ giebt die verlangte Summe für den unendlich schmalen Streifen, welcher zwischen den zu θ und $\theta+d\theta$ gehörigen Ebenen liegt. — Die zweite Integration (nach θ) giebt dann die verlangte Summe für alle diese Streifen, welche die ganze gegebene Flächen-Figur ausmachen.

V. Iſt ein Normal-Körper gegeben, der die bei dem Gebrauche rechtwinklicher oder der Polar-Koordinaten vorausgeſetzten Grenzen hat; iſt ſolcher nach (§. 52. IV.) in ſeine Elementchen $dx \cdot dy \cdot dz$ oder $r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$ zerlegt; wird dann jedes dieſer Elementchen mit einer Funktion F ſeiner Stelle, d. h. mit einer Funktion F von x, y und z, oder von θ, φ und r multiplizirt; — und verlangt man dann die Summe aller dieſer Produkte für alle dieſe unendlich mal unendlich mal unendlich vielen Elementchen, die den ganzen, völlig begrenzten Körper ausmachen, ſo wird ſolche Summe

a) bei rechtwinklichen Koordinaten, und wenn der Körper die für dieſen Fall im (§. 51. III. a.) vorausgeſetzten Grenzen hat,

$$= \int_{x'\ldots x''} \left[\int_{y'\ldots y''} \left(\int_{z'\ldots z''} F \cdot dz \right) \cdot dy \right] \cdot dx \; *);$$

b) bei den Polar-Koordinaten, und wenn der Körper die dann nach (§. 51. III. b.) vorausgeſetzten Grenzen hat,

$$= \int_{\theta'\ldots\theta''} \left[\int_{\varphi'\ldots\varphi''} \left(\int_{r'\ldots r''} F \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \right) \cdot d\varphi \right] \cdot d\theta \; **).$$

---

*) Die erſte Integration (nach z) giebt die verlangte Summe für das prismatiſche Körperchen vom Querſchnitt $dx \cdot dy$ und von der Länge $z'' - z'$, an der durch x und y gegebenen Stelle. Die nachfolgende Integration (nach y) giebt die verlangte Summe für die auf OX ſenkrechte Scheibe von der Dicke dx, welche aus allen dieſen, zu demſelben x gehörigen prismatiſchen Körperchen gebildet wird. Die letzte Integration (nach x) endlich giebt die verlangte Summe für alle Elementchen in allen dieſen Scheiben, welche von $x = x'$ bis $x = x''$ hin ſenkrecht auf OX neben einander liegen und den ganzen Körper ausmachen.

**) Die erſte Integration (nach r) giebt die Summe dieſer Produktchen für das (abgekürzt) pyramidaliſche Körperchen (deſſen End-Querſchnitte bezüglich $r' \cdot d\varphi \times r' \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$ und $r'' \cdot d\varphi \times r'' \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$ ſind), welches aus allen den Elementchen beſteht, die zu demſelben φ und zu demſelben θ gehören. — Die zweite Integration (nach φ) giebt die verlangte Summe dieſer Produktchen für die keilförmige Scheibe, welche aus allen zu demſelben θ gehörigen vorbeſchriebenen (abgekürzt) pyramidaliſchen Körperchen beſteht, d. h. von den zu θ und $\theta + d\theta$ gehörigen, durch OX hindurch gehenden Ebenen begrenzt wird, übrigens aber die durch φ' und φ'' beſtimmten Grenzen hat. — Die letzte Integration (nach θ) endlich giebt die verlangte Summe die-

Anmerk. Wir verweisen hinsichtlich der nähern Details vorzüglich auf (I. Th. Geom. §§. 6. u. 15.), wo dieselben Sätze für den besondern Fall behandelt sind, in welchem $F = 1$ ist, und wo daher die Summe dieser Produkte nichts weiter als die Summe aller Elementchen selbst, d. h. der Inhalt der Körper- oder Flächen-Figuren, oder die Länge der Linien ist. Es ist besonders auch deshalb daselbst sorgfältig nachzulesen, weil wir hier nicht wiederholen wollten, warum die Resultate doch ganz genau sind, wenn wir auch bei dem einzelnen Summiren die Grenz-Stückchen, welche Theile der Elementchen sind, und welche bei dem Zertheilen der Körper- oder Flächen-Figur an den krummen Grenzen in der Regel übrig bleiben, entweder gar nicht mitgezählt, oder als vollständige Elemente in Rechnung gebracht zu haben scheinen.

§. 54.

Ist im (§. 53.) F die Dichtigkeit des jedesmaligen Elementchens, so daß wir also voraussetzen, daß die Dichtigkeit der in Rede stehenden materiellen Linien, Flächen oder Körper von Elementchen zu Elementchen stetig sich ändert, so drücken die Produkte aus dem Elementchen und F, nach (§. 43. II.) die Masse des Elementchens, und die End-Integrale in dem (§. 53.), die Summe aller dieser Massen-Theilchen, also die Masse der ganzen materiellen Linie, Fläche, oder des ganzen materiellen Körpers aus, wenn nur letztere Normal-Figuren sind, d. h. die im (§. 51.) vorausgesetzten Grenzen haben.

Will man den Inhalt oder die Masse einer Flächen-Figur oder eines begrenzten Körpers finden, die keine Normal-Figuren sind, d. h. welche andere Grenzen haben, als die im (§. 51.) vorausgesetzten, so müssen sie vorher in zwei oder mehrere Normal-Figuren (welchen also die vorausgesetzten Grenzen zukom-

---

ser Produktchen für alle Elemente in allen diesen keilförmigen Scheiben, wie sie zwischen den durch θ' und θ'' gegebenen Ebenen liegen und den ganzen gegebenen Körper ausmachen.

men) zerlegt werden, so daß dann die Inhalte oder die Massen dieser einzelnen Theile, dem Vorstehenden nach, gefunden, die Resultate aber addirt oder subtrahirt werden müssen, je nachdem die gegebene Flächen- oder Körper-Figur als eine Summe, oder als eine Differenz dieser genannten Theile, d. h. dieser Normal-Figuren erscheint.

Das nächste Kapitel wird hierzu Beispiele liefern.

Die Statik fester Körper.

Siebentes Kapitel.

Schwer-Punkts-Bestimmungen.

§. 55.

Zur Bestimmung der Schwer-Punkte gebrauchen wir vorzugsweise folgende Sätze:

I. Besteht eine materielle Linie, Fläche, oder ein materieller Körper aus n Theilen, deren Gewichte P_1, P_2, $P_3 \cdots P_n$ sind; ist P_0 das Gewicht des Ganzen; und sind $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$ und u_0 die senkrechten Abstände der Schwer-Punkte der Theile und des Ganzen von einer beliebigen Ebene E, positiv oder negativ genommen, je nachdem die Schwer-Punkte diesseits oder jenseits der Ebene E liegen, so ist nicht bloß

$$(\mathbb{C}) \cdots P_0 = \Sigma(P), \text{ d. h. } P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n,$$

sondern auch noch

$$(\odot) \cdots P_0 \cdot u_0 = \Sigma(P \cdot u),$$

d. h. $$P_0 \cdot u_0 = P_1 \cdot u_1 + P_2 \cdot u_2 + P_3 \cdot u_3 + \cdots + P_n \cdot u_n.$$

Solches geht unmittelbar aus (§. 46.) und aus (§. 39.) hervor, in so ferne man sich diese beliebige Ebene E als eine der dortigen Koordinaten-Ebenen denken kann.

Die Gleichung $(\odot)$ gilt aber augenfällig noch, wenn $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$ und u_0 schiefe, jedoch unter sich parallel, übrigens positiv und negativ genommene Abstände von der Ebene E sind.

Die Produkte $P_1 \cdot u_1$, $P_2 \cdot u_2$, $\cdots P_n \cdot u_n$ und $P_0 \cdot u_0$ nennt man

in jedem Falle Schwer-Punkts-Momente (auch wohl schlechtweg die Momente) in Bezug auf diese Ebene E, welche letztere deshalb auch die Momenten-Ebene genannt wird. — Diese Momente sind aber dann von den früheren statischen Momenten wohl zu unterscheiden.

II. Nimmt man drei solche Gleichungen (⊙) in Bezug auf drei beliebige, auf einander senkrecht oder schief stehende (Momenten-) Ebenen, so hat man Gleichungen genug, um die Lage des Schwer-Punktes des Ganzen zu bestimmen, wenn die Schwer-Punkte der einzelnen Theile bekannt sind, oder auch um den Schwer-Punkt eines der Theile zu finden, wenn die Schwer-Punkte des Ganzen und aller übrigen Theile bekannt sind.

III. Liegen die gegebenen n Schwer-Punkte alle in einer und derselben Ebene, so liegt nach (§. 40. Nr. 2.) der gesuchte (n+1)ste Schwer-Punkt in derselben Ebene. Nimmt man die Momenten-Ebene senkrecht auf dieselbe Ebene, so daß sich beide in der geraden Linie L schneiden, so erkennt man, daß die Gleichung (⊙) giltig bleibt, auch wenn u_1, u_2, u_3 ··· u_n und u_0 die unter sich parallelen (senkrechten oder schiefen), übrigens positiv und negativ genommenen Entfernungen von dieser Linie L sind, welche letztere deshalb wohl auch die Momenten-Axe genannt wird. Zwei solche Momenten-Gleichungen (⊙) reichen dann hin, um die Lage eines dieser n+1 Schwer-Punkte zu finden, wenn die übrigen n Schwer-Punkte alle gegeben sind.

IV. Liegen alle Schwer-Punkte in einer und derselben Geraden, — dies ist aber nach (§. 40. Nr. 3.) schon der Fall, wenn alle bis auf einen einzigen, in einer und derselben Geraden liegen, — so kann man die Momenten-Ebene E senkrecht auf diese Gerade nehmen, in einem beliebigen Punkte O der letzteren. Folglich bleibt die Gleichung (⊙) noch giltig, wenn u_1, u_2, u_3, ··· u_n und u_0 die positiv und negativ genommenen Entfernungen der Schwer-Punkte von diesem Punkte O sind. — Eine einzige solche Gleichung reicht aber dann schon hin, um einen dieser n+1 Schwer-Punkte gefunden zu haben, sobald die n übrigen alle gegeben sind.

V.

V. Aus (§. 40. Nr. 1.) und aus (§. 47. I.) folgt noch, daß man in den Gleichungen (☾ und ⊙) statt der Gewichte auch die Massen der Theile und des Ganzen setzen kann. — Dies soll aber im Folgenden immer geschehen.

VI. Sollte jedoch das Ganze homogen seyn, d. h. sollten die Theile (und das Ganze) alle eine und dieselbe Dichtigkeit haben, so folgt noch aus (§. 40. Nr. 1.) und aus (§. 43. II. oder §. 47. II.), daß man in den Gleichungen (☾ und ⊙) statt der Gewichte oder statt der Massen auch die bloßen Volumina setzen kann. Dies letztere geschieht am bequemsten dadurch, daß man in den Produkten aus Dichtigkeit und Volumen, wodurch die Massen ausgedrückt werden, den Faktor, der die Dichtigkeit vorstellt, wegläßt (oder $= 1$ setzt, was in der Rechnung dasselbe liefert). — Auch dies werden wir in der Folge immer thun, so oft wir es mit homogenen materiellen Linien, Flächen oder Körpern zu thun haben werden.

§. 56.

Allgemeine Formeln für den Schwer-Punkt.

I. Soll nun von irgend einer materiellen Fläche, oder von einem materiellen Körper der Schwer-Punkt gefunden werden, so zerlegt man solche zunächst, wenn sie nicht an sich schon Normal-Figuren sind, d. h. wenn sie nicht bereits die im (§. 51.) vorausgesetzten Grenzen haben, in zwei oder mehr Normal-Figuren, welche also diese vorausgesetzten Grenzen haben, — berechnet die Schwer-Punkte dieser Theile und daraus nach (§. 55. I. ☾ ⊙) den Schwer-Punkt des Ganzen. — Es kommt also alles darauf an, den Schwer-Punkt einer Normal-Figur, d. h. einer Fläche oder eines Körpers zu finden, welche gerade die im (§. 51.) vorausgesetzten Grenzen haben. — Wir betrachten daher in dem Nachstehenden ganz allein diese Normal-Figuren, welche jedoch nach (§. 51.) im Allgemeinen andere Grenzen haben für rechtwinkliche Koordinaten, andere wieder für Polar-Koordinaten.

II. Soll nun von einer gegebenen begrenzten materiellen Li-

ufe oder materiellen Normal-Fläche, oder von einem materiellen Normal-Körper, deren oder deſſen Maſſe wir durch M bezeichnen wollen, während V das zugehörige Volumen vorſtellen ſoll, der Schwer-Punkt gefunden werden, — ſo zerlegt man ſie zuerſt genau nach (§. 52.) in die dortigen Elementchen, welche wir hier, es mögen Längen-, Flächen- oder Körper-Elementchen ſeyn, durch dv bezeichnen wollen. Multiplizirt man dann jedes dieſer Elementchen dv mit der Dichtigkeit deſſelben, welche eine Funktion f der Stelle dieſes Elementchens iſt und gegeben ſeyn muß, ſo hat man nach (§. 43. II.) die Maſſe f·dv dieſes Elementchens, und dieſe mag durch dm bezeichnet werden, ſo daß man

$$dm = f \cdot dv$$

hat. Iſt nun u die poſitiv oder negativ genommene Entfernung des Schwer-Punktes des Elementchens dm (oder dv) von irgend einer Momenten-Ebene E, und u_0 die poſitiv oder negativ genommene Entfernung des Schwer-Punktes des ganzen M (oder V) von derſelben Momenten-Ebene E, ſo hat man nach (§. 55. (◯) (⊙)) allemal

$$(◯) \cdots M = \Sigma(f \cdot dv) \quad \text{und} \quad (⊙) \cdots M \cdot u_0 = \Sigma(f \cdot u \cdot dv),$$

wo f und u Funktionen der rechtwinklichen oder der Polar-Koordinaten ſind, welche die Stelle des Elementchens, d. h. die Stelle ſeines Schwer-Punktes beſtimmen. Statt der Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes eines ſolchen unendlich-kleinen Elementchens kann man jedoch die Koordinaten-Werthe eines jeden andern Punktes deſſelben Elementchens nehmen, weil ſolche nur um ein Unendlich-Kleines von einander verſchieden ſind, und dieſer Unterſchied nach (§. 20. Analyſ. Th. I.) gegen endliche Werthe nicht in Rechnung geſtellt werden darf. Die Ausdrücke $\Sigma(f \cdot dv)$ und $\Sigma(f \cdot u \cdot dv)$ drücken dabei die Summen aller dieſer Produktchen aus, welche das Elementchen dv und dann noch die Funktion f oder die Funktion f·u zu Faktoren haben. Dieſe durch Σ ausgedrückten Summen findet man daher nach (§. 53.) ohne weiteres und zwar durch einfache, doppelte, oder dreifache

Integration, je nachdem der Schwer-Punkt einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers gesucht wird.

III. Ist das Ganze homogen, so setzt man in diesen Formeln (☾ und ⊙) $f = 1$ und V statt M, nach (§. 55. VI.).

IV. Jedesmal findet man aber aus beiden Gleichungen (☾ und ⊙) den positiven oder negativen Abstand u_0 des gesuchten Schwer-Punktes von der Momenten-Ebene.

Obgleich nun hiermit die Auffindung des Schwer-Punktes für jede feste Masse beendigt ist, so mögen doch nachstehende (§§. 57.—62.) noch die einzelnen Fälle näher in's Auge fassen.

§. 57.

Schwer-Punkt der geraden Linie.

Soll namentlich der Schwer-Punkt einer geraden Linie gefunden werden, so nimmt man am bequemsten sie selber zur Axe OX und legt durch einen beliebigen Punkt O derselben die Momenten-Ebene E senkrecht auf sie. Dann ist $dv = dx$, $u = x$, und u_0 der Abscissen-Werth des gesuchten Schwer-Punktes, den wir durch x_0 bezeichnen wollen. Es findet sich also nach (§. 56.)

$$(☾)\cdots\ M = \int_{x''\div x'} f\cdot dx \quad \text{und} \quad (⊙)\cdots\ M\cdot x_0 = \int_{x''\div x'} f\cdot x\cdot dx,$$

wo die Dichtigkeit f als eine Funktion von x gedacht ist.

1tes Beispiel. Ist die Gerade homogen, so hat man hieraus nach (§. 55. VI.)

$$(☾_1)\cdots\qquad V = \int_{x''\div x'} 1\cdot dx = x'' - x';$$

und $(⊙_1)\cdots\quad V\cdot x_0 = \int_{x''\div x'} x\cdot dx = \frac{1}{2}(x''^2 - x'^2)$,

woraus noch $$x_0 = \tfrac{1}{2}(x'' + x')$$

hervorgeht. Also liegt der Schwer-Punkt einer homogenen Geraden in ihrer Mitte; was auch an sich in die Augen fällt.

2tes Beispiel. Ist die Dichtigkeit der Geraden mit ihrer Abscisse x proportional, ist also

$$f_x = m\cdot x,$$

so hat man, weil $\int m\cdot x\cdot dx = \frac{1}{2}m\cdot x^2$ und $\int m\cdot x^2\cdot dx = \frac{1}{3}m\cdot x^3$ ist,

$(☾)\cdots\ M = \frac{1}{2}m\cdot(x''^2 - x'^2)$ und $(⊙)\cdots\ M\cdot x_0 = \frac{1}{3}m\cdot(x''^3 - x'^3)$;

folglich

$$x_0 = \tfrac{2}{3}\,\frac{x''^3 - x'^3}{x''^2 - x'^2}.$$

Für $x' = 0$, d. h. wenn der eine End-Punkt der Geraden in O ſelber liegt, folgt hieraus

$$x_0 = \tfrac{2}{3}x''.$$

§. 58.

Schwer-Punkt ebener Kurven und ebener Normal-Flächen-Figuren.

Soll der Schwer-Punkt einer ebenen Kurve oder einer ebenen Normal-Flächen-Figur gefunden werden, ſo nimmt man am beſten abwechſelnd in derſelben Ebene die auf einander ſenkrechten OY und OX zu Momenten-Axen, ſo daß man abwechſelnd $u = x$ und $u = y$ hat. Bezeichnen wir nun die rechtwinklichen Koordinaten-Werthe des geſuchten Schwer-Punktes durch x_0 und y_0, ſo muß man, wenn $u = x$ iſt, $u_0 = x_0$ nehmen; wenn aber $u = y$ iſt, auch y_0 ſtatt u_0 ſetzen.

A. Für die Kurve, welche durch eine Gleichung zwiſchen x und y, oder durch eine Gleichung zwiſchen r und φ gegeben iſt, hat man nun aus (§. 56.)

a) bei rechtwinklichen Koordinaten

$$(\mathbb{C})\cdots \quad M = \int_{x''\div x'} f\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot dx$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} M\cdot x_0 = \int_{x''\div x'} f\cdot x\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot dx \\ M\cdot y_0 = \int_{x''\div x'} f\cdot y\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot dx \end{cases}$$

wo die Dichtigkeit f (eben ſo wie y) als eine Funktion von x gegeben ſeyn ſoll;

b) bei dem Gebrauche der Polar-Elementchen, weil

$$x = e + r\cdot\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\cdot\sin\varphi$$

iſt,

$$(\mathbb{C})\cdots \quad M = \int_{\varphi''\div\varphi'} f\cdot\sqrt{r^2+\partial r_\varphi^{\,2}}\cdot d\varphi$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} M\cdot(x_0 - e) = \int_{\varphi''\div\varphi'} f\cdot r\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{r^2+\partial r_\varphi^{\,2}}\cdot d\varphi \text{ *)} \\ M\cdot y_0 = \int_{\varphi''\div\varphi'} f\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{r^2+\partial r_\varphi^{\,2}}\cdot d\varphi, \end{cases}$$

*) Es wird rechts $e + r\cdot\cos\varphi$ ſtatt x geſetzt. Deshalb beſteht das Integral, welches rechts entſteht, aus zwei Theilen, von denen jedoch der erſtere $= e\cdot M$ ſich ausweiſt, ſo daß er ſogleich mit dem Gliede $M\cdot x_0$ links vereinigt werden kann.

wo f (eben so wie r) als eine gegebene Funktion von φ angesehen wird.

In diesen Formeln bedeutet M jedesmal die Masse des Bogens, dessen Schwer-Punkt gefunden werden soll.

Ist aber der Bogen homogen, so setzt man $f = 1$ und V statt M, und dieselben Formeln (Ⓒ und ⊙) geben dann das Volumen (die Länge) V des Bogens, so wie wiederum die Koordinaten-Werthe x_0, y_0 seines Schwer-Punktes in Bezug auf die rechtwinklichen Axen OX und OY.

B. Für die ebene Normal-Flächen-Figur, und zwar wenn

c) rechtwinkliche Koordinaten vorausgesetzt werden (§. 51. I. a.)

$$(Ⓒ)\cdots \quad M = \int_{x''\div x'} \left(\int_{y''\div y'} f \cdot dy \right) \cdot dx$$

und

$$(⊙)\cdots \begin{cases} M \cdot x_0 = \int_{x''\div x'} \left(\int_{y''\div y'} f \cdot x \cdot dy \right) \cdot dx \\ M \cdot y_0 = \int_{x''\div x'} \left(\int_{y''\div y'} f \cdot y \cdot dy \right) \cdot dx \end{cases}$$

wo d. Dichtigkeit f als eine Funktion von x u. y gedacht ist, während x und y von einander unabhängig sind und jeder Stelle in der Figur zukommen.

d) Bei dem Gebrauch der Polar-Elementchen, also wenn die Figur die Grenzen hat, welche durch $r_{\varphi''}$, $r_{\varphi'}$, φ'' und φ' (§. 51. I. b.) gegeben sind, ist dagegen, immer nach (§. 56.),

$$(Ⓒ)\cdots \quad M = \int_{\varphi''\div\varphi'} \left(\int_{r''\div r'} f \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\varphi$$

und

$$(⊙)\cdots \begin{cases} M \cdot (x_0 - e) = \int_{\varphi''\div\varphi'} \left(\int_{r''\div r'} f \cdot r^2 \cdot \cos\varphi \cdot dr \right) \cdot d\varphi \\ M \cdot y_0 = \int_{\varphi''\div\varphi'} \left(\int_{r''\div r'} f \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \right) \cdot d\varphi \end{cases}$$

wo jetzt die Dichtigkeit f als eine Funktion von r und φ angesehen ist, während r und φ von einander ganz unabhängig sind. — In allen diesen Formeln bedeutet aber M die Masse des gegebenen Normal-Flächen-Stücks.

Ist die Fläche homogen, so setzt man $f = 1$ und (das Volumen) V statt (der Masse) M, und die Gleichungen (c, d) bleiben dann noch giltig. Man kann aber dann in (c und d)

die erstere Integration wirklich ausführen, weil $\int 1 \cdot dy = y$, $\int x \cdot dy = x \cdot y$, $\int y \cdot dy = \frac{1}{2}y^2$, $\int r \cdot dr = \frac{1}{2}r^2$, und $\int r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr = \frac{1}{3}r^3 \cdot \sin\varphi$ ist, und man hat daher

C. für die homogene Normal-Flächen-Figur

e) bei rechtwinklichen Koordinaten

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad V = \int_{x''\div x'} (y'' - y') \cdot dx$$

und

$$(\odot)\cdots \qquad V \cdot x_0 = \int_{x''\div x'} x \cdot (y'' - y') \cdot dx;$$

$$V \cdot y_0 = \int_{x''\div x'} \tfrac{1}{2}(y''^2 - y'^2) \cdot dx;$$

f) bei Polar-Koordinaten dagegen

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad V = \int_{\varphi''\div\varphi'} \tfrac{1}{2}(r''^2 - r'^2) \cdot d\varphi$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} V \cdot (x_0 - e) = \frac{1}{3}\int_{\varphi''\div\varphi'} \cos\varphi \cdot (r''^3 - r'^3) \cdot d\varphi \\ V \cdot y_0 = \frac{1}{3}\int_{\varphi''\div\varphi'} \sin\varphi \cdot (r''^3 - r'^3) \cdot d\varphi \text{ *).} \end{cases}$$

In allen Formeln (a. bis f.) bedeuten x_0 und y_0 die rechtwinklichen Koordinaten-Werthe des gesuchten Schwer-Punktes und solche sind jedesmal aus ($\mathbb{C}$ und $\odot$) ohne weiteres zu finden. —

1tes Beispiel. Den Schwer-Punkt eines homogenen materiellen Kreis-Bogens ACB (Fig. 13.) zu finden, dessen Länge $= l$ und Radius $= \varrho$ ist.

Wenden wir zuerst die Formeln (a.) an, in denen wir aber $k = 1$ und V oder 1 statt M setzen. Da der Schwer-Punkt dasmal offenbar in der Geraden liegt, welche durch den Mittel-Punkt O und den Halbirungs-Punkt C des Bogens geht, so nehme man OCX als Axe der x, und hat schon $y = 0$. Eben so wird dasmal die Formel (a. $\mathbb{C}$) überflüssig, weil $V = l$ schon bekannt ist. Es bleibt daher blos noch x_0 aus (a. $\odot$.) zu finden übrig. Da nun A der Anfangs-Punkt und B der End-Punkt des Bogens ACB ist, so hat man dasmal $x' = OF$, aber auch $x'' = OF$ und

*) Es mag gut seyn, den Anfänger noch einmal daran zu erinnern, daß die Normal-Flächen-Figur, die wir uns bei dem Gebrauche der Polar-Koordinaten denken, im Allgemeinen eine ganz andere ist, als diejenige, welche wir bei dem Gebrauche der rechtwinklichen Koordinaten voraussetzen, nach (§. 51.); daß daher namentlich V in den Formeln (f) nicht dasselbe ist, als V in den Formeln (e), weil V jedesmal den Raum-Inhalt der Flächen-Figur vorstellt.

das Integral in (a. ⊙) zur Rechten scheint = 0 zu werden. Bedenkt man aber, daß der Bogen AC durch die Gleichung

$$y = +\sqrt{\varrho^2 - x^2},$$

der Bogen CB dagegen durch

$$y = -\sqrt{\varrho^2 - x^2}$$

gegeben ist, so sind diese beiden Theile des ganzen Bogens ACB als zwei verschiedene Kurven anzusehen, so daß für jeden einzelnen Theil die Summe der Momente besonders gesucht werden muß.

Für den Theil AC ist $x' = OF = \varrho \cdot cos\frac{1}{2}\lambda$, wenn $\lambda = \frac{1}{\varrho}$ der Winkel AOB ist (im Bogen-Längen-Maaß für den Radius 1); ferner $x'' = \varrho$, so wie noch

$$y = +\sqrt{\varrho^2 - x^2}, \quad \partial y_x = \frac{-x}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \partial y_x^2} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}},$$

also $$\int x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx = \int \frac{\varrho x}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} \cdot dx = -\varrho \cdot \sqrt{\varrho^2 - x^2};$$

folglich ist auch die Summe der Momente für den Theil AC des Bogens

$$= \int_{x'' \div x'} x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx = \left[-\varrho \cdot \sqrt{\varrho^2 - x^2}\right]_{\varrho \div \varrho \cdot cos\frac{1}{2}\lambda} \text{*)} = +\varrho^2 \cdot sin\tfrac{1}{2}\lambda,$$

weil das Integral für $x = \varrho$ der Null gleich wird. Für den andern Theil BC des Bogens ACB ist

$$y = -\sqrt{\varrho^2 - x^2}, \quad \partial y_x = \frac{x}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + \partial y_x^2} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}},$$

und x' und x'' sind genau so wie beim ersten Theil AC des Bogens ACB. Also bekommt man die Summe der Momente für diesen Theil BC gerade so groß wie für den ersten Theil AC (wie sich auch von selbst versteht). Demnach ist die Summe der Momente des ganzen Bogens ACB in Bezug auf die Momenten-Axe OY bekannt, nämlich

$$V \cdot x_0 = 2\varrho^2 \cdot sin\tfrac{1}{2}\lambda = \varrho \times \text{Sehne AB},$$

während $V = l = \varrho \cdot \lambda$ ist, so daß man

$$x_0 = 2\varrho \cdot \frac{sin\frac{1}{2}\lambda}{\lambda} = \frac{\varrho \times \text{Sehne AB}}{l}, \quad \text{oder} \quad l : \text{Sehne AB} = \varrho : x_0$$

bekommt, d. h. die Entfernung x_0 des Schwer-Punktes vom Mittel-Punkte O ist in demselben Verhältnisse kürzer als der Radius, in welchem die Sehne AB kürzer ist als der Bogen ACB **).

---

*) Dieses Zeichen soll andeuten das was herauskommt, wenn man in dem eingeklammerten Ausdruck $-\varrho \cdot \sqrt{\varrho^2 - x^2}$ zuerst ϱ, dann $\varrho \cdot cos\frac{1}{2}\lambda$ statt x setzt, und das zuletzt Erhaltene von dem erst Erhaltenen subtrahirt.

**) Hätte man die auf dieselben Axen OX und OY bezogenen Koordinaten-Werthe x_0, y_0 des Schwer-Punktes des Theiles AC allein ge-

Löst man dieselbe Aufgabe mittelst der Formeln (b.), so hat man, wenn $e = 0$ gesetzt wird, als Gleichung des Kreises

$$r = \varrho, \quad \text{also} \quad \delta r_\varphi = 0, \quad \sqrt{r^2 + \delta r_\varphi^2} = \varrho;$$

ferner kann man $\varphi' = -\frac{1}{2}\lambda$ *) und $\varphi'' = +\frac{1}{2}\lambda$ nehmen; und man erhält demnach aus (b. ⊙)

$$V \cdot x_0 = \int_{\varphi'' \div \varphi'} r \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{r^2 + \delta r_\varphi^2} \cdot d\varphi = \int_{\varphi'' \div \varphi'} \varrho^2 \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi,$$

oder

$$V \cdot x_0 = \varrho^2 \cdot (\sin\varphi'' - \sin\varphi') = 2\varrho^2 \cdot \sin\tfrac{1}{2}\lambda,$$

wo $V = l$ ist, so daß hieraus $x_0 = \frac{2\varrho^2 \cdot \sin\frac{1}{2}\lambda}{l}$ genau so wie oben hervorgeht. —

2tes Beispiel. Den Schwer-Punkt des homogenen Kreis-Abschnittes ACBA zu finden (Fig. 13.).

Läßt man alles wie im vorigen Beispiel, so ist wiederum $y_0 = 0$, und $V = \text{Sektor AOBCA} - \Delta\,AOB = \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot \lambda - \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot \sin\lambda$, also ist die Gleichung (C) ebenfalls überflüssig und nur noch x_0 zu finden. Wenden wir dabei die rechtwinklichen Koordinaten an, so wird, weil dasmal

$$y'' = +\sqrt{\varrho^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y' = -\sqrt{\varrho^2 - x^2}$$

ist, aus der Formel (e. ⊙)

$$V \cdot x_0 = \int_{x'' \div x'} 2x \cdot \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot dx = \left[-\tfrac{2}{3}(\varrho^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x'' \div x'}.$$

Weil aber dasmal $x' = \varrho \cdot \cos\frac{1}{2}\lambda$ und $x'' = \varrho$ ist, so giebt dies

$$V \cdot x_0 = \tfrac{2}{3}\varrho^3 \cdot (\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^3; \quad \text{also} \quad x_0 = \tfrac{2}{3}\varrho \cdot \frac{(\sin\frac{1}{2}\lambda)^3}{\lambda - \sin\lambda};$$

so daß die Abscisse x_0 (von O an auf OX gerechnet) des Schwer-Punktes des homogenen Kreis-Segments ACBA gefunden ist **). Wollte man

---

sucht, so wäre $V = \frac{1}{2}l$, dagegen auch $V \cdot x_0$ nur halb so groß als für ACB; folglich hätte man für x_0 denselben Werth erhalten, wie bei dem ganzen Bogen ACB. — Dagegen hätte die zweite Gleichung (a. ⊙) jetzt noch dazu geliefert zur Bestimmung von y_0,

$$\tfrac{1}{2}l \cdot y_0 = \int_{x'' \div x'} \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cdot \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} \cdot dx = \int_{x'' \div x'} \varrho \cdot dx = \varrho^2 \cdot (1 - \cos\tfrac{1}{2}\lambda).$$

Für den Bogen BC dagegen hätte man, da nun y negativ ist, y_0 zwar eben so groß, aber ebenfalls negativ gefunden.

*) Wäre nämlich OZ die Axe der x, so wäre $\varphi' = \text{W. BOZ} = \text{W. COZ} - \frac{1}{2}\lambda$. — So wie nun OZ der OC näher rückt, so wird W. COZ kleiner und kleiner, während immer noch $\varphi' = \text{W. COZ} - \frac{1}{2}\lambda$ bleibt. Fällt zuletzt OZ mit OC zusammen, so wird W. COZ $= 0$ und dann auch $\varphi' = 0 - \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}\lambda$.

**) Würde der Schwer-Punkt vom halben Segment AFCA gesucht, so würde man für x_0 genau denselben Werth erhalten. Dagegen würde die zweite Gleichung (e. ⊙) nun auch y_0 dazu zu liefern haben, während das-

dieselbe Aufgabe mittelst der Formeln (f.), d. h. mit Zuziehung der Polar-Koordinaten lösen, so würde man sogleich finden, daß das Segment die dazu nach (§. 51.) vorausgesetzten Grenzen nicht hat, d. h. für Polar-Koordinaten keine Normal-Figur ist. Man müßte dann erst den Schwer-Punkt des Sektors AOBCA suchen, dann den Schwer-Punkt des Dreiecks, und zuletzt nach (§. 55. I.) daraus erst den Schwer-Punkt des Segments.

3tes Beispiel. Den Schwer-Punkt des homogenen Sektors AOBCA zu finden (Fig. 13.).

Derselbe befindet sich wieder in OX, also ist $y_0 = 0$. Das Volumen findet sich direkt, nämlich $V = \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot \lambda$, also bleibt nur noch x_0 zu suchen übrig, was mittelst der ersten Gleichung (f. ⊙) geschieht, indem man $e = 0$ setzt und $r'' = \varrho$, $r' = 0$, $\varphi'' = \frac{1}{2}\lambda$ und $\varphi' = -\frac{1}{2}\lambda$ hat. — Man erhält dann

$$V \cdot x_0 = \int_{\varphi'' \div \varphi'} \tfrac{1}{3} \cos\varphi \cdot \varrho^3 \cdot d\varphi = \tfrac{1}{3}\varrho^3 \cdot (\sin\varphi'' - \sin\varphi') = \tfrac{2}{3}\varrho^3 \cdot \sin\tfrac{1}{2}\lambda$$

und daraus

$$x_0 = \tfrac{2}{3}\varrho \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda}{\lambda}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem des (Beisp. 1.), so findet man, daß der Schwer-Punkt des Sektors AOBCA zusammenfällt mit dem Schwer-Punkt eines Kreis-Bogens, welcher aus O als Mittel-Punkt zwischen OA und OB mit dem Radius $\frac{2}{3}\varrho$ beschrieben ist.

Wollte man bei dieser Aufgabe die Formeln (e.) für rechtwinkliche Koordinaten gebrauchen, so würde man finden, daß der Sektor die dazu im (§. 51.) vorausgesetzten Grenzen nicht hat, um nun noch eine Normal-Figur zu seyn. Man müßte ihn daher in das Dreieck und in das Segment zerlegen, für letztere beide den Schwer-Punkt mittelst der Formeln (e) finden, und dann daraus nach (§. 55. I.) den Schwer-Punkt des ganzen Sektors herstellen.

4tes Beispiel. Den Schwer-Punkt eines homogenen Dreiecks ABC (Fig. 17.) zu finden.

Man lege durch A die Axen OX und OY, und zwar OX senkrecht auf die Seite BC, setze die Höhe $AH = b$, so wie die Winkel $CAH = \alpha$ und $BAH = \beta$ als bekannt voraus, und hat nun, da AC und AB die durch y'' und y' gegebenen, A und BC aber die durch x' und x'' gegebenen Grenzen sind, endlich weil $CH = b \cdot tg\,\alpha$ und $BH = b \cdot tg\,\beta$ ist,

---

mal $V = \frac{1}{4}\varrho^2 \cdot (\lambda - \sin\lambda)$ wäre. Weil aber dasmal $y' = 0$ ist, so giebt die zweite Gleichung (e. ⊙)

$$V \cdot y_0 = \int_{x'' \div x'} \tfrac{1}{2} y'^2 \cdot dx = \int_{x'' \div x'} \tfrac{1}{2}(\varrho^2 - x^2) \cdot dx = \left[\tfrac{1}{2}\varrho^2 \cdot x - \tfrac{1}{6}x^3\right]_{x'' \div x'},$$

d. h.

$$V \cdot y_0 = \tfrac{1}{2}\varrho^3\left(1 - \cos\tfrac{1}{2}\lambda\right) - \tfrac{1}{6}\varrho^3\left(1 - \cos\tfrac{1}{2}\lambda^3\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}\varrho^3 \cdot \sin\tfrac{1}{4}\lambda^4 \cdot \left(1 + 2\cos\tfrac{1}{4}\lambda^2\right),$$

also daß

$$y_0 = \tfrac{8}{3}\varrho \cdot \frac{(\sin\frac{1}{4}\lambda)^4 \cdot [1 + 2(\cos\frac{1}{4}\lambda)^2]}{\lambda - \sin\lambda}$$

wird.

$$y'' = x \cdot tg\,\alpha \quad \text{und} \quad y' = -x \cdot tg\,\beta.$$

Also ist auch

$$\int (y'' - y') \cdot dx = \int x \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta) \cdot dx = \tfrac{1}{2} x^2 \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta);$$

$$\int x \cdot (y'' - y') \cdot dx = \int x^2 \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta) \cdot dx = \tfrac{1}{3} x^3 \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta)$$

und $$\tfrac{1}{2}\int (y''^2 - y'^2) \cdot dx = \tfrac{1}{2}\int x^2 \cdot (tg\,\alpha^2 - tg\,\beta^2) \cdot dx = \tfrac{1}{3} x^3 \cdot (tg\,\alpha^2 - tg\,\beta^2).$$

Nimmt man nun diese Integrale zwischen den Grenzen 0 und b, so daß das erstere dieser drei Integrale, nämlich $\frac{1}{2} x^2 \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta)$ den Inhalt $ABC = V = \frac{1}{2} b^2 \cdot (tg\,\alpha + tg\,\beta)$ giebt, so liefern die Formeln (e. (u. ⊙) jetzt

$$x_0 = \tfrac{2}{3} b \quad \text{und} \quad y_0 = \tfrac{1}{3} b \cdot (tg\,\alpha - tg\,\beta) = \tfrac{1}{3}(CH - BH).$$

Halbirt man die BC in K, so hat man

$$CH = CK + KH, \qquad BH = CK - KH,$$

also $$CH - BH = 2KH \quad \text{und} \quad y_0 = \tfrac{2}{3} KH.$$

Zieht man die AK, macht man $AL = x_0 = \frac{2}{3} b = \frac{2}{3} AH$, und zieht die LG senkrecht darauf, bis sie der Halbirungs-Linie begegnet, so wird seyn

$$LG : AL = KH : AH, \text{ d. h. } LG = \tfrac{2}{3} KH = y_0.$$

„Der Schwer-Punkt G des homogenen Dreiecks ACB liegt also in der „Linie AK, welche die Seite BC halbirt, und um $\frac{2}{3}$AK von A ent„fernt *)."

---

*) Denkt man sich im Dreieck ABC lauter materielle gerade Linien mit BC parallel, so werden sie alle durch AK halbirt. In diesen Linien kann man nun von den einzelnen Atomen die Schwere wegnehmen, sobald man das Gewicht dieser Linien (welches mit ihren Längen, also auch mit ihren, auf AK genommenen Entfernungen von A proportional ist) in ihrem Schwer-Punkte, d. h. in ihrer Mitte, d. h. in AK anbringt.

Das obige Problem reduzirt sich daher vermöge dieser Betrachtung auf das andere, welches im (Beisp. 2. zu §. 57.) bereits gelöst ist.

Durch diese Betrachtung kann man auch den Schwer-Punkt eines Dreiecks ohne alle Rechnung finden. Aus demselben Grunde nämlich, aus welchem er in der Linie AK liegt (welche deshalb Schwer-Linie heißt) muß er auch in der Linie BD liegen, welche die Seite AC halbirt, so daß auch BD eine Schwer-Linie ist. Also liegt der Schwer-Punkt G da, wo beide Schwer-Linien AK und BD sich schneiden.

Zieht man dann die DK, so ist DK mit AB parallel und die Hälfte von AB; also ist auch KG die Hälfte von AG; d. h. $KG = \frac{1}{3} AK$ und $AG = \frac{2}{3} AK$.

Denkt man sich einen Kreis-Sektor AOB (Fig. 13.) durch unendlich viele Radien in unendlich viele unendlich-kleine Sektorchen zertheilt, so können letztere als Dreieckchen angesehen werden, deren Schwer-Punkt um $\frac{2}{3}\varrho$ von O absteht. Man kann sich daher die Gewichte aller dieser Sektorchen in dem mit dem Radius $\frac{2}{3}\varrho$ aus O als Mittel-Punkt beschriebenen Kreis-Bogen gleichmäßig vertheilt denken; und so kommt man auch von dieser Seite darauf, daß der Schwer-Punkt des letztern Kreis-Bogens mit dem Schwer-Punkt des ganzen Sektors zusammenfallen müsse, wenn

Diese Aufgabe löst sich aber auch recht hübsch, wenn man die Formeln (f.) für die Polar-Koordinaten anwendet, wo dann die Linie BC durch die Gleichung

$$r'' = \frac{b}{\cos\varphi}$$

gegeben, die andere Grenze $r' = 0$ ist, und wo man nachgehends noch $\varphi'' = \alpha$ und $\varphi' = -\beta$ hat.

5tes Beispiel. Den Schwer-Punkt des homogenen Bogens einer Cykloide zu finden.

Es sey (Fig. 14.) O'QE die Cykloide, l der Radius ihres Erzeugungs-Kreises, O ihr Scheitel, $OP = x$, $PM = y$, so ist nach (I. Th. Gesm. §. 9.) $O'A = l\pi$, $OA = 2l$, und, wenn OA in B halbirt und der Winkel $mBQ = w$ gesetzt wird,

$$MP' = l + l\cdot\cos w, \quad O'P' = l(\pi - w) - l\cdot\sin w;$$

demnach

$$x = l\cdot(1 - \cos w) \quad \text{und} \quad y = l\cdot(w + \sin w),$$

woraus, wenn man w eliminirt, auch

$$y = l\cdot\frac{1}{\cos}\frac{l-x}{l} + \sqrt{2lx - x^2}\ ^*)$$

und $\delta y_x = \sqrt{\left(\frac{2l-x}{x}\right)}$ **), so wie $\sqrt{1+\delta y_x^2} = \sqrt{\left(\frac{2l}{x}\right)}$ hervorgeht.

Die Gleichungen (a.) geben nun, wenn man 1 statt f, und V statt M setzt, wo V die Länge des Bogens bedeutet,

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad V = \int_{x''\div x'} dx\cdot\sqrt{\left(\frac{2l}{x}\right)} = \left[2\sqrt{2lx}\right]_{x''\div x'}$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} V\cdot x_0 = \int_{x''\div x'} dx\cdot\sqrt{2lx} = \left[\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{2lx}\right]_{x''\div x'} \\ V\cdot y_0 = \int_{x''\div x'} dx\cdot y\cdot\sqrt{\left(\frac{2l}{x}\right)} \\ \qquad = \left[2y\cdot\sqrt{2lx} + \frac{4}{3}\sqrt{2l}\cdot(2l-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{x''\div x'}\ ^{***}). \end{cases}$$

---

beide homogen gedacht werden; gerade so, wie wir dies auch im (Beispiel 3.) gefunden haben.

*) Wir schreiben immer $\frac{1}{\cos}v$ statt $arc\text{-}\cos v$.

**) Man hat auch $\delta y_x = \frac{\delta y_w}{\delta x_w} = \frac{1+\cos w}{\sin w}$, dabei aber

$$\cos w = \frac{l-x}{l},$$

und daraus folgt dasselbe Resultat für δy_x wie oben.

***) Um $\int y\cdot\sqrt{\left(\frac{2l}{x}\right)}\cdot dx$ bequem zu finden, wendet man die Formel

Wird z. B. der Schwer-Punkt von OM gesucht, so hat man $x' = 0$, $x'' = x$, und die Gleichungen (ℭ und ⊙) geben

$$V = 2\sqrt{2lx},\quad x_0 = \tfrac{1}{3}x \text{ und } y_0 = y - \tfrac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot[(2l)^2 - (2l-x)^{\frac{5}{2}}].$$

Für den halben Bogen O′MO, wo $x = 2l$ und $y = l\pi$ wird, findet sich demnach der Abstand des Schwer-Punktes von OY, $= \frac{3}{5}l$, von O′Y′ dagegen $= \frac{3}{5}l$, aber eben deshalb auch von O′A, $= \frac{4}{5}l$.

Würde der Schwer-Punkt des ganzen Bogens MON gesucht, so würde man ebenfalls finden

$$x_0 = \tfrac{1}{3}x, \quad \text{aber} \quad y_0 = 0,$$

weil man wieder die andere Hälfte ON als eine zweite Kurve behandeln müßte, deren Ordinate y negativ, deren Moment also in Bezug auf die Momenten-Axe OX ebenfalls negativ wird, so daß sich die Summe der Momente für MON der Null gleich findet (vergl. Beisp. 1.).

6tes Beispiel. Den Schwer-Punkt der homogenen Fläche MOP derselben Cykloide zu finden.

Man hat dasmal nach den Formeln (e.) und weil, wenn wir dieselben Voraussetzungen, wie im vorhergehenden Beispiel machen, $y'' = y$, $y' = 0$, $x'' = x$, $x' = 0$ ist,

$$1)\quad V = \int_{x\div 0} y\cdot dx, \qquad 2)\quad V\cdot x_0 = \int_{x\div 0} xy\cdot dx$$

und

$$3)\quad V\cdot y_0 = \int_{x\div 0} \tfrac{1}{2}y^2\cdot dx.$$

Um aber diese Integrale möglichst bequem zu finden, muß man jedes zuerst theilweise integriren, d. h. nach der Formel

$$4)\qquad \int(u\cdot\partial v_x)\cdot dx = u\cdot v - \int(v\cdot\partial u_x)\cdot dx,$$

so daß man erhält

$\int(u\cdot\partial v_x)\cdot dx = u\cdot v - \int(v\cdot\partial u_x)\cdot dx$ an, und man erhält (indem man $u = y$, $\partial v_x = \sqrt{\left(\frac{2l}{x}\right)}$ setzt)

$$\int y\cdot\sqrt{\left(\frac{2l}{x}\right)}\cdot dx = 2y\cdot\sqrt{2lx} - 2\sqrt{2l}\cdot\int(x^{\frac{1}{2}}\cdot\partial y_x)\cdot dx,$$

oder, wenn man statt ∂y_x seinen Werth setzt, und bedenkt, daß

$$\int\sqrt{2l-x}\cdot dx = -\tfrac{2}{3}(2l-x)^{\frac{3}{2}}$$

ist,

$$\int y\cdot\sqrt{\left(\frac{2l}{x}\right)}\cdot dx = 2y\cdot\sqrt{2lx} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2l}\cdot(2l-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Man kann auch alle drei Integrale in (ℭ und ⊙) dadurch bequem finden, daß man statt dx lieber $\partial x_w\cdot dw$ setzt, alles in w ausdrückt und dann nach w integrirt, zwischen den Grenz-Werthen von w, die den Grenz-Werthen von x entsprechen (vgl. I. Th. Analyt. §. 37.).

5) $\int y \cdot dx = x \cdot y - \int x \cdot \partial y_x \cdot dx = x \cdot y - \int \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx$;

6) $\int x \cdot y \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot y - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \partial y_x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot y - \frac{1}{2} \int x \cdot \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx$;

7) $\int \frac{1}{2} y^2 \cdot dx = \frac{1}{2} x \cdot y^2 - \int x \cdot y \cdot \partial y_x \cdot dx = \frac{1}{2} x \cdot y^2 - \int y \cdot \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx$.

Die beiden erstern Integrale zur Rechten in (5. — 7.) integriren sich nun nach (I. Th. Analys. §. 32. III. A.) ohne weiteres *). Was dagegen das dritte dieser Integrale betrifft, so kann man zwar statt y seinen Werth in x substituiren und die weitere Integration durchsetzen; allein wir ziehen es dasmal vor, den Wälzungs-Winkel w (Beisp. 5.) einzuführen, und nach w zu integriren. Man hat aber

8) $x = l \cdot (1 - \cos w)$, und 9) $y = l \cdot (w + \sin w)$,

also 10) $\partial x_w = l \cdot \sin w$.

Nun ist aber, wegen der Integrations-Formel,

11) $\int \varphi_x \cdot dx = \int \varphi \cdot \partial x_w \cdot dw$,

sogleich

12) $\int y \cdot dx = l^2 \cdot \int (w \cdot \sin w + \sin w^2) \cdot dw$

13) $\int x \cdot y \cdot dx = l^3 \cdot \int (w \cdot \sin w + \sin w^2 - w \cdot \sin w \cdot \cos w - \sin w^2 \cdot \cos w) \cdot dw$

14) $\int \frac{1}{2} y^2 \cdot dx = \frac{1}{2} l^3 \cdot \int (w^2 \cdot \sin w + 2w \cdot \sin w^2 + \sin w^3) \cdot dw$.

Integrirt man nun theilweise, d. h. nach der Integrations-Formel (4.), so ergiebt sich

---

*) Macht man die Bemerkung, daß im Kreise (Fig. 13.), dessen Radius = 1 ist, wenn CP = x und PN = u gesetzt wird, allemal

$$u = \sqrt{2lx - x^2}, \text{ also } \int_{x \div 0} \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx = \text{Inhalt CFA}$$

ist, so kann man dieses Integral auch dadurch finden, daß man den Inhalt CFA = Sektor AOCA — ΔOFA elementar-geometrisch berechnet. Es ist nämlich $\cos \text{AOC} = \frac{l - x}{l}$, also W. AOC (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) $= \frac{1}{\cos} \frac{l - x}{l}$. Wird solcher $\frac{1}{\cos} \frac{l - x}{l}$ durch z bezeichnet, so ist Sektor AOCA $= \frac{1}{2} l^2 \cdot z$; ferner ist ΔOFA $= \frac{1}{2} (l - x) \cdot \sqrt{2lx - x^2}$. Folglich erhält man hiernach

$$\int_{x \div 0} \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} l^2 \cdot z - \frac{1}{2} (l - x) \cdot \sqrt{2lx - x^2};$$

mithin ist das Integral in (5.) gefunden.

Differenziirt man $(2lx - x^2)^{\frac{3}{2}}$, so erhält man

$$3(l - x) \cdot \sqrt{2lx - x^2}, \text{ oder } 3l \cdot \sqrt{2lx - x^2} - 3x \cdot \sqrt{2lx - x^2}.$$

Also ist

$$\frac{1}{3} (2lx - x^2)^{\frac{3}{2}} = l \cdot \int \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx - \int x \cdot \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx;$$

und diese Gleichung liefert sogleich das Integral $\int x \cdot \sqrt{2lx - x^2} \cdot dx$ in (6.).

15) $\int w \cdot \sin w \cdot dw = -w \cdot \cos w + \sin w$;

$\int w \cdot \cos w \cdot dw = w \cdot \sin w + \cos w$;

$\int w \cdot \sin w \cdot \cos w$ *) $= \frac{1}{4} w \cdot \sin w^2 - \frac{1}{4} \int \sin w^2 \cdot dw$;

$\int w^2 \cdot \sin w \cdot dw = -w^2 \cdot \cos w + 2 \int w \cdot \cos w \cdot dw$.

Ferner ist $2 \sin w^2 = 1 - \cos 2w$; folglich auch

$\int \sin w^2 \cdot dw = \frac{1}{2} w - \frac{1}{2} \sin w \cdot \cos w$;

$\int w \cdot \sin w^2 \cdot dw = \frac{1}{2} \int (w - w \cdot \cos 2w) \cdot dw = \frac{1}{4} w^2 - \frac{1}{8} (2w \cdot \sin 2w + \cos 2w)$

$= \frac{1}{4} w^2 - \frac{1}{2} w \cdot \sin w \cdot \cos w - \frac{1}{4} \cos w^2$ **);

$\int \sin w^3 \cdot dw = \int \sin w \cdot (1 - \cos w^2) \cdot dw$

$= \int \sin w \cdot dw - \int \sin w \cdot \cos w^2 \cdot dw = -\cos w + \frac{1}{3} \cos w^3$.

Substituirt man nun diese Werthe in einander und in (12. — 14.), so erhält man

16) $\int y \cdot dx = l^2 \cdot (\frac{1}{2} w - \frac{1}{2} \sin w \cdot \cos w - w \cdot \cos w + \sin w)$;

17) $\int x \cdot y \cdot dx = l^3 \cdot (\frac{3}{4} w - w \cdot \cos w - \frac{1}{2} w \cdot \sin w^2 + \sin w - \frac{1}{3} \sin w^3 - \frac{3}{4} \sin w \cdot \cos w)$

und 18) $\int \frac{1}{2} y^2 \cdot dx$

$= \frac{1}{2} l^3 \cdot (\frac{1}{4} w^2 - w^2 \cos w + 2w \cdot \sin w - w \cdot \sin w \cdot \cos w + \cos w - \frac{1}{2} \cos w^2 + \frac{1}{3} \cdot \cos w^3)$.

Nimmt man nun diese Integrale nach x zwischen den Grenzen 0 und x, d. h. die Integrale nach w zwischen den Grenzen w′ und w″ (wo w′ und w″ gegeben sind als Werthe von w, welche mit den Werthen von x mittelst der Gleichung (8.), nämlich mittelst

19) $x = l \cdot (1 - \cos w)$

zusammenhängen, nach I. Th. Analys. §. 37.), so hat man die Fläche V, d. h. den Inhalt des Cykloidal-Stückes, und noch die Koordinaten-Werthe x_0, y_0 seines Schwer-Punktes.

Für das ganze Stück OAO′ findet man, weil dann $x' = 0$, $x'' = 2l$, also $\cos w' = 1$ und $\cos w'' = -1$, demnach $w' = 0$ und $w'' = \pi$ ist, aus (16. — 18.)

20) $V = \frac{3}{2} \pi \cdot l^2$;

21) $V \cdot x_0 = \frac{7}{4} \pi \cdot l^3$, also $x_0 = \frac{7}{6} l$;

22) $V \cdot y_0 = l^3 \cdot (\frac{3}{4} \pi^2 - \frac{4}{3})$, also $y_0 = \frac{9\pi^2 - 16}{18\pi} \cdot l$.

Sollte der Schwer-Punkt der ganzen Fläche O′OEO′ der homogenen Cykloide gefunden werden, so würde sich für den Abscissen-Werth x_0

---

*) Es ist auch $\sin w \cdot \cos w = \frac{1}{2} \sin 2w$; folglich

$\int w \cdot \sin w \cdot \cos w = \frac{1}{8} \int (2w) \sin (2w) \cdot d(2w)$,

also nach (15.) $= \frac{1}{8} (-2w \cdot \cos 2w + \sin 2w)$.

**) Wir schreiben nicht jedesmal die konstanten Glieder, welche vermöge der Formeln eingehen, weil das um einen konstanten Theil vermehrte oder verminderte Integral doch immer wieder ein Integral derselben Differenzial-Funktion ist.

derselben wiederum $\frac{7}{12}$l finden; der Ordinaten-Werth y_0 würde dagegen der Null gleich werden, also daß der Schwer-Punkt dann in der Axe OX und um $\frac{7}{12}$ OA von O entfernt liegt.

§. 59.

Schwer-Punkt von Linien im Raume, von gekrümmten Normal-Flächen-Figuren und von Normal-Körpern.

Soll der Schwer-Punkt irgend einer materiellen Normal-Figur gefunden werden, deren Theile im körperlichen Raume sich verbreiten, so nimmt man in den allgemeinen Formeln des (§. 56.) am besten abwechselnd zur Momenten-Ebene die Koordinaten-Ebenen YOZ, XOZ und XOY, so daß man abwechselnd $u = x$, $u = y$ und $u = z$ hat. Bezeichnen wir nun die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes durch x_0, y_0 und z_0, so muß man in den Formeln des (§. 56.), wenn $u = x$ ist, auch $u_0 = x_0$ nehmen; während y_0 oder z_0 statt u_0 geschrieben werden muß, je nachdem $u = y$ oder $u = z$ genommen worden ist.

A. Für die Linie, welche durch zwei Gleichungen zwischen x, y und z, oder durch zwei Gleichungen zwischen r, φ und θ gegeben ist, hat man dann nach (§. 53. und §. 56.)

a) bei rechtwinklichen Koordinaten

$$(\mathbb{C})\cdots \quad M = \int_{x''\div x'} f\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}\cdot dx$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} M\cdot x_0 = \int_{x''\div x'} f\cdot x\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}\cdot dx \\ M\cdot y_0 = \int_{x''\div x'} f\cdot y\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}\cdot dx \\ M\cdot z_0 = \int_{x''\div x'} f\cdot z\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}+\partial z_x^{\,2}}\cdot dx \end{cases}$$

wo die Dichtigkeit f, eben so auch y und z, als gegebene Funktionen v. x angesehen werden.

b) bei dem Gebrauche der Polar-Koordinaten, weil dann

$x = e + r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta$ und $z = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta$

ist,

$$(\mathbb{C})\cdots \quad M = \int_{\theta''\div\theta'} f\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2 + r^2\cdot\partial\varphi_\theta^{\,2} + \partial r_\theta^{\,2}}\cdot d\theta$$

und

$$(\odot)\cdots\begin{cases} M\cdot(x_0-e)=\int_{\theta''\div\theta'} f\cdot r\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+r^2\cdot\partial\varphi_\theta{}^2+\partial r_\theta{}^2}\cdot d\theta \\ M\cdot y_0=\int_{\theta''\div\theta'} f\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+r^2\cdot\partial\varphi_\theta{}^2+\partial r_\theta{}^2}\cdot d\theta \\ M\cdot z_0=\int_{\theta''\div\theta'} f\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+r^2\cdot\partial\varphi_\theta{}^2+\partial r_\theta{}^2}\cdot d\theta, \end{cases}$$

wo f, r und φ als gegebene Funktionen von θ angeſehen werden.

Iſt die doppelt gekrümmte Kurve homogen, ſo ſetzt man 1 ſtatt f und das Volumen (die Länge) V ſtatt (der Maſſe) M.

B. Für eine krumme Normal-Fläche, welche durch eine Gleichung zwiſchen x, y und z, oder durch eine Gleichung zwiſchen θ, φ und r gegeben iſt, hat man nach (§. 53. u. §. 56.)

c) bei rechtwinklichen Koordinaten

$$(\mathbb{C})\cdots\quad M=\int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'} f\cdot\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\cdot dy\right)\cdot dx$$

und

$$(\odot)\cdots\begin{cases} M\cdot x_0=\int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'} f\cdot x\cdot\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\cdot dy\right)\cdot dx \\ M\cdot y_0=\int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'} f\cdot y\cdot\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\cdot dy\right)\cdot dx \\ M\cdot z_0=\int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'} f\cdot z\cdot\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\cdot dy\right)\cdot dx, \end{cases}$$

wo die Dichtigkeit f, ſo wie auch z als gegebene Funktionen von x und y angeſehen werden, während die Fläche die Grenzen (§. 51. II. a.) hat.

d) Bei dem Gebrauche der Polar-Koordinaten hat man

$$(\mathbb{C})\cdots\ M=\int_{\theta''\div\theta'}\left(\int_{\varphi''\div\varphi'} f\cdot r\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\varphi{}^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\theta{}^2}\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta$$

und dann die Formeln $(\odot)\cdots$, nämlich

$$M\cdot(x_0-e)=\int_{\theta''\div\theta'}\left(\int_{\varphi''\div\varphi'} f\cdot r^2\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\varphi{}^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\theta{}^2}\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta$$

$$M\cdot y_0=\int_{\theta''\div\theta'}\left(\int_{\varphi''\div\varphi} f\cdot r^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\varphi{}^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\theta{}^2}\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta$$

$$M\cdot z_0=\int_{\theta''\div\theta'}\left(\int_{\varphi''\div\varphi'} f\cdot r^2\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\sqrt{r^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\varphi{}^2\cdot\sin\varphi^2+\partial r_\theta{}^2}\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta$$

wo die Dichtigkeit f und auch r als gegebene Funktionen von φ und θ angesehen werden, während die Fläche, die Grenzen (§. 51. II. b.) hat.

Ist aber die Fläche homogen, so setzt man 1 statt f und (das Volumen) V statt (der Masse) M.

C. Für einen Normal-Körper findet sich ferner

e) bei rechtwinklichen Koordinaten und den Grenzen (§. 51. III. a.)

$$(\mathbb{C})\cdots \quad M=\int_{x''\div x'}\left[\int_{y''\div y'}\left(\int_{z''\div z'} f\cdot dz\right)\cdot dy\right]\cdot dx$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} M\cdot x_0=\int_{x''\div x'}\left[\int_{y''\div y'}\left(\int_{z''\div z'} f\cdot x\cdot dz\right)\cdot dy\right]\cdot dx \\ M\cdot y_0=\int_{x''\div x'}\left[\int_{y''\div y'}\left(\int_{z''\div z'} f\cdot y\cdot dz\right)\cdot dy\right]\cdot dx \\ M\cdot z_0=\int_{x''\div x'}\left[\int_{y''\div y'}\left(\int_{z''\div z'} f\cdot z\cdot dz\right)\cdot dy\right]\cdot dx, \end{cases}$$

wo die Dichtigkeit f als eine Funktion von x, y und z gedacht ist, während x, y, z von einander ganz unabhängig sind;

f) bei dem Gebrauche der Polar-Koordinaten, und wenn der Körper die Grenzen (§. 51. III. b.) hat,

$$(\mathbb{C})\cdots \quad M=\int_{\theta''\div\theta'}\left[\int_{\varphi''\div\varphi'}\left(\int_{r''\div r'} f\cdot r^2\cdot \sin\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right]\cdot d\theta;$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} M\cdot(x_0=e)= \\ \int_{\theta''\div\theta'}\left[\int_{\varphi''\div\varphi'}\left(\int_{r''\div r'} f\cdot r^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right]\cdot d\theta; \\ M\cdot y_0= \\ \int_{\theta''\div\theta'}\left[\int_{\varphi''\div\varphi'}\left(\int_{r''\div r'} f\cdot r^2\cdot\sin\varphi^2\cdot\cos\theta\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right]\cdot d\theta; \\ M\cdot z_0= \\ \int_{\theta''\div\theta'}\left[\int_{\varphi''\div\varphi'}\left(\int_{r''\div r'} f\cdot r^2\cdot\sin\varphi^2\cdot\sin\theta\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right]\cdot d\theta; \end{cases}$$

wo die Dichtigkeit f als eine Funktion von r, φ und θ angesehen wird, während r, φ, θ selbst von einander ganz unabhängig sind.

Ist der Körper homogen, so daß man 1 statt f und V statt M schreibt, so läßt sich in (e.) und (f.) die erste Integration ausführen, weil $\int 1\cdot dz=z$, $\int x\cdot dz=x\cdot z$, $\int y\cdot dz=y\cdot z$, $\int z\cdot dz=\frac{1}{2}z^2$, $\int r^2\cdot dr=\frac{1}{3}r^3$, $\int r^3\cdot dr=\frac{1}{4}r^4$ ist. Man erhält dann

$$(\odot)\cdots\quad \begin{cases} V\cdot x_0 = (\theta''-\theta')\cdot\int_{x'\div x''} x\cdot y_x\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx \\ V\cdot y_0 = (\sin\theta''-\sin\theta')\cdot\int_{x'\div x''} y_x^2\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx \\ V\cdot z_0 = (\cos\theta'-\cos\theta'')\cdot\int_{x'\div x''} y_x^2\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx\ *). \end{cases}$$

Hat man die halbe Umdrehungs-Fläche im Auge über der Ebene XOY, so ist $\theta' = 0$, $\theta'' = \pi$, — hat man aber die ganze Umdrehungs-Fläche im Auge, so ist $\theta' = 0$ und $\theta'' = 2\pi$ zu nehmen. Im letztern Fall liegt der Schwer-Punkt in der Dreh-Axe OX selbst, weil nun $y_0 = 0$ und $z_0 = 0$ gefunden wird. — Letzteres versteht sich jedoch auch von selbst.

II. Nimmt man zur Summation der Momente in derselben Aufgabe die Polar-Koordinaten, so erhält man genau dasselbe Resultat. Ist nämlich $r = r_\varphi$ die Gleichung der sich drehenden Kurve ECMD, also zugleich auch die Gleichung der Umdrehungs-Fläche, so muß man, um den Schwer-Punkt zu finden, die Formeln (§. 59. B. d.) anwenden. Allein dasmal sind φ' und φ'' von θ ganz unabhängig, und man kann daher dasmal die Integration nach θ zuerst vornehmen (nach I. Th. Analys. §§. 38. 40.). — Dadurch erhält man aber

$$(\mathbb{C})\cdots\quad V = (\theta''-\theta')\cdot\int_{\varphi'\div\varphi''} r\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{r^2+\partial r_\varphi^2}\cdot d\varphi$$

und

$$(\odot)\cdots\quad \begin{cases} V\cdot(x_0-e) = (\theta''-\theta')\cdot\int_{\varphi'\div\varphi''} r^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{r^2+\partial r_\varphi^2}\cdot d\varphi \\ V\cdot y_0 = (\sin\theta''-\sin\theta')\cdot\int_{\varphi'\div\varphi''} r^2\cdot\sin\varphi^2\cdot\sqrt{r^2+\partial r_\varphi^2}\cdot d\varphi \\ V\cdot z_0 = (\cos\theta'-\cos\theta'')\cdot\int_{\varphi'\div\varphi''} r^2\cdot\sin\varphi^2\cdot\sqrt{r^2+\partial r_\varphi^2}\cdot d\varphi. \end{cases}$$

III. Will man den Schwer-Punkt des Umdrehungs-Körpers finden, der dadurch entsteht, daß die Figur ABDMC (Fig. 18., in welcher AC und BD auf OX senkrecht stehen) sich um

*) Die beiden erstern dieser 4 Gleichungen geben x_0 von den Grenz-Werthen θ' und θ'' ganz unabhängig, so daß x_0 denselben Werth behält, es mögen θ' und θ'' die Werthe 0 und π oder 2π oder irgend andere Werthe annehmen. Die beiden letzteren Gleichungen dagegen zeigen, daß das Verhältniß $y_0 : z_0$ bloß von den Grenzen θ' und θ'' allein abhängt.

$$(\mathbb{C})\cdots\quad M=(\theta''-\theta')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\int_{r'}^{r''}f\cdot r^2\cdot dr)\cdot d\varphi$$

und

$$(\odot)\cdots\begin{cases} M(x_0-e)= \\ \quad(\theta''-\theta')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\int_{r'}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi \\ M\cdot y_0= \\ \quad(\sin\theta''-\sin\theta')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi^2\cdot\int_{r'}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi, \\ M\cdot z_0= \\ \quad(\cos\theta'-\cos\theta'')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi^2\cdot\int_{r'}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi, \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen wiederum hervorgeht, daß das Verhältniß $y_0:z_0$ von den Grenzen θ' und θ'' ganz allein, daß aber x_0 von denselben Grenzen θ' und θ'' gar nicht abhängt.

Hat man den halben Umdrehungs-Körper über XOY im Auge (wie er von den zu φ' und φ'' gehörigen senkrechten Kegel-Flächen oberhalb XOY begrenzt wird), so ist $\theta'=0$, $\theta''=\pi$, also $\theta''-\theta'=\pi$, $\sin\theta''-\sin\theta'=0$, $\cos\theta'-\cos\theta''=2$.

Hat man aber den ganzen Umdrehungs-Körper (zwischen den zu φ' und φ'' gehörigen senkrechten Kegel-Flächen) im Auge, so wird $\theta'=0$, $\theta''=2\pi$, also $\theta''-\theta'=2\pi$, $\sin\theta''-\sin\theta'=0$, $\cos\theta'-\cos\theta''=0$; daher ist dann nicht bloß $y_0=0$, sondern auch $z_0=0$; und man hat

$$(\mathbb{C}_1)\cdots\quad M=2\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\int_{r'}^{r''}f\cdot r^2\cdot dr)\cdot d\varphi$$

$$(\odot_1)\cdots\quad M\cdot(x_0-e)=2\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\int_{r'}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi.$$

Wäre der Körper noch überdies homogen, so hätte man

$$(\mathbb{C}_2)\cdots\quad V=\tfrac{2}{3}\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}r''^3\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi$$

$$(\odot_2)\cdots\quad V\cdot(x_0-e)=\tfrac{1}{2}\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}r''^4\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi.$$

Zu den Umdrehungs-Körpern gehört unter andern

1) der senkrechte Kegel, indem man $y=bx$ nimmt,

2) der senkrechte Cylinder, indem man $y=a$ hat, — und

3) die Kugel, indem man $y=\sqrt{l^2-x^2}$ nimmt, wo dann l der Radius der Kugel wird.

1ftes Beispiel. Den Schwer-Punkt einer homogenen Kugel-Zo-

nen-Oberfläche zu finden, welche durch zwei parallele vom Mittel-Punkt O um x′ und x″ entfernte Ebenen abgeschnitten wird.

Ist l der Radius der Kugel, so ist die Gleichung des Umdrehungs-Kreises

$$y = \sqrt{l^2 - x^2},$$

also $$\partial y_x = -\frac{x}{y}, \quad \sqrt{1+\partial y_x^2} = \frac{l}{y};$$

folglich geben die Formeln (I. ◯. ⊙.), wenn noch $\theta' = 0$ und $\theta'' = 2\pi$ genommen wird,

$$V = 2\pi l\cdot(x'' - x')$$

und $$V\cdot x_0 = \pi l\cdot(x''^2 - x'^2),$$

folglich $$x_0 = \tfrac{1}{2}(x' + x''),$$

d. h. der Schwer-Punkt liegt gerade in der Mitte der Axe dieser Kugel-Zone *).

2tes Beispiel. Den Schwer-Punkt des homogenen Körpers zu finden, der entsteht, wenn sich ein Sektor OAC (Fig. 13.) um den einen Radius OX herumdreht. Dieser Körper wird gewöhnlich Kugel-Sektor genannt.

Gebraucht man die Polar-Koordinaten, so ist die Gleichung der Kugel-Fläche, die den Radius l hat,

$$r = l.$$

Ist der Winkel $AOC = \alpha$, so ist noch $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \alpha$, und denkt man sich den ganzen Umdrehungs-Körper, so ist noch $\theta' = 0$ und $\theta'' = 2\pi$ zu nehmen. Außerdem ist 1 statt f und V statt M zu setzen, und die Formeln (§. 60. IV. ◯.) gehen in die (◯₂ ⊙₂ daselbst) über, nur daß l statt r″ gesetzt werden muß. Weil aber

$$\int \sin\varphi\cdot d\varphi = -\cos\varphi \quad \text{und} \quad \int \sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi = -\tfrac{1}{4}\cos 2\varphi$$

ist, so geben diese Formeln (§. 60. IV. ◯₂ und ⊙₂):

$$V = \tfrac{2}{3}\pi l^3\cdot(1-\cos\alpha) = \tfrac{4}{3}\pi l^3\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

und $$V\cdot x_0 = \tfrac{1}{8}\pi l^4\cdot(1-\cos 2\alpha) = \tfrac{1}{4}\pi l^4\cdot\sin^2\alpha^2 = \pi l^4\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha^2\cdot\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha^2;$$

folglich $$x_0 = \tfrac{3}{4}l\cdot\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \tfrac{3}{4}l\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2};$$

d. h. der Schwer-Punkt liegt in der Mitte der Höhe des Kugel-Segments, welches denselben Winkel 2α dagegen nur $\frac{3}{4}l$ zum Radius hat **).

---

*) Dies Resultat für die Kugel-Zone konnte man (wie für den Cylinder-Mantel) bloß aus dem Umstande folgern, daß die Kugel-Zone durch Ebenen, welche auf OX senkrecht stehen, übrigens gleich weit von einander entfernt liegen, in lauter gleiche Kugel-Zonen zerlegt wird, während man sich unendlich viele solche Ebenen gelegt denken kann.

**) Weiß man, daß der Schwer-Punkt einer Pyramide in der Linie liegt, welche die Spitze mit dem Schwer-Punkt der Grundfläche verbindet, und zwar um $\frac{3}{4}$ derselben von der Spitze ab, so kann man sich diesen Kugel-Sektor in unendlich viele Pyramidchen zerlegt denken, deren Schwer-

$$(\mathbb{C})\cdots\quad M=(\theta''-\theta')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\int_{r'=0}^{r''}f\cdot r^2\cdot dr)\cdot d\varphi$$

und

$$(\odot)\cdots\begin{cases} M(x_0-e)= \\ \quad(\theta''-\theta')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\int_{r'=0}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi \\ M\cdot y_0= \\ \quad(\sin\theta''-\sin\theta')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi^2\cdot\int_{r'=0}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi \\ M\cdot z_0= \\ \quad(\cos\theta'-\cos\theta'')\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi^2\cdot\int_{r'=0}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi, \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen wiederum hervorgeht, daß das Verhältniß $y_0:z_0$ von den Grenzen θ' und θ'' ganz allein, daß aber x_0 von denselben Grenzen θ' und θ'' gar nicht abhängt.

Hat man den halben Umdrehungs-Körper über XOY im Auge (wie er von den zu φ' und φ'' gehörigen senkrechten Kegel-Flächen oberhalb XOY begrenzt wird), so ist $\theta'=0$, $\theta''=\pi$, also $\theta''-\theta'=\pi$, $\sin\theta''-\sin\theta'=0$, $\cos\theta'-\cos\theta''=2$.

Hat man aber den ganzen Umdrehungs-Körper (zwischen den zu φ' und φ'' gehörigen senkrechten Kegel-Flächen) im Auge, so wird $\theta'=0$, $\theta''=2\pi$, also $\theta''-\theta'=2\pi$, $\sin\theta''-\sin\theta'=0$, $\cos\theta'-\cos\theta''=0$; daher ist dann nicht bloß $y_0=0$, sondern auch $z_0=0$; und man hat

$$(\mathbb{C}_1)\cdots\quad M=2\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\int_{r'=0}^{r''}f\cdot r^2\cdot dr)\cdot d\varphi$$

$$(\odot_1)\cdots\quad M\cdot(x_0-e)=2\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}(\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\int_{r'=0}^{r''}f\cdot r^3\cdot dr)\cdot d\varphi.$$

Wäre der Körper noch überdies homogen, so hätte man

$$(\mathbb{C}_2)\cdots\quad V=\tfrac{2}{3}\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}r''^3\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi$$

$$(\odot_2)\cdots\quad V\cdot(x_0-e)=\tfrac{1}{2}\pi\cdot\int_{\varphi'}^{\varphi''}r''^4\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi.$$

Zu den Umdrehungs-Körpern gehört unter andern

1) der senkrechte Kegel, indem man $y=bx$ nimmt,
2) der senkrechte Cylinder, indem man $y=a$ hat, — und
3) die Kugel, indem man $y=\sqrt{l^2-x^2}$ nimmt, wo dann l der Radius der Kugel wird.

1stes Beispiel. Den Schwer-Punkt einer homogenen Kugel-Zo-

nen-Oberfläche zu finden, welche durch zwei parallele vom Mittel-Punkt O um x′ und x″ entfernte Ebenen abgeschnitten wird.

Ist l der Radius der Kugel, so ist die Gleichung des Umdrehungs-Kreises

$$y = \sqrt{l^2 - x^2},$$

also $$\partial y_x = -\frac{x}{y}, \quad \sqrt{1+\partial y_x^{\,2}} = \frac{l}{y};$$

folglich geben die Formeln (I. ℭ. ⊙.), wenn noch $\theta' = 0$ und $\theta'' = 2\pi$ genommen wird,

$$V = 2\pi l\cdot(x'' - x')$$

und $$V\cdot x_0 = \pi l\cdot(x''^2 - x'^2),$$

folglich $$x_0 = \tfrac{1}{2}(x' + x''),$$

d. h. der Schwer-Punkt liegt gerade in der Mitte der Axe dieser Kugel-Zone *).

2tes Beispiel. Den Schwer-Punkt des homogenen Körpers zu finden, der entsteht, wenn sich ein Sektor OAC (Fig. 13.) um den einen Radius OX herumdreht. Dieser Körper wird gewöhnlich Kugel-Sektor genannt.

Gebraucht man die Polar-Koordinaten, so ist die Gleichung der Kugel-Fläche, die den Radius l hat,

$$r = l.$$

Ist der Winkel $AOC = \alpha$, so ist noch $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \alpha$, und denkt man sich den ganzen Umdrehungs-Körper, so ist noch $\theta' = 0$ und $\theta'' = 2\pi$ zu nehmen. Außerdem ist 1 statt f und V statt M zu setzen, und die Formeln (§. 60. IV. ℭ ⊙) gehen in die (ℭ₂ ⊙₂ daselbst) über, nur daß l statt r″ gesetzt werden muß. Weil aber

$$\int \sin\varphi\cdot d\varphi = -\cos\varphi \quad \text{und} \quad \int \sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi = -\tfrac{1}{4}\cos 2\varphi$$

ist, so geben diese Formeln (§. 60. IV. ℭ₂ und ⊙₂):

$$V = \tfrac{2}{3}\pi l^3\cdot(1-\cos\alpha) = \tfrac{4}{3}\pi l^3\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

und $$V\cdot x_0 = \tfrac{1}{4}\pi l^4\cdot(1-\cos 2\alpha) = \tfrac{1}{2}\pi l^4\cdot\sin\alpha^2 = \pi l^4\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2\cdot\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2;$$

folglich $$x_0 = \tfrac{3}{4}l\cdot\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \tfrac{3}{4}l\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2};$$

d. h. der Schwer-Punkt liegt in der Mitte der Höhe des Kugel-Segments, welches denselben Winkel 2α dagegen nur $\frac{3}{4}$l zum Radius hat **).

---

*) Dies Resultat für die Kugel-Zone konnte man (wie für den Cylinder-Mantel) bloß aus dem Umstande folgern, daß die Kugel-Zone durch Ebenen, welche auf OX senkrecht stehen, übrigens gleich weit von einander entfernt liegen, in lauter gleiche Kugel-Zonen zerlegt wird, während man sich unendlich viele solche Ebenen gelegt denken kann.

**) Weiß man, daß der Schwer-Punkt einer Pyramide in der Linie liegt, welche die Spitze mit dem Schwer-Punkt der Grundfläche verbindet, und zwar um $\frac{3}{4}$ derselben von der Spitze ab, so kann man sich diesen Kugel-Sektor in unendlich viele Pyramidchen zerlegt denken, deren Schwer-

3tes Beispiel. Den Schwer-Punkt einer homogenen körperlichen Kugel-Zone zu finden.

Gebraucht man senkrechte Koordinaten, so hat man als Gleichung der Erzeugungs-Kurve der Kugel

$$y = \sqrt{l^2 - x^2},$$

wenn l der Radius derselben ist. Also ist

$$\int y_x^2 \cdot dx = \int (l^2 - x^2) \cdot dx = l^2 \cdot x - \tfrac{1}{3} x^3;$$
$$\int x \cdot y_x^2 \cdot dx = \int x \cdot (l^2 - x^2) \cdot dx = \tfrac{1}{2} l^2 \cdot x^2 - \tfrac{1}{4} x^4.$$

Die Gleichungen (§. 60. III. ((und ⊙) geben daher, wenn man noch $x' = x$ und $x'' = l$ nimmt, für den körperlichen Kugel-Abschnitt, der vom Mittel-Punkt um x abliegt,

1) $$V = \tfrac{1}{3}\pi (l - x)^2 \cdot (2l + x)$$

2) $$V \cdot x_0 = \tfrac{1}{4}\pi (l - x)^2 \cdot (l + x)^2,$$

folglich

3) $$x_0 = \tfrac{3}{4} \frac{(l + x)^2}{2l + x} \text{ *).}$$

Für die körperliche Halb-Kugel ist $x = 0$, und man erhält für sie

$$x_0 = \tfrac{3}{8} l;$$

d. h. der Schwer-Punkt der homogenen Halb-Kugel ist um $\frac{3}{8}$ des Radius vom Mittel-Punkte derselben entfernt.

4tes Beispiel. Den Schwer-Punkt der homogenen Fläche und des homogenen Körpers eines Kugel-Zweiecks zu finden.

Gebraucht man Polar-Koordinaten, so hat man zunächst in den Formeln (§. 60. II. ((und ⊙), in denen φ' und φ'' von θ ganz unabhängig gedacht sind,

$$r = l, \quad \partial r_\varphi = 0, \quad \sqrt{r^2 + \partial r_\varphi^2} = l;$$

folglich geben dieselben, wenn man $e = 0$ setzt, d. h. wenn man die Momenten-Ebene XOZ durch den Mittel-Punkt O der Kugel gehen läßt,

(((($$V = (\theta'' - \theta') \cdot (\cos\varphi' - \cos\varphi'') \cdot l^2;$$

und

⊙⊙ $$\begin{cases} V \cdot x_0 = \tfrac{1}{4}(\theta'' - \theta') \cdot (\cos 2\varphi' - \cos 2\varphi'') \cdot l^3; \\ V \cdot y_0 = \tfrac{1}{2}(\sin\theta'' - \sin\theta') \cdot [(\varphi'' - \varphi') - \tfrac{1}{2}(\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi')] \cdot l^3 \\ V \cdot z_0 = \tfrac{1}{2}(\cos\theta' - \cos\theta'') \cdot [(\varphi'' - \varphi') - \tfrac{1}{2}(\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi')] \cdot l^3, \end{cases}$$

wo V der Inhalt eines durch zwei Ebenen und durch zwei senkrechte Ke-

---

Punkte dann alle in einer zweiten Kugel-Fläche liegen, welche den Radius $\frac{3}{4}l$ hat. Der Schwer-Punkt der letztern Fläche fällt dann mit dem Schwer-Punkt des erstern Sektors zusammen.

*) Da der Körper im (Beisp. 2.) aus einem solchen Kugel-Segment und aus einem Kegel besteht, so kann man, wenn die Schwer-Punkte zweier dieser drei Körper gegeben sind, nach (§. 55. II.) alleimal sogleich den Schwer-Punkt des dritten finden.

gel-Flächen begrenzten Stücks der Kugel-Oberfläche ist, während x_0, y_0, z_0 die drei Koordinaten-Werthe seines Schwer-Punktes sind.

Nimmt man nun $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = \pi$, so wird V die Oberfläche eines Kugel-Zweiecks, welches von den beiden durch OX hindurchgehenden Ebenen, die unter sich den Winkel $\theta''-\theta'$ machen, begrenzt wird. Nimmt man diesen Winkel $= \alpha$, und legt man die Ebene YOZ so, daß der Winkel α durch sie gerade halbirt wird, so hat man

$$\theta' = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \theta'' = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha,$$

und die vorstehenden Gleichungen geben nun für den Schwer-Punkt dieses Kugel-Zweiecks

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \text{und} \quad z_0 = \tfrac{1}{2}l\pi \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}.$$

Sucht man dagegen den Schwer-Punkt von körperlichen Normal-Stücken der Kugel, welche die Grenzen (§. 51. III. b.) haben, jedoch unter der hier gemachten speziellen Voraussetzung, daß die Grenz-Werthe φ' und φ'' von θ unabhängig sind, so muß man die Formeln (§. 60. IV. ((und $\odot$) anwenden (indem man 1 statt f und V statt M schreibt, weil wir homogene Körper-Stücken voraussetzen), und man erhält, weil jetzt $r''=l$ und

$$\int r^3 \cdot dr = \tfrac{1}{4}r^4, \quad \int r^3 \cdot dr = \tfrac{1}{4}r^4, \quad \int \sin\varphi \cdot d\varphi = -\cos\varphi,$$
$$\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{4}\cos 2\varphi, \quad \int \sin\varphi^2 \cdot d\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi,$$

auch $e = 0$ ist,

$$((\cdots \qquad V = \tfrac{1}{2}(\theta''-\theta') \cdot (\cos\varphi' - \cos\varphi'') \cdot l^3$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} V \cdot x_0 = \frac{1}{16}(\theta''-\theta') \cdot (\cos 2\varphi' - \cos 2\varphi'') \cdot l^4 \\ V \cdot y_0 = \frac{1}{8}(\sin\theta'' - \sin\theta') \cdot [(\varphi''-\varphi') - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi')] \cdot l^4 \\ V \cdot z_0 = \frac{1}{8}(\cos\theta' - \cos\theta'') \cdot [(\varphi''-\varphi') - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi')] \cdot l^4, \end{cases}$$

aus welchen Formeln dann auch der Schwer-Punkt des körperlichen Kugel-Zweiecks hervorgeht, indem man $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = \pi$ nimmt.

§. 61.

Die Guldinische Regel.

Von den Umdrehungs-Flächen und Körpern bemerkt man leicht noch Folgendes:

I. Dreht sich die ebene Figur ACMDB (Fig. 18.), in welcher CA und BD senkrecht auf OX stehen, um die Axe OX herum, und hat sie einen Flächen-Winkel α, der Schwer-Punkt des homogen gedachten Bogens CMD also den Bogen (oder Weg) $\alpha \cdot y_0$ beschrieben; wenn y_0 der Abstand dieses Schwer-Punktes von der Dreh-Axe OX ist, so wird allemal

der Flächen-Inhalt der beschriebenen Umdrehungs-Fläche ge-

finden, wenn man die Länge der Kurve CMD mit diesem Wege ihres Schwer-Punktes multiplizirt.

Denn nach (§. 58.) hat man, wenn die Länge der Kurve durch L bezeichnet wird, und wenn $OA = x'$, $OB = x''$ gesetzt wird,

$$(\odot) \cdots \quad L \cdot y_0 = \int_{x'}^{x''} y_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit α, so hat man rechts nach (§. 60. I. (γ).) den Inhalt der Umdrehungs-Fläche, während links L mit αy_0, d. h. die Länge der Kurve mit dem Wege ihres Schwer-Punktes multiplizirt erscheint.

II. Dreht sich, wenn FGH (Fig. 18.) eine zweite Kurve ist, deren Gleichung $y' = y'_x$ seyn mag, die Figur CGHDMC um die Axe OX, und beschreibt sie den Winkel α, so wird der Inhalt des beschriebenen Körpers gefunden, wenn man den Inhalt der beschreibenden Fläche mit dem Wege ihres Schwer-Punktes multiplizirt.

Denn, ist V der Inhalt der Fläche CGHDMC, und y_0 der Abstand ihres Schwer-Punktes von OX, so hat man nach (§. 58.)

$$V \cdot y_0 = \tfrac{1}{2} \int (y_x^2 - y'^2_x) \cdot dx.$$

Multiplizirt man aber diese Gleichung mit α, so erhält man rechts nach (§. 60. III. δ) den Inhalt des Hohl-Körpers (indem man den ganzen Körper und dessen Kern nach §. 60. III. δ berechnet und dann beide von einander subtrahirt), während links der Inhalt V mit dem Wege des Schwer-Punktes, nämlich mit αy_0 multiplizirt erscheint.

Es ist sehr leicht, aus diesem Beweise auch abzunehmen, daß der Satz noch gilt, wenn die sich drehende Fläche keine Normal-Fläche ist, sondern eine ganz beliebig begrenzte, weil nach (§. 56.) die Summe der Inhalte der einzelnen Normal-Theile mit der Ordinate ihres Schwer-Punktes multiplizirt, allemal gleich ist dem Gesammt-Inhalt mit der Ordinate des Schwer-Punktes der ganzen Fläche multiplizirt.

III. Dieser Satz, der gewöhnlich die Guldinische Regel genannt wird, läßt sich auch noch mehr verallgemeinern. Bewegt sich nämlich eine beliebige Fläche ganz beliebig, doch so daß sie immer auf der geraden, oder einfach oder doppelt gekrümmten Linie, die einer ihrer Punkte beschreibt, senkrecht bleibt, und daß zugleich alle ihre

Punkte ähnliche Kurven (oder lauter mit einander parallele Gerade) beschreiben, so wird allemal

der Inhalt des beschriebenen Körpers gefunden, wenn man den Inhalt der Fläche mit dem Wege ihres Schwer-Punktes multiplizirt.

Denn jede krumme Linie kann man aus unendlich vielen unendlichkleinen Kreisbogen bestehend sich denken; also findet der Satz (II.) unendlich oft statt; und denkt man sich zuletzt alle diese Gleichungen addirt, so erhält man diesen allgemeinern Satz. — Beschreibt endlich jeder Punkt gerade Linien, so versteht sich der Satz aus der Lehre vom Prisma oder vom allgemeinen Cylinder von selbst.

Der Satz (III.) hört daher auf wahr zu seyn, sobald die zum Beweis nothwendige Bedingung nicht mehr existirt, nämlich wenn der ganze beschriebene Körper nicht mehr die Summe aller der unendlich vielen unendlich-kleinen Körper seyn sollte.

Anmerk. Die Güldinische Regel in (II.) ist für den Praktiker manchmal von großer Wichtigkeit, zuweilen um den Inhalt der Körper zu finden, manchmal auch, um den Schwer-Punkt einer Fläche zu finden. Einige Beispiele mögen sie daher noch erörtern.

1stes Beispiel. Ein bei A rechtwinkliches Dreieck CAB (Fig. 19.) dreht sich um CA und beschreibt den Kegel, dessen Inhalt $= \frac{1}{3}AC \cdot AB^2 \cdot \pi$ ist; der Inhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2}AC \cdot AB$; der Weg ihres Schwer-Punkts $= 2\pi \cdot y_0$; folglich hat man nach der Güldinischen Regel

$$2\pi \cdot y_0 \times \tfrac{1}{2}AC \cdot AB = \tfrac{1}{3}AC \cdot AB^2 \cdot \pi,$$

woraus

$$y_0 = \tfrac{1}{3}AB$$

hervorgeht. Der Schwer-Punkt des rechtwinklichen Dreiecks ABC liegt also um $\frac{1}{3}AB$ von AC ab, und aus demselben Grunde auch um $\frac{1}{3}AC$ von AB ab; wodurch er völlig bestimmt ist.

2tes Beispiel. Es ist OM (Fig. 20.) eine durch die Gleichung

$$y^2 = p \cdot x$$

gegebene Parabel. Sind x_0, y_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes der Fläche OPM, während $OP = x$ ist, so findet man nach (§. 58.)

$$\text{Fläche } OPM = \tfrac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}xy$$

und noch

$$x_0 = \tfrac{3}{5}x, \quad y_0 = \tfrac{3}{8}y.$$

Dreht sich nun diese Fläche OPM um OX rings herum, so ist der Weg ihres Schwer-Punktes $= 2\pi \times \frac{3}{8}y = \frac{3}{4}\pi \cdot y$, und dieser mit dem Inhalt der Fläche $\frac{2}{3}xy$ multiplizirt, giebt $\frac{1}{2}\pi x \cdot y^2$ oder $\frac{1}{2}\pi p x^2$ für den Inhalt des Umdrehungs-Paraboloids.

§. 62.

Folgende Betrachtungen eignen sich sehr dazu, in vielen Fällen die Aufsuchung der Schwer-Punkte von Körpern oder materiellen Oberflächen zu erleichtern. — Setzen wir dabei homogene Körper oder Oberflächen voraus.

1. Man denke sich den Körper durch lauter unendlich nahe an einander liegende parallele Ebenen in unendlich viele Scheiben zertheilt, und senkrecht auf diese Scheiben eine Gerade OX, welche als Abscissen-Axe genommen werden mag. Ist dann ψ_x der Querschnitt, dx die Dicke also $\psi_x \cdot dx$ der Inhalt einer solchen am End-Punkte der Abscisse x liegenden Scheibe, und ist V der Inhalt des ganzen Körpers, so wie x_0 die mit OX parallele oder auf der OX genommene Abscisse seines Schwer-Punktes, so ist allemal

$$(\mathbb{C}) \cdots \quad V = \int_{x'}^{x''} \psi_x \cdot dx$$

und $$(\odot) \cdots \quad V \cdot x_0 = \int_{x'}^{x''} x \cdot \psi_x \cdot dx,$$

wenn nur x' und x'' die Abscissen-Werthe der auf OX senkrechten Grenz-Ebenen dieses Körpers sind.

Kann man aber den Körper von dreien Richtungen her in solche Scheiben zerlegen, so bekommt man drei solche x_0, welche die Abstände des Schwer-Punkts von dreien Ebenen feststellen.

Dieselben Gleichungen ($\mathbb{C}$ und $\odot$) gelten aber auch noch, wenn von dem Schwer-Punkte und dem Inhalte einer Oberfläche die Rede ist, sobald nur $\psi_x \cdot dx$ die Oberfläche der am End-Punkte der Abscisse x liegenden unendlich dünnen Scheibe vorstellt.

1stes Beispiel. Denkt man sich einen Umdrehungs-Körper, welcher dadurch entsteht, daß die durch die Gleichung

$$y = y_x$$

gegebene Kurve sich um die Axe OX dreht, während die Drehung nicht rings herum geht, sondern nur den Flächen-Winkel α beschreibt, so ist jede Scheibe als ein allgemeiner Cylinder anzusehen, dessen Grundfläche

$$\psi_x = \tfrac{1}{2}\alpha \cdot y_x^2,$$

dessen Höhe dx, dessen Inhalt $\psi_x \cdot dx$ also $= \frac{1}{2}\alpha \cdot y_x^2 \cdot dx$ ist. Die Gleichungen (☾ und ⊙) geben daher für diesen Körper

$$V = \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \int_{x'\div x''} y_x^2 \cdot dx \quad \text{und} \quad V \cdot x_0 = \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \int_{x'\div x''} x \cdot y_x^2 \cdot dx,$$

und deshalb behält x_0 immer denselben Werth, es mag α größer oder kleiner, entweder $= \pi$ oder $= 2\pi$ seyn.

2tes Beispiel. Hätte man aber die krumme Oberfläche dieses Dreh-Körpers im Auge, so hätte man die Oberfläche der unendlich dünnen Scheibe, welche am End-Punkte der Abscisse x liegt,

$$= \alpha \cdot y \cdot \sqrt{1 + \delta y_x^2} \cdot dx \text{ *)};$$

und daher ist dann

$$V = \alpha \cdot \int y_x \cdot \sqrt{1 + \delta y_x^2} \cdot dx \quad \text{und} \quad V \cdot x_0 = \alpha \cdot \int x \cdot y_x \cdot \sqrt{1 + \delta y_x^2} \cdot dx.$$

Die Resultate dieses und des Beispiels (1.) kommen aber genau mit denen des (§. 60.) überein.

3tes Beispiel. Hätte man einen beliebigen Kegel oder eine beliebige Pyramide (senkrecht, gleichseitig oder schief) und legte man durch die Spitze O die auf die Grundfläche senkrechte OX, so verhalten sich die auf OX senkrechten Durchschnitte wie die Quadrate der senkrechten Abstände derselben von der Spitze O. — Also ist der zur Abscisse x gehörige Querschnitt $\psi_x = m \cdot x^2$, $x' = 0$, $x'' =$ der Höhe der ganzen Pyramide oder des ganzen Kegels; und man hat

$$\left.\begin{aligned} V &= \int_{x'\div 0} m \cdot x^2 \cdot dx = \tfrac{1}{3} m \cdot x''^3 \\ \text{und} \\ V \cdot x_0 &= \int_{x''\div 0} m \cdot x^3 \cdot dx = \tfrac{1}{4} m \cdot x''^4 \end{aligned}\right\} \text{ folglich } x_0 = \tfrac{3}{4} \cdot x'',$$

d. h. die senkrechte Entfernung des Schwer-Punktes von der Grundfläche ist allemal $\frac{1}{4}$ der Höhe.

4tes Beispiel. Hätte man die Oberfläche dieses Kegels oder dieser Pyramide im Auge (ohne die Grundfläche), so verhalten sich die Umfänge der auf OX senkrechten Querschnitte, wie die bloßen senkrechten Abstände derselben von der Spitze O. Also hat man dann bloß

$$\psi_x = n \cdot x;$$

und daher

---

*) Wäre die Drehung rings herum erfolgt, so könnte man die Oberfläche der Scheibe als die eines abgekürzten Kegels ansehen, deren Inhalt man erhält, wenn man den Umfang des mittlern Durchschnitts $2\pi y_x$ mit der Seite $\sqrt{1 + \delta y_x^2}$ multiplizirt. Unsere hier oben gedachte krumme Oberfläche dieser Scheibe ist aber nur der $\frac{\alpha}{2\pi}$te Theil von diesem so eben erwähnten Produkt.

$$V = \int_{x''\div 0} n\cdot x\cdot dx = \tfrac{1}{2}n\cdot x''^2$$

und

$$V\cdot x_0 = \int_{x''\div 0} n\cdot x^2\cdot dx = \tfrac{1}{3}n\cdot x''^3$$

folglich

$$x_0 = \tfrac{2}{3}\cdot x''$$

d. h. die senkrechte Entfernung des Schwer-Punktes eines Kegel-Mantels oder einer pyramidalischen Oberfläche von der Grundfläche ist allemal $\frac{1}{3}$ der Höhe *).

II. Liegen die Schwer-Punkte aller dieser Scheiben in einer und derselben Geraden, welche mit den Querschnitten den beliebigen Winkel δ macht, so kann man auch diese Gerade zur Axe OX nehmen, hat dann, wenn der Inhalt des Querschnitts am Ende der Abscisse x, durch ψ_x bezeichnet wird, den Inhalt der Scheibe $\psi_x\cdot dx\cdot \sin\delta$ und zuletzt

$$(C)\cdots \qquad V = \sin\delta\cdot\int_{x''\div x'} \psi_x\cdot dx$$

und

$$V\cdot x_0 = \sin\delta\cdot\int_{x''\div x'} x\cdot\psi_x\cdot dx,$$

wodurch der Schwer-Punkt des Körpers sogleich völlig bestimmt ist.

Diese Rechnung auf das Beispiel (3. der I.) angewandt, giebt sogleich das Resultat, daß der Schwer-Punkt des Kegels oder der Pyramide in der Schwer-Linie liegt, welche durch den Schwer-Punkt der Grundfläche und

*) Die Resultate in den Beispielen (3. und 4.) gelten natürlich auch noch für beliebige Stücken eines beliebigen Kegels, welche durch beliebige durch seine Spitze gelegte Ebenen oder wieder durch Kegel-Flächen ausgeschnitten werden; d. h. sie gelten so lange als die Flächen der Querschnitte sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze O, und die Umfänge sich wie diese Abstände selbst verhalten. — Für die dreiseitige Pyramide folgt das Resultat im (Beispiel 3.) auch noch aus elementar-geometrischen Betrachtungen. Nimmt man nämlich 2 der Grenz-Dreiecke, halbirt die Gerade, in welcher sie zusammenstoßen, zieht in jedem aus diesem Halbirungs-Punkte H nach der gegenüber liegenden Spitze S und S′ dieser Dreiecke die Geraden HS und HS′ und nimmt man auf jeder derselben die Punkte P, P′ so an, daß $HP = \frac{1}{3}HS$ und $HP' = \frac{1}{3}HS'$ ist, so sind P und P′ die Schwer-Punkte dieser Dreiecke. Zieht man nun, aus diesen Schwer-Punkten P und P′ nach den gegenüber liegenden Ecken S′, S der Pyramide die Geraden PS′ und P′S, so schneiden sich diese in dem Schwer-Punkt der Pyramide selbst, und die ähnlichen Dreiecke, welche sich hier gebildet, zeigen, daß der Schwer-Punkt in der Schwer-Linie PS′ um $\frac{1}{4}$ von P abliegt.

durch die Spitze hindurchgeht, und dabei um $\frac{3}{4}$ der Länge derselben von der Spitze, also um $\frac{1}{4}$ ihrer Länge von dem Schwer-Punkte der Grundfläche absteht.

III. Bei einem durch Umdrehung der Linie $y = \eta_x$ um die Axe OX entstandenen Umdrehungs-Körper, der aber von zweien durch die Axe OX gelegten Ebenen, die unter sich den Winkel α bilden, begrenzt ist, beschreibt jede Ordinate η_x der Kurve einen Kreis-Sektor, dessen Schwer-Punkt von OX um

$$y' = \tfrac{2}{3}\eta_x \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}$$

absteht. Die Schwer-Punkte aller dieser Sektoren liegen also in der durch diese Gleichung gegebenen Linie, und da der Inhalt dieser Sektoren $= \frac{1}{2}\alpha \cdot \eta_x^2$, also der Inhalt der Scheiben $= \frac{1}{2}\alpha \cdot \eta_x^2 \cdot dx$ ist, so ist, wenn man den Abstand des Schwer-Punktes des ganzen Umdrehungs-Körpers von der Axe OX durch y'_0 bezeichnet, nicht bloß

$$V = \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \int_{x''\ldots x'} \eta_x^2 \cdot dx, \text{ sondern auch } V \cdot y'_0 = \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \int \eta_x^3 \cdot dx,$$

woraus

$$y'_0 = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{\int_{x''\ldots x'} \eta_x^3 \cdot dx}{\int_{x''\ldots x'} \eta_x^2 \cdot dx}$$

sich ergiebt, während sich von selbst versteht, daß der Schwer-Punkt in der Ebene liegt, welche durch OX hindurchgeht, und alle Sektoren halbirt.

Dieses vollendet aber die Schwer-Punkts-Bestimmung im (Beispiel 1. zu I.).

IV. Hat man von demselben Körper die krumme Oberfläche im Auge, so beschreibt der End-Punkt einer jeden Ordinate η_x der Erzeugungs-Kurve einen Kreisbogen, dessen Schwer-Punkt von OX um $y' = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha} \cdot \eta_x$ abliegt. Die Länge des Bogens ist dabei $= \alpha \cdot \eta_x$, dagegen die Oberfläche der Scheibe von der Dicke dx, $= \alpha \cdot \eta_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$. Wird daher der Abstand des Schwer-Punktes der Oberfläche von OX durch y'_0 bezeichnet, so hat man nicht nur, wie im (Beispiel 2. zu I.)

V.

$$V = \alpha \cdot \int_{x''\div x'} y_x \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx,$$

sondern auch noch

$$V \cdot y'_0 = 2 \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \int_{x''\div x'} y_x^2 \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx.$$

Da man nun weiß, daß der Schwer-Punkt in der Ebene liegt, welche durch OX hindurchgeht und alle diese Bogen halbirt, so ist hierdurch und durch das Resultat im Beispiel (2. zu I.) der Schwer-Punkt der Oberfläche völlig bestimmt.

Dies alles stimmt aber mit den Resultaten des (§. 60.) genau überein.

Anmerk. 1. Ganz analoge Sätze gelten natürlich auch für ebene Figuren. Werden diese durch parallele und gleichweit abstehende gerade Linien in Stücken zerlegt, und denkt man sich eine Gerade OX senkrecht auf diese Parallelen, so ist, wenn V den Inhalt dieser Fläche bezeichnet (deren äußerste Grenzen ebenfalls Gerade, mit den parallelen Theilungs-Linien selbst wieder parallele Linien sind), wenn ferner OX als Axe der x genommen wird, φ_x die Länge der zu der Abscisse x gehörigen Parallele ist, und wenn die Grenz-Linien der Fläche V durch die Abscissen-Werthe x' und x'' bestimmt werden,

(C)··· $$V = \int_{x''\div x'} \varphi_x \cdot dx$$

und (⊙)··· $$V \cdot x_0 = \int_{x''\div x'} x \cdot \varphi_x \cdot dx,$$

woraus x_0 gefunden wird.

Auf diesem Wege könnte man den Schwer-Punkt eines Dreiecks noch einmal finden, aber auch den Schwer-Punkt eines durch eine beliebige Sehne abgeschnittenen Stückes einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel, oder irgend einer anderen Kurve.

Anmerk. 2. Für irreguläre Körper findet man in der Praxis den Schwer-Punkt oft dadurch, daß man ihn auf einer scharfen Kante in dreien verschiedenen Lagen schweben läßt, und dadurch drei (vertikale) Schwer-Ebenen bekommt (d. h. Ebenen in denen der Schwer-Punkt liegen muß), deren Durchschnitts-Punkt dann der gesuchte Schwer-Punkt ist.

Auch hängt man wohl den Körper an verschieden ange-

brachten Fäden auf, um in den Verlängerungen dieser Fäden Schwer-Linien zu haben, deren Durchschnitt der Schwer-Punkt seyn muß.

Endlich schließt man auch von dem Schwer-Punkt eines kleinern Modells auf die Lage des Schwer-Punkts des (größern) Originals.

Zum Schlusse noch einige Uebungs-Beispiele für die Berechnung der Schwer-Punkte homogener Linien, Flächen oder Körper.

1) Der Schwer-Punkt des Umfanges eines Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, steht von diesen Seiten senkrecht ab, bezüglich um

$$\frac{s-a}{s\cdot a}\cdot F,\quad \frac{s-b}{s\cdot b}\cdot F \text{ und } \frac{s-c}{s\cdot c}\cdot F$$

wenn s der Umfang und F der Inhalt des Dreiecks ist.

2) Ist in der Parabel (Fig. 20.) $OP = x$, $PM = y$ und $y^2 = px$, und bedeutet s die Länge des Bogens OM, so wie x_o und y_o die Koordinaten-Werthe seines Schwer-Punktes, so findet man

$$s = \frac{y}{2p}\cdot\sqrt{p^2+4y^2}+\tfrac{1}{2}p\cdot log\frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{p}$$

und $$x_o = \frac{y\cdot(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\cdot s}{16p^2\cdot s};\quad y_o = \frac{(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}-p^3}{12p\cdot s}.$$

3) Ist dagegen OM (Fig. 20.) der Bogen, der durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(2ax+x^2)$$

gegebenen Hyperbel, so findet sich, wenn $a^2+b^2 = p^2$ gesetzt wird,

$$x_o = \frac{a}{2s}\left[\frac{b^2}{y}\cdot\sqrt{b^4+p^2y^2}+\frac{b^2}{p}\cdot log\frac{py+\sqrt{b^4+p^2y^2}}{b^2}\right]-a$$

$$y_o = \frac{b}{2s}\left[\frac{a+x}{a^2}\cdot\sqrt{a^2b^2+2ap^2x+p^2x^2}-b-\frac{a^2}{p}\cdot log\frac{p(a+x)+\sqrt{a^2b^2+2ap^2x+p^2x^2}}{a(b+p)}\right],$$

während der Bogen s selbst gegeben ist durch die elliptische Transcendente

$$s = \frac{1}{b}\cdot\int_{y\div 0}\sqrt{\left(\frac{b^4+p^2y^2}{b^2+y^2}\right)}\cdot dy,$$

und durch Reihen oder mittelst Tabellen ausgewerthet wird.

4) Ist OM (Fig. 20.) der Bogen einer Ellipse, welche durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}\cdot(2bx - x^2)\ *)$$

gegeben ist, so findet sich dagegen, wenn $a^2 - b^2 = p^2$ gesetzt wird,

$$x_0 = b - \frac{b}{2s}\cdot\left[\frac{y}{a^2}\sqrt{a^4 - p^2y^2} + \frac{a^2}{p}\cdot\frac{1}{\sin}\frac{py}{a^2}\right],$$

$$y_0 =$$

$$\frac{a}{2s}\cdot\left[s - \frac{b-x}{b^2}\sqrt{a^2b^2 - 2bp^2x + p^2x^2} + \frac{b^2}{p}\cdot log\frac{\sqrt{a^2b^2 - 2bp^2x + p^2x^2} - p(b-x)}{b(a-p)}\right],$$

während der Bogen s selbst wieder gegeben ist durch die elliptische Transcendente

$$s = \frac{1}{a}\cdot\int\sqrt{\left(\frac{a^4 - p^2y^2}{a^2 - y^2}\right)}\cdot dy.$$

Setzt man $x = a$, $y = b$, so bekommt man den Schwer-Punkt des elliptischen Bogen-Quadranten.

5) Ist OM (Fig. 20.) eine Kurve, welche, wenn $OM = s$, $OP = x$ und $PM = y$ gesetzt wird, durch die Gleichung

$$s^2 = 2cx + x^2\ **)$$

gegeben seyn mag, so finden sich die Koordinaten-Werthe x_0, y_0 des Schwer-Punktes dieses Bogens $OM = s$ so:

$$x_0 = \tfrac{1}{2}(x - c) + \tfrac{1}{2}c\cdot\frac{y}{s} \quad \text{und} \quad y_0 = y - c\cdot\frac{x}{s}.$$

6) Der Schwer-Punkt eines Parallel-Trapezes liegt in der Geraden, welche die beiden parallelen Seiten b und c in den Punkten B und C halbirt. Ist a die Länge dieser Halbirungs-Linie, so steht der Schwer-Punkt von B und C bezüglich um

$$\frac{a(b+2c)}{3(b+c)} \quad \text{und} \quad \frac{a(2b+c)}{3(b+c)}$$

ab. Die senkrechten Abstände des Schwer-Punktes von den beiden parallelen Seiten b und c sind daher, wenn h deren senkrechten Abstand bedeutet, bezüglich

$$\frac{h(b+2c)}{3(b+c)} \quad \text{und} \quad \frac{h(2b+c)}{3(b+c)}.$$

(Das Trapez wird in zwei Dreiecke zerlegt, und dann folgt das Uebrige aus §. 55. II.).

7) Der Schwer-Punkt der Fläche eines Halb-Kreises, dessen Radius

---

*) Bei dieser Gleichung ist O als der Scheitel der kleinen Axe 2b der Ellipse gedacht.

**) Man nennt diese Kurve gewöhnlich die Ketten-Linie, weil eine schwere Kette an beiden Enden aufgehängt unter gewissen Voraussetzungen eine solche Kurve bildet.

l iſt, ſteht vom Mittel-Punkt ab um $\frac{4l}{3\pi}$, oder 0,424413 l; (vergl. Beiſp. 3. zu §. 58.).

Um eben ſo viel ſteht der Schwer-Punkt der Fläche eines Quadranten von jedem der ihn begrenzenden Halbmeſſer ab.

8) Der Schwer-Punkt eines Gewölb-Durchſchnittes, der von zwei concentriſchen Kreis-Bogen (deren Längen B und b, Sehnen S und s, und Radien R und r ſind) und von zweien Radien begrenzt wird, die unter ſich den Winkel α machen, liegt vom Mittel-Punkte ab um

$$\frac{2S}{3B}\cdot\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2} = \frac{2s}{3b}\cdot\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\ *).$$

9) Werden durch einen Kreis, deſſen Radius R iſt, zwei Sehnen mit einander parallel gelegt, deren Längen bezüglich S und s ſind, ſo liegt der Schwer-Punkt des dadurch begrenzten Flächen-Stücks vom Mittel-Punkt des Kreiſes um

$$\frac{S^3-s^3}{12F}$$

ab, wenn F den Inhalt des Flächen-Stücks vorſtellt.

10) Iſt OM (Fig. 20.) eine Ellipſe, gegeben durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(2ax-x^2);$$

iſt ferner V der Inhalt der Fläche OPM; iſt noch OP = x, PM = y und bedeuten x_0 und y_0 die Koordinaten des Schwer-Punkts dieſer Fläche OPM oder V, ſo findet ſich nach (§. 58.)

$$V = \tfrac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{cos}\frac{a-x}{a} - \frac{b(a-x)}{2a}\cdot\sqrt{2ax-x^2},$$

$$x_0 = a-\frac{a^2\cdot y^3}{3b^2\cdot V} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{b^2\cdot(3a-x)\cdot x^2}{6a^2\cdot V}.$$

Für den elliptiſchen Quadranten iſt

$$x_0 = a\cdot\left(1-\frac{4}{3\pi}\right) \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

Für a = b erhält man das Reſultat (7.).

11) Wäre aber OM eine Hyperbel, gegeben durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(2ax+x^2),$$

und hätten x, y, x_0, y_0, V die analogen Bedeutungen, ſo hätte man

$$V = \frac{b(a+x)}{2a}\cdot\sqrt{2ax+x^2} - \tfrac{1}{2}ab\cdot log\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}$$

und

$$x_0 = \frac{a^2\cdot y^3}{3b^2\cdot V} - a; \quad y_0 = \frac{b^2\cdot(3a+x)\cdot x^2}{6a^2\cdot V}.$$

---

*) Man findet zuerſt die Schwer-Punkte der beiden Sektoren, und daraus den Schwer-Punkt ihrer Differenz nach (§. 55. II.).

12) Hat man einen Gewölb-Durchschnitt, der von zweien concentrischen halben Ellipsen gebildet wird; sind A und B die halben Axen der größern und a, b die der kleinern Ellipse, so ist der Abstand des Schwer-Punkts dieser Fläche vom Mittel-Punkt der Ellipsen

$$= \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{A \cdot B^2 - a \cdot b^2}{A \cdot B - a \cdot b}.$$

Für $A = B$ und $a = b$ geht hieraus das Resultat der (8.) hervor, wenn dort $\alpha = \pi$ gesetzt wird.

13) Der Abstand des Schwer-Punktes einer dreiseitigen Pyramide von irgend einer Ebene ist der vierte Theil der Summe der vier Abstände der vier Ecken von derselben Ebene.

14) Hat man eine beliebige von zweien parallelen Grundflächen begrenzte abgekürzte Pyramide; sind S und s ähnlich liegende Seiten beider Grundflächen, und ist a die Länge der Linie Ll, welche die Schwer-Punkte L und l beider Grundflächen mit einander verbindet, so liegt der Schwer-Punkt G in dieser Linie, und zwar von L und l, bezüglich um

$$LG = \tfrac{1}{4}a \cdot \frac{S^2 + 2sS + 3s^2}{S^2 + sS + s^2} \quad \text{und} \quad lG = \tfrac{1}{4}a \cdot \frac{3S^2 + 2sS + s^2}{S^2 + sS + s^2}$$

ab. Dies gilt auch für den Kegel, wenn S und s die Radien oder die Durchmesser der Grundflächen sind.

15) Ist dieselbe Pyramide ausgehöhlt, und die Aushöhlung prismatisch mit einer den Grundflächen der Pyramide ähnlichen Grundfläche, deren ähnlich liegende Seite σ mit S und s parallel ist; fällt ferner die gerade Linie, welche die Schwer-Punkte der prismatischen Grundflächen mit einander verbindet mit der Schwer-Linie Ll in (14.) zusammen, so hat man, wenn G den Schwer-Punkt dieser hohlen Pyramide vorstellt,

$$LG = \tfrac{1}{4}a \cdot \frac{S^2 + 2sS + 3s^2 - 6\sigma^2}{S^2 + sS + s^2 - 3\sigma^2}.$$

Dies gilt auch für den cylindrisch ausgehöhlten abgekürzten Kegel, wenn S, s, σ die Radien oder die Durchmesser der Kreise vorstellen.

Ist aber $\sigma = s$, so ist

$$LG = \tfrac{1}{4}a \cdot \frac{S + 3s}{S + 2s} = \tfrac{1}{4}a \cdot \left(1 + \frac{s}{S + 2s}\right).$$

16) Nennt man in einer schief abgekürzten dreiseitigen Pyramide diejenige der beiden Grundflächen die Obere, welche der Spitze der Pyramide näher liegt; sind a, b, c die drei senkrechten Abstände der drei Ecken der obern Grundfläche von der untern, so ist der Abstand des Schwer-Punktes der abgekürzten Pyramide von der untern Grundfläche, wenn $a + b + c = s$ gesetzt wird,

$$= \frac{s^2 - (ab + ac + bc)}{4s} = \tfrac{1}{4}\left(s - \frac{ab + ac + bc}{s}\right).$$

Der Inhalt dieses Körpers ist $= \frac{1}{3}s \cdot F$, wenn F der Inhalt der untern Grundfläche ist.

17) Sind a, b, c, d die senkrechten Abstände der einen Grundfläche eines schief abgeschnittenen Parallelepipedums von der andern (wo bekanntlich die Summe je zweier gegenüberliegenden gleich groß ist, so daß man $d = a+c-b$ hat), so ist der Abstand des Schwer-Punkts dieses Körpers von dieser letztern Grundfläche

$$= \frac{2a^2+b^2+2c^2+3ac-b(a+c)}{6(a+c)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(a+c) - \frac{ab+ac+bc-b^2}{6(a+c)}.$$

18) Der Schwer-Punkt einer körperlichen Halb-Kugel steht vom Mittel-Punkt derselben um $\frac{3}{8}R$ ab, wenn R ihr Radius ist (§. 60. Beispiel 3.).

19) Der Schwer-Punkt eines von zweien concentrischen Halb-Kugeln gebildeten Kugel-Gewölbes steht vom Mittel-Punkt um $\frac{3}{8}\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}$ ab, wenn R und r die Halbmesser sind.

20) Dreht sich die Parabel OPM (Fig. 20.) um ihre Axe OX, so ist der Schwer-Punkt dieses Umdrehungs-Körpers von O um $\frac{2}{3}$OP entfernt.

Schneidet man von diesem Konoid durch zwei Ebenen, welche durch OX gelegt sind, und einen Winkel α mit einander machen, ein Stück aus, so steht der Schwer-Punkt dieses Stücks um $\frac{8}{12}\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}$·PM von der Axe OX ab.

21) Ist dagegen OM (Fig. 20.) eine durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$$

gegebene Hyperbel, während OP = x, PM = y ist, so liegt der Schwer-Punkt des durch OPM beschriebenen ganzen Umdrehungs-Körpers von O ab um

$$\frac{8a+3x}{12a+4x}\cdot x.$$

22) Ist aber die Kurve OM (Fig. 20.) die durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$$

gegebene Ellipse, so liegt der Schwer-Punkt des Umdrehungs-Körpers von O ab um

$$\frac{8a-3x}{12a-4x}\cdot x.$$

Diese Entfernung wird $\frac{5}{8}a$, wenn $x = a$ genommen wird, d. h. wenn man das halbe Ellipsoid (elliptische Konoid) hat.

23) Dreht sich die durch die Gleichungen

$$x = l - l\cdot\cos w \quad \text{und} \quad y = l\cdot w + l\cdot\sin w$$

gegebene Cykloide O′MO (Fig. 14.), wo OP = x, PM = y und l der Radius des Erzeugungs-Kreises ist, abwechselnd um 1) OX, 2) OY, 3) O′X

und 4) OY, so entstehen vier Umdrehungs-Körper, also auch vier Umdrehungs-Oberflächen. Die Schwer-Punkte eines jeden dieser Umdrehungs-Körper und seiner Oberfläche liegen jedesmal in der Dreh-Axe.

A. Im Falle der erste Körper in's Auge gefaßt wird, dessen Dreh-Axe OX ist, so hat man

I. den Inhalt der zu $OP = x$ gehörigen Oberfläche
$$= 2\pi\cdot[2y\cdot\sqrt{2lx} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2l}\cdot(2l-x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{16}{3}l^2];$$

II. ihr Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O dagegen
$$= 2\pi\cdot[\tfrac{2}{3}y\cdot x\cdot\sqrt{2lx} + \tfrac{4}{15}\sqrt{2l}\cdot(2l-x)^{\frac{5}{2}}\cdot(\tfrac{1}{3}l+x) - \tfrac{64}{45}l^3].$$

III. Der Inhalt des zu OP gehörigen Körpers ist ferner
$$= \tfrac{1}{8}l^3\pi\cdot\left\{\begin{array}{l} 3w^2(1-2\cos w) + 6w\cdot\sin w\,(2-\cos w) \\ \qquad + \sin w^2\,(3-2\cos w) - 8\,(1-\cos w)\end{array}\right\};$$

IV. und sein Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O,
$$= \tfrac{1}{32}l^4\pi\cdot\left\{\begin{array}{l} 9w^2\cdot(1-4\cos w+2\cos w^2) + 6w\cdot\sin w\cdot(8-9\cos w+4\cos w^2) \\ \qquad + \cos w\cdot(12-9\cos w+20\cos w^2-9\cos w^3) - 14\end{array}\right\}.$$

Nimmt man die ganze Oberfläche und den ganzen Körper, so muß man $x = 2l$, $y = l\pi$ und $w = \pi$ setzen, und man hat dann

I_1. die Oberfläche $= 8\pi\cdot l^2\cdot(\pi - \frac{4}{3})$;

II_1. die Entfernung ihres Schwer-Punktes von O, $= \dfrac{30\pi - 16}{45\pi - 60}\cdot l$;

III_1. den Inhalt des Körpers $= \frac{1}{2}l^3\pi\cdot(9\pi^2 - 16)$, welches $\frac{5}{8}$ des Produkts aus Grundfläche und Höhe ist;

IV_1. die Entfernung seines Schwer-Punktes von O, $= \frac{1}{2}l\cdot\dfrac{63\pi^2 - 64}{9\pi^2 - 16}$.

B. Betrachtet man den zweiten Körper, dessen Dreh-Axe OY ist, so hat man

I. seine zu $OQ = y$ gehörige Oberfläche $= \frac{4}{3}\pi\cdot x\cdot\sqrt{2lx}$;

II. ihr Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O dasselbe wie in (A. II.);

III. der Inhalt des Körpers
$$= \tfrac{1}{8}\pi l^3\cdot[3w - \sin w(2+3\cdot\cos w - 2\cos w^2)];$$

IV. sein Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O,
$$= \tfrac{1}{32}\pi l^4\cdot\left\{\begin{array}{l} 9w^2 - 6w\cdot\sin w(2+3\cos w - 2\cos w^2) \\ \qquad - \cos w\cdot(48 - 9\cos w - 16\cos w^2 + 9\cos w^3) + 32\end{array}\right\}.$$

Nimmt man aber die ganze Oberfläche und den ganzen Körper, so muß man $x = 2l$, $y = l\pi$ und $w = \pi$ setzen, und man findet

I_2. die Oberfläche $= \frac{16}{3}\pi\cdot l^2$;

II_2. die Entfernung ihres Schwer-Punktes von R, $= \frac{6}{13}l$;

III_2. den Inhalt des Körpers $= \frac{1}{2}\pi^2\cdot l^3$,
welches der achte Theil ist des Produkts aus Grundfläche und Höhe;

IV_2. die Entfernung seines Schwer-Punktes von O, $= \dfrac{9\pi^2 + 64}{10\pi}\cdot l$.

C. Für den dritten Körper, deſſen Dreh-Axe O′X iſt, findet man, wenn $O'P' = l\pi - y = x'$ und $P'M = 2l - x = y'$ geſetzt wird,

I. die zu $OP' = x'$ gehörige Oberfläche

$$= -\tfrac{8}{3}\pi\cdot\sqrt{2l}\cdot(4l+y')\cdot\sqrt{2l-y'} + \tfrac{32}{3}\pi l^2;$$

II. ihr Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O′,

$$= -\tfrac{8}{3}\pi\cdot\sqrt{2l}\cdot\left[x'\cdot(4l+y')\cdot\sqrt{2l-y'} - (\tfrac{8}{5}l+\tfrac{2}{5}y')\cdot y'\cdot\sqrt{y'}\right];$$

III. den Inhalt des Körpers

$$= \tfrac{1}{8}\pi l^3\cdot[15(\pi - w) - \sin w\cdot(22 + 9\cos w + 2\cos w^2)];$$

IV. ſein Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O′,

$$= \tfrac{1}{96}\pi l^4\cdot\left[\begin{array}{l}45(\pi - w)^2 - 6(\pi - w)\cdot\sin w\cdot(22 + 9\cdot\cos w + 2\cdot\cos w^2)\\ +\cos w\cdot(96 - 27\cdot\cos w - 32\cdot\cos w^2 - 9\cos w^3) + 100\end{array}\right].$$

Hat man wieder die ganze Oberfläche und den ganzen Körper im Auge, ſo findet ſich, weil $x' = l\pi$, $y' = 2l$ und $w = 0$ wird,

I_3. die Oberfläche $= \frac{32}{3}\pi\cdot l^2$;

II_3. die Entfernung ihres Schwer-Punkts von O′, $= \frac{26}{15}l$;

III_3. der Inhalt des Körpers $= \frac{5}{2}\pi^2\cdot l^3$,

welches $\frac{5}{8}$ des Produktes aus Grundfläche und Höhe iſt;

IV_3. die Entfernung ſeines Schwer-Punktes von O′, $= \dfrac{45\pi^2 + 128}{90\pi}\cdot l$.

D. Für den vierten Körper endlich, deſſen Dreh-Axe O′Y′ iſt, findet man

I. die zu $O'Q'$ gehörige Oberfläche

$$= 2\pi\cdot\sqrt{2l}\cdot\left[-2y'\cdot\sqrt{2l-y'} + \tfrac{8}{3}y'\cdot\sqrt{y'}\right];$$

II. ihr Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O′,

$$= 2\pi\cdot\sqrt{2l}\cdot\left[-\tfrac{8}{3}x'\cdot\sqrt{2l-y'}\cdot(4l+y') + \tfrac{8}{15}(5l+\tfrac{1}{2}y')\cdot y'\cdot\sqrt{y'}\right];$$

III. den Inhalt des Körpers

$$= \tfrac{1}{8}\pi l^3\cdot\left[\begin{array}{l}3(\pi - w)^2\cdot(2\cos w - 1) + 6(\pi - w)\cdot\sin w(2 - \cos w)\\ -\cos w\cdot(6 - 3\cos w + 2\cos w^2) - 11\end{array}\right];$$

IV. ſein Schwer-Punkts-Moment in Bezug auf O′,

$$= \tfrac{1}{96}\pi l^4\times$$
$$\left[\begin{array}{l}9(\pi - w)^2\cdot(-3 + 4\cos w + 2\cos w^2) + 6(\pi - w)\cdot\sin w\cdot(16 - 3\cos w - 4\cos w^2)\\ -\cos w\cdot(60 - 27\cos w + 4\cos w^2 + 9\cos w^3) - 82\end{array}\right].$$

Hat man die ganze Oberfläche und den ganzen Körper im Auge, für welche $y'' = 2l$, $x' = l\pi$ und $w = 0$ iſt, ſo findet ſich

I_4. die Oberfläche $= \frac{32}{3}\pi\cdot l^2$;

II_4. die Entfernung ihres Schwer-Punktes von O′, $= \frac{26}{15}l$;

III_4. der Inhalt des Körpers $= \frac{1}{8}\pi l^3\cdot(3\pi^2 - 16)$;

IV_4. die Entfernung ſeines Schwer-Punktes von O′, $= \frac{11}{9}l\cdot\dfrac{27\pi^2 - 128}{3\pi^2 - 16}$.

Dieſe verſchiedenen Reſultate mit einander verglichen geben merkwürdige Beziehungen; z. B. die Oberflächen (I_3. und I_4.) ſind einander gleich, und doppelt ſo groß als die Oberfläche (I_2.); u. dgl. m. — Auch ſind diejenigen Reſultate intereſſant, welche jedesmal für $x = l$ hervorgehen.

Die Integrationen selbst werden so durchgeführt, wie solches in den Beispielen (5. und 6. des §. 58.) zu sehen ist; am einfachsten durch das Verfahren des (Beisp. 6. desselben §. 58.).

24) Den Schwer-Punkt eines homogenen ellipsoidischen Körper-Stückes zu finden, wenn dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$1. \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

gegeben, und das Stück selbst durch zwei auf OX senkrechte Ebenen begrenzt ist, welche letztere durch die Koordinaten-Werthe $x=x'$ und $x=x''$ gegeben sind.

Der zu x gehörige auf OX senkrechte Querschnitt ist die durch die Gleichung (1.), d. h. durch die Gleichung

$$2. \qquad \frac{a^2}{b^2\cdot(a^2-x^2)}\cdot y^2+\frac{a^2}{c^2\cdot(a^2-x^2)}\cdot z^2=1$$

gegebene Ellipse, deren halbe Axen also bezüglich

$$\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$

sind. Der Inhalt dieser Ellipse ist daher nach (I. Th. Geom. §. 8.)

$$\psi=\pi\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot(a^2-x^2);$$

und deshalb hat man

$$V=\pi\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot\int_{x'}^{x''}(a^2-x^2)\cdot dx=\pi\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot\left[a^2\cdot(x''-x')-\tfrac{1}{3}(x''^3-x'^3)\right],$$

so wie

$$V\cdot x_0=\pi\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot\int_{x'}^{x''}(a^2-x^2)\cdot x\cdot dx=\pi\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}a^2\cdot(x''^2-x'^2)-\tfrac{1}{4}(x''^4-x'^4)\right],$$

wo V der Inhalt und x_0 die Abscisse des Schwer-Punktes dieses Stückes des Ellipsoids ist.

Hat man das halbe Ellipsoid im Auge, für welches $x'=0$ und $x''=a$ ist, so erhält man

$$V=\tfrac{2}{3}\cdot\pi\cdot abc \qquad \text{und} \qquad V\cdot x_0=\tfrac{1}{4}\pi a^2bc,$$

woraus

$$x_0=\tfrac{3}{8}a$$

hervorgeht.

Für $a=b=c$ kommt man auf den Schwer-Punkt eines Kugel-Segments und der Halb-Kugel wieder zurück (vgl. Beisp. 3. zu §. 60.).

25) Den Schwer-Punkt eines homogenen Kugel-Dreiecks ABC (Fig. 21.) zu finden, dessen Winkel bezüglich α, β, γ, dessen gegenüberliegende Seiten a, b, c (gegeben) sind, und dessen Radius 1 ist.

Um diese Aufgabe zu lösen, muß man die Formeln (§. 59.) zu Hilfe nehmen; wir wollen dabei Polar-Koordinaten gebrauchen, zu dem Ende, wenn O der Mittel-Punkt der Kugel ist, die Gerade OA als Axe OX, die Ebene OAB als Ebene YOX nehmen, und den Pol O′ mit O zusammenfallen lassen, so daß $OO'=e=0$ wird. Dann sind die Grenz-Werthe

$\theta' = 0$, $\theta'' = \alpha$, $\varphi' = 0$ und φ'' eine Funktion von θ, welche aus der sphärischen Trigonometrie gefunden werden kann. Ist nämlich M die Stelle des Elementes, so ist der sphärische Winkel $BAM = \theta$, also $CAM = \alpha - \theta$ und W. AOD oder die sphärische Seite $AD = \varphi''$. In dem sphärischen Dreieck ABD kann man nun aus den zwei Winkeln θ und β und der Zwischen-Seite c, die andere Seite AD oder φ'' ohne weiteres finden; man hat nämlich

1. $$cotg\,\varphi'' = \frac{cos\,c \cdot cos\,\theta + cotg\,\beta \cdot sin\,\theta}{sin\,c}$$

oder

2. $$cotg\,\varphi'' = p \cdot sin(\theta + q),$$

wenn

3. $$p \cdot cos\,q = \frac{cotg\,\beta}{sin\,c} \quad \text{und} \quad 4.\ p \cdot sin\,q = cotg\,c$$

gesetzt wird.

Da ferner die Gleichung der Kugel-Fläche dasmal ganz einfach

5. $$r = 1$$

ist, so hat man

6. $$\partial r_\varphi = 0,\ \partial r_\theta = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{r^2 \cdot sin\,\varphi^2 + \partial r_\varphi{}^2 \cdot sin\,\varphi^2 + \partial r_\theta{}^2} = 1 \cdot sin\,\varphi;$$

und die Formeln (§. 59. d.) geben nun, da hier 1 statt f und folglich der Inhalt V statt der Masse M gesetzt werden muß,

$$(\!(\,)\!)\ldots \qquad V = l^2 \cdot \int_{\alpha \div 0} (1 - cos\,\varphi'') \cdot d\theta$$

und

$$(\odot)\ldots \begin{cases} V \cdot x_0 = \frac{1}{4} l^3 \cdot \int_{\alpha \div 0} (1 - cos\,2\varphi'') \cdot d\theta = \frac{1}{2} l^3 \cdot \int_{\alpha \div 0} sin\,\varphi''^2 \cdot d\theta \\ V \cdot y_0 = \frac{1}{2} l^3 \cdot \int_{\alpha \div 0} (\varphi'' - sin\,\varphi'' \cdot cos\,\varphi'') \cdot cos\,\theta \cdot d\theta \\ V \cdot z_0 = \frac{1}{2} l^3 \cdot \int_{\alpha \div 0} (\varphi'' - sin\,\varphi'' \cdot cos\,\varphi'') \cdot sin\,\theta \cdot d\theta. \end{cases}$$

Um nun zunächst aus $(\!(\,)\!)$ den Inhalt V des sphärischen Dreiecks zu finden, hat man

7. $$\int_{\alpha \div 0} (1 - cos\,\varphi'') \cdot d\theta = \alpha - \int_{\alpha \div 0} cos\,\varphi'' \cdot d\theta,$$

dabei aber aus (2.)

8. $$cos\,\varphi'' = \frac{p \cdot sin(\theta + q)}{\sqrt{1 + p^2 \cdot sin(\theta + q)^2}} = \frac{p \cdot sin\,v}{\sqrt{1 + p^2 \cdot sin\,v^2}},$$

wenn

9. $$\theta + q = v \quad \text{oder} \quad \theta = v - q$$

gesetzt wird, so daß

10. $$\int cos\,\varphi'' \cdot d\theta = p \cdot \int \frac{sin\,v}{\sqrt{1 + p^2 \cdot sin\,v^2}} \cdot dv$$

wird. — Setzt man hier

11. $$cos\,v = z, \quad \text{also} \quad -sin\,v \cdot dv = dz,$$

so erhält man

12. $$\int \cos\varphi''\cdot d\theta = -p\cdot\int \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)-p^2\cdot z^2}}\cdot dz = \frac{1}{\cos}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot z\right)$$
$$= \frac{1}{\cos}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\cos v\right) = \frac{1}{\cos}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\cos(\theta+q)\right).$$

Nimmt man nun dieses Integral zwischen den vorgeschriebenen Grenzen, so hat man

13. $$\int_{\alpha\div 0} \cos\varphi''\cdot d\theta = \frac{1}{\cos}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\cos(\alpha+q)\right) - \frac{1}{\cos}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\cos q\right).$$

Um dieses Resultat zu reduziren, bemerke man, daß sich aus (3. und 4.) findet

14. $$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \sin c\cdot\sin\beta,\quad \frac{p\cdot\cos q}{\sqrt{1+p^2}} = \cos\beta,\quad \frac{p\cdot\sin q}{\sqrt{1+p^2}} = \cos c\cdot\sin\beta;$$

folglich auch

15. $$\frac{p}{1+p^2}\cos(\alpha+q) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos c = -\cos\gamma = \cos(\pi-\gamma).$$

Dadurch geht aber die Formel (13.) in

16. $$\int_{\alpha\div 0} \cos\varphi''\cdot d\theta = \pi-\beta-\gamma$$

über, so daß zuletzt aus (7.) und (C.) sich ergiebt

(C₁)··· $$V = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)\cdot l^2\ ^*).$$

Will man die Integrale (⊙) finden, so zeigt sich bald, daß sie sich alle auf das Integral

17. $$J = \int_{\alpha\div 0} \frac{1}{1+p^2\cdot\sin(\theta+q)^2}\cdot d\theta = \int \frac{1}{(2+p^2)-p^2\cdot\cos u}\cdot du$$

zurückführen, wenn

$$2(\theta+q) = u$$

gesetzt wird. Nun findet sich aber dieses letztere Integral ohne weiteres

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{1}{\cos}\cdot\frac{-p^2+(2+p^2)\cdot\cos u}{(2+p^2)-p^2\cdot\cos u},$$

so daß, wenn man statt u seinen Werth 2(θ+q) setzt, und dann das In-

---

*) Dieses Resultat für den Inhalt des sphärischen Dreiecks findet man auch schon in der Elementar-Geometrie, indem man je zwei der Seiten des sphärischen Dreiecks verlängert sich denkt, dadurch drei sphärische Zweiecke erhält, deren Inhalte bezüglich $\frac{\alpha}{2\pi}\cdot F$, $\frac{\beta}{2\pi}\cdot F$ und $\frac{\gamma}{2\pi}\cdot F$ sind, während $F = 4l^2\pi$ die Kugel-Oberfläche vorstellt. Die Summe dieser drei Inhalte ist aber die Halb-Kugel +2V, also $= 2l^2\pi+2V$; folglich hat man die Gleichung $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\pi}\cdot 4l^2\pi = 2l^2\pi+2V$, woraus V wie oben hervorgeht.

tegral zwiſchen den Grenz-Werthen 0 und α' (von θ) nimmt, auch weil noch $\frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{2}\sin\beta\cdot\sin c$ iſt, man findet aus (17.)

18. $$J = \tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\sin c\cdot\left(\frac{1}{\cos}\frac{-p^2+(2+p^2)\cdot\cos 2(\alpha+q)}{(2+p^2)-p^2\cdot\cos 2(\alpha+q)} - \frac{1}{\cos}\frac{-p^2+(2+p^2)\cdot\cos 2q}{(2+p^2)-p^2\cdot\cos 2q}\right).$$

Bezeichnen wir dieſe beiden Bogen bezüglich durch w und w', ſo daß man

19. $$\cos w = \frac{-p^2+(2+p^2)\cdot\cos 2(\alpha+q)}{(2+p^2)-p^2\cdot\cos 2(\alpha+q)}$$

und

20. $$\cos w' = \frac{-p^2+(2+p^2)\cdot\cos 2q}{(2+p^2)-p^2\cdot\cos 2q}$$

hat, ſo wird aus (18.)

21. $$J = \sin\beta\cdot\sin c\cdot(\tfrac{1}{2}w-\tfrac{1}{2}w').$$

Nun findet ſich aber aus (19.) gar bald, weil

$$\frac{\cot g\,\beta\cdot\sin\alpha+\cos c\cdot\cos\alpha}{\sin c} = \cot g\, b$$

iſt,

22. $$\cos\tfrac{1}{2}w = \sqrt{\left(\frac{1+\cos w}{2}\right)} = \sin b\cdot\cos(\alpha+q)$$

und

23. $$\cos\tfrac{1}{2}w' = \sqrt{\left(\frac{1+\cos w'}{2}\right)} = \sin c\cdot\cos q.$$

Weil aber aus (3. und 4.)

24. $$tg\, q = \frac{\cos c}{\cot g\,\beta}, \quad \text{oder} \quad \cos c = \cot g\,\beta\cdot tg\, q$$

hervorgeht, ſo iſt, wie aus den rechtwinklichen ſphäriſchen Dreiecken bekannt iſt,

25. $$q = \tfrac{1}{2}\pi-\lambda,$$

wenn von A aus im ſphäriſchen Dreieck das ſphäriſche Loth AE auf BC oder a gefällt, ſolche BC dadurch in zwei Theile, nämlich $BE = a'$ und $CE = a''$ getheilt und der ſphäriſche Winkel $BAE = \lambda$ geſetzt wird. — Dann iſt aber auch

26. $$\alpha+q = \tfrac{1}{2}\pi+\alpha-\lambda;$$

folglich aus (25. und 26.)

27. $$\cos q = \sin\lambda \quad \text{und} \quad \cos(\alpha+q) = -\sin(\alpha-\lambda).$$

Die Gleichungen (22. und 23.) geben dann, vermöge der Formeln, welche für die rechtwinklich ſphäriſchen Dreiecke ſtatt finden,

28. $$\cos\tfrac{1}{2}w = -\sin b\cdot\sin(\alpha-\lambda) = -\sin a'';$$

29. $$\cos\tfrac{1}{2}w' = \sin c\cdot\sin\lambda = \sin a'.$$

Aus dieſen Gleichungen aber folgt

30. $$\tfrac{1}{2}w = \tfrac{1}{2}\pi+a'' \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}w' = \tfrac{1}{2}\pi-a';$$

und deshalb auch

31. $$\tfrac{1}{2}w-\tfrac{1}{2}w' = a''+a' = a.$$

Die Gleichung (21.) giebt daher endlich

32. $$J = a \cdot \sin\beta \cdot \sin c.$$

Nachdem nun J gefunden ist, so gehen wir zu den Gleichungen (⊙). Die erste derselben giebt, wenn man bedenkt, daß nach (2.)

33. $$\sin\varphi'' = \frac{1}{1+p^2\cdot\sin(\theta+q)^2}$$

ist, sogleich

$(⊙_1)\cdots$ $$V \cdot x_0 = \tfrac{1}{2}l^3 \cdot J = \tfrac{1}{2}l^3 \cdot a \cdot \sin\beta \cdot \sin c.$$

Die zweite der Gleichungen (⊙) giebt dagegen

34. $$V \cdot y_0 = \tfrac{1}{2}l^3 \cdot \int_{\alpha\div 0} \varphi'' \cdot \cos\theta \cdot d\theta - \tfrac{1}{2}l^3 \cdot \int_{\alpha\div 0} \sin\varphi'' \cdot \cos\varphi'' \cdot \cos\theta \cdot d\theta.$$

Differenziirt man nun die Gleichung (2.), so erhält man

35. $$\partial\varphi''_\theta = -\sin\varphi'^2 \cdot p \cdot \cos(\theta+q) = \frac{p\cdot\cos(\theta+q)}{1+p^2\cdot\sin(\theta+q)^2}.$$

Ferner findet sich nach der Formel

$$\int P \cdot \partial Q \cdot d\theta = P \cdot Q - \int Q \cdot \partial P_\theta \cdot d\theta,$$

36. $$\int \varphi'' \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \varphi'' \cdot \sin\theta - \int \sin\theta \cdot \partial\varphi''_\theta \cdot d\theta.$$

Setzt man also in (34.) statt $\sin\varphi''$ und $\cos\varphi''$ ihre Werthe aus (33. u. 8.), so wie statt $\int \varphi'' \cdot \cos\theta \cdot d\theta$ den Werth aus (36.), nachdem man daselbst vorher statt $\partial\varphi''_\theta$, dessen Werth aus (35.) gesetzt hat, — so vereinigen sich die beiden letztern Integrale in ein einziges und man erhält, wenn man die Grenzen der Integrale gehörig beachtet,

37. $$V \cdot y_0 = \tfrac{1}{2}l^3 \cdot (b \cdot \sin\alpha - p \cdot \sin q \cdot J),$$

oder, weil $p \cdot \sin q = \frac{\cos c}{\sin c}$ ist,

$(⊙_2)\cdots$ $$V \cdot y_0 = \tfrac{1}{2}l^3 \cdot (b \cdot \sin\alpha - a \cdot \cos c \cdot \sin\beta).$$

Das dritte der Integrale (⊙) giebt ganz auf dieselbe Weise

38. $$V \cdot z_0 = \tfrac{1}{2}l^3 \cdot (c - b \cdot \cos\alpha - p \cdot \cos q \cdot J),$$

oder, weil $p \cdot \cos q = \frac{\cos\beta}{\sin\beta \cdot \sin c}$ ist,

$(⊙_3)\cdots$ $$V \cdot z_0 = \tfrac{1}{2}l^3 \cdot (c - b \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\beta).$$

Und so sieht man also mittelst der Formeln $(⊙_1)$ und $(⊙_{1,2,3})$ die Koordinaten-Werthe x_0, y_0 und z_0 des Schwer-Punktes des sphärischen Dreiecks gefunden *).

26) Wollte man aber den Schwer-Punkt des durch die Ebenen OAB, OAC und OBC begrenzten homogenen Körpers finden (des körperlichen Kugel-Dreiecks), so müßte man die Formeln (§. 59. h) nehmen und man erhielte, weil jetzt $r'' = 1$ und $r' = 0$ ist, und wenn V den Inhalt des

*) Es ist nicht schwer für dieses Beispiel den Schwer-Punkt ohne alles Integriren, bloß auf geometrischem Wege (d. h. durch bloße geometrische Betrachtungen mit Zuziehung des als bekannt vorausgesetzten Schwer-Punktes eines jeden beliebigen Kreisbogens) zu finden.

Körpers vorstellt, so wie x_0, y_0, z_0 die Koordinaten-Werthe seines Schwer-Punktes

$$(\text{☾})\cdots \quad V = \tfrac{1}{3}l^3 \cdot \int_{\alpha \div 0} (1 - \cos\varphi'') \cdot d\theta$$

und

$$(\odot)\cdots \begin{cases} V \cdot x_0 = \tfrac{1}{8}l^4 \cdot \int_{\alpha \div 0} \sin\varphi''^2 \cdot d\theta \\ V \cdot y_0 = \tfrac{1}{8}l^4 \cdot \int_{\alpha \div 0} (\varphi'' - \sin\varphi'' \cdot \cos\varphi'') \cdot \cos\theta \cdot d\theta \\ V \cdot z_0 = \tfrac{1}{8}l^4 \cdot \int_{\alpha \div 0} (\varphi'' - \sin\varphi'' \cdot \cos\varphi'') \cdot \sin\theta \cdot d\theta, \end{cases}$$

wo φ'' durch die Gleichung

$$\cot g\,\varphi'' = \frac{\cos c \cdot \cos\theta + \cot g\,\beta \cdot \sin\theta}{\sin c}$$

als Funktion von θ gegeben ist.

Und weil diese Integrale genau dieselben sind, wie die im vorhergehenden (Beispiel 25.), so folgt, aus der Vergleichung, daß der Schwer-Punkt dieses Körpers zusammenfällt mit dem Schwer-Punkte eines sphärischen Dreiecks, welches der Körper auf der Kugel-Oberfläche ausschneidet, die mit dem Radius $\frac{3}{4}l$ aus O als Mittel-Punkt beschrieben wird *).

---

*) Dies folgt auch schon daraus, daß man den Körper durch Radien in unendlich viele unendlich-kleine pyramidenförmige Körperchen zerfällen kann, deren Schwer-Punkte alle um $\frac{3}{4}l$ von O abliegen, folglich sich gleichmäßig in einem zweiten sphärischen Dreieck vertheilen, welches zum Radius $\frac{3}{4}l$ hat. — (Vergl. die Note zum Beisp. 2. zu §. 60.)

Die Statik fester Körper.

Achtes Kapitel.

Von den Attraktionen.

Vorerinnerung.

Wir haben bereits im (§. 44.) von dem „Problem der Attraktionen" gesprochen, dasselbe bestimmt hingestellt und auch gezeigt, wie solches im Allgemeinen nur ein neues Beispiel der Anwendung der Lehren der (§§. 26. und 29.) seyn kann. Wenn wir daher hier auf dieses Problem zurückkommen, so kann es nur deshalb geschehen, um in einigen besonders interessanten und doch noch einfachen Fällen das Detail der Rechnungen nachweisen zu können. Zu diesen Fällen gehört aber die Bestimmung der Attraktion 1) einer Hohl-Kugel oder einer vollen Kugel, 2) eines hohlen oder vollen Ellipsoids, und endlich 3) eines Körpers von beliebiger Gestalt, der jedoch von dem angezogenen Element sehr entfernt ist. Diese drei Fälle sind nämlich für die Bestimmung der gegenseitigen Anziehung der Welt-Körper auf einander von Bedeutung, und zeigen doch zugleich, wie man sich in allen andern Fällen, welche die Physik noch darbieten kann, zu benehmen hat.

§. 63.

Allgemeines Problem.

Ein Elementchen im Sinne des (§. 52.), dessen Masse (unendlich-klein ist, und) durch μ bezeichnet seyn mag, und welches an irgend einem Punkte m (Fig. 22.) liegt, wird von einem materiellen Körper SWT, dessen Gestalt willkührlich aber gegeben ist, dessen Dichtigkeit an jeder Stelle durch ϱ bezeichnet seyn

mag (ſo daß ϱ an jeder andern Stelle einen anderen oder auch denſelben Werth haben kann), deſſen Maſſe folglich ebenfalls bekannt iſt und durch M bezeichnet werden ſoll, angezogen, ſo daß jedes Elementchen dM der Maſſe M, und das Elementchen μ, ſich gegenſeitig mit der Kraft $\mu \cdot dM \cdot f_u \cdot dt$ einander nähern wollen, nach (§. 41.), wo f_u eine, entweder als bekannt vorausgeſetzte oder noch unbeſtimmt gelaſſene Funktion der Entfernung u der beiden Elemente dM und μ von einander, iſt; — man ſoll die Attraktion des Körpers M auf das Elementchen μ beſtimmen, d. h. man ſoll nach (§. 26.), oder in dieſer einfachen Aufgabe, wo das Element μ als ein bloßer Atom angeſehen werden kann, bloß nach (§. 17. Th. I. Mech.) die einzige mittlere Kraft finden, welche ſtatt der unendlich vielen auf μ wirkenden Kräfte geſetzt werden kann.

I. Um dieſe Aufgabe zu löſen, legen wir durch einen beliebigen Punkt O im Körper M, drei beliebige auf einander ſenkrechte Axen OX, OY und OZ, beſtimmen die Koordinaten-Werthe x, y, z des Punktes m (wo μ liegt), und nennen x', y', z' die Koordinaten-Werthe des Elementchens dM in m' (welches jedes Element des Körpers M repräſentirt), ſo wird die Entfernung $m'm$ oder u (der Elementchen dM und μ von einander) nach (I. Th. Geom. §. 1.) gefunden, nämlich

$$1) \qquad u = +\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Die Koſinus der Winkel, welche die Richtung mm' der Kraft $\mu \cdot dM \cdot f_u$ *) (nicht $m'm$, in ſo ferne wir die Anziehung des als abſolut feſt gedachten Körpers M auf μ finden wollen) mit den drei Axen OX, OY, OZ bilden, ſind nun nach (I. Th. Mech. §. 28. Nr. 5.), wenn unter u die (in 1.) vorſtehende Wurzel verſtanden wird, bezüglich

$$2) \qquad -\partial u_x, \quad -\partial u_y, \quad \text{und} \quad -\partial u_z.$$

Alſo

*) Wir laſſen den Faktor dt weg, weil ſich ſolcher durch die ganze Rechnung durchziehen würde, ohne auf das End-Reſultat Einfluß zu haben. (Vergl. ſorgfältig I. Th. Mech. §. 31.)

Also giebt die Kraft $\mu \cdot dM \cdot f_u$, wenn sie nach diesen drei Axen zerlegt wird, die drei Seiten-Kräfte

3) $-\mu \cdot dM \cdot f_u \cdot \partial u_x$, $-\mu \cdot dM \cdot f_u \cdot \partial u_y$ und $-\mu \cdot dM \cdot f_u \cdot \partial u_z$.

Die gesuchte Attraktion (oder mittlere Kraft aus allen diesen Kräften) hat daher die drei Seiten-Kräfte

4) $$\begin{cases} X = -\Sigma(\mu \cdot dM \cdot f_u \cdot \partial u_x) \\ Y = -\Sigma(\mu \cdot dM \cdot f_u \cdot \partial u_y) \\ Z = -\Sigma(\mu \cdot dM \cdot f_u \cdot \partial u_z), \end{cases}$$

woraus die gesuchte Attraktion selbst, wenn wir sie durch P_0 bezeichnen, welche mit den Axen die Winkel α_0, β_0, γ_0 bildet, so sich findet, nämlich

5) $$P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und

6) $$\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}, \quad \cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0} \text{ und } \cos\gamma_0 = \frac{Z}{P_0},$$

alles genau nach (I. Th. Mech. §. 17.).

II. Das Summen-Zeichen Σ bezieht sich auf die unendlich vielen Kräfte, welche die unendlich vielen Elementchen dM der Masse M enthalten. Diese Summen müssen nun nach (§. 53.) durch dreifache Integration gefunden werden, wenn der Körper SWT in Bezug auf die angenommene Form der Elemente (§. 52.) ein Normal-Körper ist *). — Sollte jedoch der Körper M aus zwei oder mehr solchen Normal-Körpern zusammengesetzt seyn, so müßte man die gedachten Summen für jeden dieser Theil-Körper durch dreifache Integration finden, und die Resultate entweder addiren oder subtrahiren, je nachdem der gegebene Körper M oder SWT als die Summe oder als die Differenz der Theil- (Normal-) Körper erscheint.

III. Um nun die Rechnungen zu vereinfachen, finde man zuerst

*) Dabei mag jedoch der Anfänger nicht übersehen, daß hier die Koordinaten-Werthe der Stelle m′ des Elementes dM, nicht x, y, z sondern x′, y′, z′ sind. Bei diesen dreifachen Integrationen sind daher x, y, z (die dem angezogenen Punkte m angehören) als konstant anzusehen.

$$4)\quad \begin{cases} X = \mu\cdot\iiint\varrho\cdot f_r\cdot r^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta, \\ Y = \mu\cdot\iiint\varrho\cdot f_r\cdot r^2\cdot\sin\varphi^2\cdot\cos\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta, \\ Z = \mu\cdot\iiint\varrho\cdot f_r\cdot r^2\cdot\sin\varphi^2\cdot\sin\theta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta, \end{cases}$$

woraus sich zuletzt P_0 und α_0, β_0, γ_0 mittelst der Formeln (§§. 63. Nr. 5. u. 6.) ergiebt.

Dieses alles gilt übrigens auch, wenn das angezogene Element μ ausserhalb des anziehenden Körpers SWT oder M liegt, nur daß man dann lieber das Verfahren des vorhergehenden (§. 63.) in Anwendung bringt.

§. 65.

Besonderer Fall des allgemeinen Problems, wo $f_u = \frac{h}{u^2}$ ist.

Wir haben im (I. Th. Mech. §. 49. 1. Aufgabe. F.) gesehen, wie aus den Kepler'schen (Erfahrungs-) Gesetzen in Verbindung mit der Newton'schen Hypothese: „daß die Attraktion es sey, welche die Planeten in ihren Bahnen erhält," gefolgert werden konnte, daß die anziehende Kraft allemal im Verhältniß des umgekehrten Quadrats der Entfernung wirke. — Wir werden nun in dem Folgenden immer voraussetzen, daß

$$f_u = \frac{h}{u^2}, \quad \text{oder} \quad F_u = -\frac{h}{u}$$

sey, wo h irgend eine konstante (von der Entfernung u unabhängige) Verhältniß-Zahl vorstellen soll.

I. Unter dieser Voraussetzung berechnet sich, wenn man die Rechnung des (§. 63.) statt finden läßt, und wenn man, was hier bequem ist, das (+ oder —) Zeichen von T ändert,

$$1)\quad T = h\cdot\Sigma\left(dM\cdot\frac{1}{u}\right),$$

also im Falle des (§. 63. IV.)

$$2)\quad T = h\cdot\iiint\frac{1}{u}\cdot\varrho\cdot dx'\cdot dy'\cdot dz',$$

oder im Falle des (§. 63. V.)

$$3)\quad T = h\cdot\iiint\frac{1}{u}\cdot\varrho\cdot r^2\cdot\sin\varphi\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta.$$

In jedem Falle ist aber nach (§. 63. Nr. 10.), in so ferne jetzt $-T$ statt T steht,

4) $X = \mu \cdot \partial T_x$; $Y = \mu \cdot \partial T_y$ und $Z = \mu \cdot \partial T_z$,

wenn X, Y, Z die drei Seiten-Kräfte sind, in welche sich die gesuchte Attraktion P_0 zerlegt.

II. Liegt aber, wie wir im (§. 64.) vorausgesetzt haben, O in m, also m in O, so erhält man aus den dortigen Formeln (4.), wenn man der größern Einfachheit wegen die Dichtigkeit ϱ konstant, also den anziehenden Körper homogen voraussetzt, wenn man ferner die Integration nach r sogleich verrichtet, zwischen den wie im (§. 51.) gedachten Grenz-Werthen r' und r'' von r,

1) $X = \mu h \varrho \cdot \iint (r'' - r') \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$,

2) $Y = \mu h \varrho \cdot \iint (r'' - r') \cdot \sin\varphi^2 \cdot \cos\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$,

3) $Z = \mu h \varrho \cdot \iint (r'' - r') \cdot \sin\varphi^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$,

woraus dann zuletzt wieder P_0 und α_0, β_0, γ_0 mittelst der Formeln (§. 63. NNr. 5. und 6.) gefunden werden müssen.

§. 66.

Attraktion einer concentrischen Hohl-Kugel.

Ist die anziehende Masse M eine concentrische Hohl-Kugel, deren äußerer Halbmesser r'', deren innerer aber r' seyn mag, so nehme man den Mittel-Punkt dieser Hohl-Kugel zum Anfangs-Punkt O der Koordinaten, so daß m nicht in O liegt, und führe die Rechnung nach (§. 65. I.) durch.

Legt man aber die Axe OX zu gleicher Zeit auch durch den Punkt m, in welchem das Element μ liegt, so hat man dasmal

1) $y = 0$, $z = 0$, $u = \sqrt{(x - x')^2 + y'^2 + z'^2}$,

oder 2) $u = \sqrt{x^2 - 2rx \cdot \cos\varphi + r^2}$,

also nach (§. 65. I. Nr. 3.)

3) $$T = h \cdot \iiint \frac{\varrho \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta}{\sqrt{x^2 - 2rx \cdot \cos\varphi + r^2}}.$$

Da hier die Grenz-Werthe von r, von φ und von θ, von einander ganz unabhängig sind, so kann man nach (I. Th. Analys.

§. 38.) alle drei Integrationen in beliebiger Ordnung vornehmen. Wir wollen daher zuerst nach θ, dann nach φ und zuletzt nach r integriren. Die erstere Integration giebt nun, in so ferne 0 und 2π die Grenz-Werthe von θ sind,

$$4)\quad T = 2h\pi \cdot \int_{\varphi=0} \left(\int_{r'=r} \frac{\varrho \cdot r^2 \cdot \sin\varphi}{\sqrt{x^2 - 2rx\cdot\cos\varphi + r^2}} \cdot dr \right) \cdot d\varphi.$$

Ferner ist nach (I. Th. Analys. §. 32.)

$$5)\quad \int \frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{x^2 - 2rx\cdot\cos\varphi + r^2}} = \frac{1}{rx}\sqrt{x^2 - 2rx\cdot\cos\varphi + r^2} + C,$$

wo C eine unbestimmte Konstante vorstellt. Nehmen wir nun dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und π, und bedenken wir, daß

$\sqrt{x^2+2rx+r^2} = \pm(x+r)$ und $\sqrt{x^2-2rx+r^2} = \pm(x-r)$

ist, und daß diese Quadrat-Wurzel a, in so ferne sie die Entfernung der Elemente von einander ausdrückt, nie negativ gedacht werden kann, also auch nach dem Integriren positiv bleiben muß (vergl. Syst. d. Mathem. Th. III. S. 69.), so erhält man

$$6)\quad \int_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{x^2 - 2rx\cdot\cos\varphi + r^2}} = \frac{(x+r) \mp (x-r)}{x\cdot r},$$

wo das (—) oder (+) Zeichen gilt, je nachdem $x > r$ oder $x < r$ ist.

Unterscheiden wir daher von nun an folgende zwei Fälle:

I. Ist das angezogene Elementchen μ außerhalb der Hohl-Kugel, d. h. ist in jedem Falle $x > r$, auch für den größten Werth von r, so wird das Resultat (6.) jetzt folgendes:

$$7)\quad \int_{\varphi=0} \frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{x^2 - 2rx\cdot\cos\varphi + r^2}} = \frac{2r}{rx} = \frac{2}{x}.$$

Die Gleichung (4.) giebt nun, wenn die Dichtigkeit ϱ eine bloße Funktion von r allein ist, also weder von θ noch von φ abhängt,

$$8)\quad T = \frac{4h\pi}{x} \int_{r'=r} \varrho \cdot r^2 \cdot dr.$$

Also hat man nach (§. 65. I. Nr. 4.)

9) $X = -\frac{\mu h}{x^2} \cdot 4\pi \cdot \int_{r=\frac{1}{2}r'}^{r=r'} \rho \cdot r^2 \cdot dr$, und $Y = Z = 0$.

Nun findet sich aber nach (§. 54.) die Masse M der Hohl-Kugel so:

10) $M = 4\pi \cdot \int_{r=\frac{1}{2}r'}^{r=r'} \rho \cdot r^2 \cdot dr$.

Folglich geht die Gleichung (9.) über in

11) $X = -M \cdot \mu \cdot \frac{h}{x^2}$, während $Y = Z = 0$ ist,

wo x die Entfernung ist des Elements μ von dem Mittel-Punkt O der Halb-Kugel.

„Liegt also das angezogene Element μ außerhalb der Hohl-„Kugel, so ist die (Gesamt-) Anziehung der letztern auf das „erstere

$$= M \cdot \mu \cdot \frac{h}{x^2},$$

„d. h. der Richtung und der Größe nach gerade so, wie wenn „alle Atome von M in dem Mittel-Punkt O der Hohl-Kugel „vereinigt wären; sobald nur die Hohl-Kugel ganz homogen ist, „oder doch aus homogenen concentrischen Schichten besteht, und „unter der Voraussetzung, daß die Kraft der Anziehung zwischen „zwei Atomen im Verhältniß des umgekehrten Quadrats ihrer „Entfernung von einander statt findet *)."

II. Liegt aber das angezogene Element μ im Innern der Hohl-Kugel, so daß x kleiner ist als der kleinste Werth von r, so muß man in der Formel (6.) das (+) Zeichen gelten lassen, und man hat daher nun

7') $$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{x^2 - 2rx\cdot\cos\varphi + r^2}} = \frac{2}{r};$$

folglich auch aus (4.), wenn ρ bloß r allein enthält,

*) Man hätte sich sogleich ρ konstant denken können, und man würde dann diesen Satz für eine homogene Kugel-Schicht von beliebiger Dicke erhalten haben. Dann konnte er leicht auf beliebig viel homogene Kugel-Schichten von verschiedener Dichtigkeit ausgedehnt werden.

8′). $\varrho = \ldots \ldots$. $T = 4\pi h \cdot \int_{r=0}^{r=r'} \varrho \cdot r \cdot dr.$

Aber eben deshalb wird nun nach (§. 65. Nr. 4.), weil jetzt T auch kein x mehr hat, folglich $\partial T_x = 0$ wird,

9′) $$X = Y = Z = 0.$$

„Ein Elementchen μ irgend wo im Innern einer Hohl-Ku„gel, die entweder homogen ist, oder doch aus homogenen Schich„ten besteht, so daß die Dichtigkeit ϱ eine bloße Funktion von „r allein ist, wird also nach keiner Richtung hin gezogen, sondern „bleibt im Gleichgewicht, sobald wir nur voraussetzen, daß die „anziehende Kraft der Atome auf einander im Verhältniß des „umgekehrten Quadrats der Entfernung derselben statt findet *).

III. Liegt das Element μ weder außerhalb noch innerhalb der Hohl-Kugel, sondern in der anziehenden Masse M selbst, so wird man durch das Element μ eine concentrische Kugel-Fläche sich denken, so daß die gegebene Hohl-Kugel in zwei andere Hohl-Kugeln zertheilt wird, eine innere und eine äußere. Die Anziehung der äußern auf μ ist nun nach (II.) der Null gleich; also ist die Anziehung der gegebenen Hohl-Kugel gerade so groß, wie wenn der eben gedachte innere Theil derselben allein wirk

*) Dieses Resultat erhält man auch schon durch bloße elementargeometrische Betrachtungen. Denkt man sich nämlich eine unendlichdünne Kugel-Schicht, und innerhalb derselben irgend wo in einem Punkte m ein Elementchen μ; betrachtet man dann ein unendlich-kleines Stück ω der Kugel-Schicht, und denkt sich von allen Punkten dieses Flächen-Stücks ω, nach dem Punkte m lauter Gerade gezogen, welche verlängert, auf der entgegengesetzten Seite der Kugel-Schicht ein unendlich-kleines Stück ω' ausschneiden; sind endlich e und e′ die Entfernungen des Punktes m (also des Elementes μ,) von diesen Flächen-Stückchen ω und ω', so ist nach bekannten körperlich-geometrischen Gesetzen $\omega : \omega' = e^2 : e'^2$, d. h. $\frac{\omega}{e^2} = \frac{\omega'}{e'^2}$. Die Anziehung von ω auf μ ist aber $\frac{h \cdot \mu \cdot \omega}{e^2}$, und die Anziehung von ω' auf μ ist $\frac{h \cdot \mu \cdot \omega'}{e'^2}$. Also sind beide Anziehungen einander gleich, außerdem aber auch einander entgegen; folglich heben sie sich beide einander auf. — Dies gilt aber rings herum.

sam wäre, also wie wenn die Masse dieses innern Theils im Mittel-Punkte O vereinigt wäre.

IV. Und da der Radius r' der Höhlung so klein seyn kann, als man ihn nehmen will, so gilt alles in (I. — III.) Entwikkelte auch dann noch, wenn $r' = 0$ ist, d. h. wenn die Masse M eine volle Kugel bildet.

§. 67.

Anziehung eines Ellipsoids auf ein Element μ im Innern desselben, immer unter der Voraussetzung, daß $f_u = \frac{h}{u^2}$ ist.

Es sey nun die anziehende Masse M ein Ellipsoid, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

gegeben ist, wo wir nach (§. 17. Geom. I. Th.) voraussetzen, daß die Koordinaten-Axen $O'X_1$, $O'Y_1$ und $O'Z_1$ durch den Mittel-Punkt O' dieses Ellipsoids hindurchgehen, und bezüglich mit den Richtungen der halben Axen a, b, c des Ellipsoids zusammenfallen.

I. Denken wir uns nun das angezogene Element μ in dem Punkte m innerhalb oder außerhalb dieses Ellipsoids, so kann man durch denselben neue Axen OX, OY, OZ legen, parallel mit den vorgenannten, während dann O mit m zusammenfällt. Sind nun von dem beliebigen Punkte der Oberfläche des Ellipsoids, dessen alte Koordinaten-Werthe durch x_1, y_1 und z_1 bezeichnet worden sind, die neuen Koordinaten-Werthe x'', y'' und z''; denkt man sich noch durch O die Polar-Koordinaten r'', φ und θ desselben Punktes, und bezeichnet man endlich durch α, β, γ die Winkel, welche r'' mit den Axen OX, OY und OZ macht, so hat man

$$2) \quad \begin{cases} x_1 = x + x'' = x + r'' \cdot \cos\alpha = x + r'' \cdot \cos\varphi, \\ y_1 = y + y'' = y + r'' \cdot \cos\beta = y + r'' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta, \\ z_1 = z + z'' = z + r'' \cdot \cos\gamma = z + r'' \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta, \end{cases}$$

während offenbar

3) $\alpha = \varphi$, $\cos\beta = \sin\varphi\cdot\cos\theta$ und $\cos\gamma = \sin\varphi\cdot\sin\theta$ ist. — Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (1.) des Ellipsoids erhält man die neue Gleichung desselben, nämlich

$$4) \qquad r'' = \frac{-q+\sqrt{q^2+pl}}{p},$$

wenn der Kürze wegen

$$5) \qquad \frac{\cos\alpha^2}{a^2}+\frac{\cos\beta^2}{b^2}+\frac{\cos\gamma^2}{c^2} = p,$$

$$6) \qquad \frac{x\cdot\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cdot\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cdot\cos\gamma}{c^2} = q$$

und

$$7) \qquad 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = l$$

genommen wird, wo statt $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe aus (3.) in φ und θ ausgedrückt, gesetzt gedacht werden müssen. Dieser Werth r'', der aus zwei Theilen besteht, nämlich aus $-\frac{q}{p}$ und $\frac{\sqrt{q^2+pl}}{p}$, wird nun, nebst $r' = 0$, in die Formeln (§. 65. II. 1. — 3.) substituirt, und die ferneren Integrationen geben dann X, Y und Z.

II. Diese Integrationen kann man sich aber durch nachstehende Betrachtungen, welche sich auf die im (I. Th. Anal. §. 40.) gegebenen Eigenschaften der bestimmten Integrale stützen, sehr erleichtern, sobald man voraussetzt, daß der Punkt m oder O, in welchem das Element μ liegt, im Innern des Ellipsoids M, oder höchstens auf dessen Oberfläche sich befindet. Es ist nämlich dann vermöge der Gleichung (1.) der Werth von l positiv oder Null; der Werth von p ist ohnedies immer positiv; folglich muß in der Gleichung (4.) jedesmal der positive Werth der Quadrat-Wurzel genommen werden, damit der Radius-Vektor nicht negativ werde, welches letztere nie seyn darf. Da sich ferner die Integrale in den anzuwendenden Formeln (§. 65. II. 1. — 3.) über alle Werthe von φ sich erstrekken von 0 bis π, und über alle Werthe von θ von 0 bis 2π, so wollen wir uns die durch die In-

tegration zu summirenden Differenzialien paarweise gruppirt denken, so zwar, daß wir immer solche zwei Paare von Werthen von φ und θ zusammenstellen, in welchen die beiden Werthe von φ einander zu π ergänzen und die zugehörigen Werthe von θ um π von einander verschieden sind *). Für zwei solche zusammengehörige Paare von Werthen von φ und θ, behält $\sin\varphi$ seinen Werth, während $\cos\varphi$, $\sin\theta$ und $\cos\theta$ ihr (+ oder —) Zeichen verändern, sonst einander gleich sind. Für diese zwei Paare von Werthen von φ und θ, behalten nach (4. — 6.) 1, p, q^2, also auch $\frac{\sqrt{q^2+p^2}}{p}$ genau dieselben Werthe, während die andern Faktoren unter dem $\iint$ Zeichen in den Formeln (§. 65. II. 1. — 3.) ihr (+ oder —) Zeichen ändern. Die Doppel-Integrale also, welche von diesem Theil $\frac{\sqrt{q^2+p^2}}{p}$ von r'' herrühren, sind deshalb der Null gleich, weil die unendlich vielen zu summirenden unendlich-kleinen Theilchen paarweise gleich, aber mit verschiedenen (+ oder —) Zeichen versehen sind. **Folglich setzen wir in dieselben Formeln statt r'' bloß den ersten Theil $\frac{-q}{p}$ seines vollständigen Werthes.**

III. Geschieht dies nun, so erhält man, wenn man vorläufig bloß X finden will, aus (§. 65. II. 1.) und weil hier $r'=0$ ist,

$$8)\quad X = \mu h\varrho\frac{x}{a^2}\iint\frac{\cos\varphi^2\cdot\sin\varphi}{p}\cdot d\varphi\cdot d\theta$$
$$+\mu h\varrho\frac{y}{b^2}\iint\frac{\sin\varphi^2\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta}{p}\cdot d\varphi\cdot d\theta$$
$$+\mu h\varrho\frac{z}{c^2}\iint\frac{\sin\varphi^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta}{p}\cdot d\varphi\cdot d\theta.$$

IV. Weil jedoch zu einerlei Werth von θ immer zwei Werthe von φ genommen werden können, welche einander zu π er-

*) Diese beiden Paare von Werthen von φ und θ gehören zu unendlich-kleinen, in O mit ihren Spitzen einander diametral gegenüber liegenden pyramidenförmigen bis an die Grenze des Ellipsoids sich erstreckenden Körper-Theilchen.

ganzen, so daß für beide Werthe von φ die Sinusse sich nicht ändern, die Kosinusse aber bloß im (+ oder —) Zeichen, so sieht man wiederum, daß die beiden letztern Integrale in (8.) der Null gleich werden, und daß die (8.) bloß so wird, nämlich:

$$9) \qquad X = \mu b \varrho \frac{x}{a^2} \cdot \iint \frac{\cos\varphi^2 \cdot \sin\varphi}{p} \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

V. Eben der angeführten Gruppirungen wegen, kann man aber das Integral nach φ, statt zwischen den Grenzen 0 und π, bloß zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, und das Resultat dann doppelt nehmen, nach (I. Th. Analyf. §. 40.). — Eben so kann man das Integral nach θ, statt von 0 bis 2π, bloß von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und vom Resultat das vierfache nehmen; auch kann man beide Integrationen in beliebiger Ordnung vornehmen, also zuerst nach θ integriren. Setzt man nun zu dem Ende

$$tg\,\theta = v, \quad \text{so wird} \quad d\theta = \frac{dv}{1+v^2}$$

und

$$\int_{\frac{1}{2}\pi \div 0} \frac{1}{P} \cdot d\theta$$

$$= a^2b^2c^2 \cdot \int_{\infty \div 0} \frac{dv}{(b^2 \cdot \cos\varphi^2 + a^2 \cdot \sin\varphi^2) \cdot c^2 + (c^2 \cdot \cos\varphi^2 + a^2 \cdot \sin\varphi^2) \cdot b^2 \cdot v^2}$$

$$= \frac{\pi a^2 bc}{2\sqrt{(b^2 \cdot \cos\varphi^2 + a^2 \cdot \sin\varphi^2) \cdot (c^2 \cdot \cos\varphi^2 + a^2 \cdot \sin\varphi^2)}};$$

und deshalb wird nun aus (9.)

$$10) \quad X = 4\pi\mu h \varrho x \cdot \int_{\frac{1}{2}\pi \div 0} \frac{bc \cdot \cos\varphi^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(b^2 \cdot \cos\varphi^2 + a^2 \cdot \sin\varphi^2) \cdot (c^2 \cdot \cos\varphi^2 + a^2 \cdot \sin\varphi^2)}}.$$

Aber ganz analog muß werden

$$11) \quad Y = 4\pi\mu h \varrho y \cdot \int_{\frac{1}{2}\pi \div 0} \frac{ac \cdot \cos\varphi^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(a^2 \cdot \cos\varphi^2 + b^2 \cdot \sin\varphi^2) \cdot (c^2 \cdot \cos\varphi^2 + b^2 \cdot \sin\varphi^2)}},$$

12) $Z = 4\pi\mu h z \cdot \int_{\varphi=0} \frac{ab \cdot \cos\varphi^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(b^2 \cdot \cos\varphi^2 + c^2 \cdot \sin\varphi^2) \cdot (a^2 \cdot \cos\varphi^2 + c^2 \cdot \sin\varphi^2)}}$,

wo x, y, z die Koordinaten-Werthe des Punktes m oder O sind, auf die Axen $O'X_1$, $O'Y_1$, $O'Z_1$ bezogen, welche durch den Mittel-Punkt O' des Ellipsoids gehen. — Die jetzt noch zu findenden Integrale zur Rechten in diesen Ausdrücken für X, Y, Z gehören zu denen, welche man elliptische Transcendenten nennt. Sie können nicht in endlicher Form gefunden, aber in Einzel-Fällen mittelst der Tabellen des Legendre numerisch berechnet werden.

§. 68.

Folgerungen aus diesen Formeln.

I. Aehnliche Ellipsoide nennen wir diejenigen, deren drei halbe Axen a', b', c' und a, b, c bezüglich in demselben Verhältniß stehen, also wenn

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 1 + \delta$$

ist.

II. Denken wir uns daher außer dem im (§. 67.) vorausgesetzten Ellipsoid, dessen drei halbe Axen a, b, c sind, noch ein größeres concentrisches und ähnliches Ellipsoid, dessen halbe Axen a', b', c' mit den Richtungen der halben Axen a, b, c zusammenfallen, so lehren die Formeln (§. 67. V. 10. — 12.), daß die Werthe X, Y, Z für dieses größere Ellipsoid genau dieselben bleiben, wie für das kleinere, wegen

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 1 + \delta.$$

Die Anziehung der äußern Schicht zwischen diesen beiden ähnlichen und concentrischen Ellipsoiden auf das im Innern dieser Schicht (in O) liegende Element μ, ist also der Null gleich.

III. Eine von zweien ähnlichen concentrischen el-

lipſoidiſchen Oberflächen, deren proportionirte halbe Axen mit ihren Richtungen zuſammenfallen, begrenzte homogene Körper-Schicht zieht alſo ein Element μ, welches beliebig wo im Innern dieſer Schicht liegt, nach keiner Seite hin, ſondern läßt ſolches im Gleichgewicht, wenn nur die Anziehung im Verhältniß des umgekehrten Quadrats der Entfernung wirkt.

IV. Die Anziehung eines Ellipſoids auf ein im Innern deſſelben (in m) liegendes Element μ iſt gerade ſo groß, als die Anziehung eines kleinern ähnlichen concentriſchen Ellipſoids, deſſen Oberfläche durch m gelegt iſt, und deſſen Axen-Richtungen mit denen des größern zuſammenfallen.

V. Endlich geht noch aus der Betrachtung der Formeln (§. 67. V. 10. — 12.) hervor, daß die Anziehung X z. B. nur von dem Koordinaten-Werth x allein, nicht aber von den beiden andern Koordinaten-Werthen y und z des Punktes m (in welchem O angenommen worden iſt, und in welchem das Element μ liegt) abhängt, daß alſo dieſe Seiten-Kraft X der Geſammt-Anziehung eine und dieſelbe bleibt für alle Elemente μ, welche irgendwo in der auf OX_1 in der Entfernung x von O' ſenkrechten Ebene, aber noch im Innern des anziehenden Ellipſoids liegen; auch iſt jedesmal X mit x proportional. — Daſſelbe gilt von Y und y, und von Z und z.

Ueberall aber haben wir das Ellipſoid homogen vorausgeſetzt. —

§. 69.

Anziehung eines Umdrehungs-Ellipſoids auf ein Element im Innern deſſelben.

Denken wir uns in der Aufgabe des (§. 67.) ein Umdrehungs-Ellipſoid, alſo z. B. $c = b$. Die halbe Axe a ſey dabei von allen dreien die kleinſte, alſo $a < b$ und $a < c$ (eine Form, welcher die Form der Himmels-Körper am nächſten kommt). — In dieſem beſonderen Falle laſſen ſich die Integrale

in den Formeln (§. 67. V. 10. — 12.) in endlicher Form herstellen, wie nachstehende Rechnung zeigen mag.

Man setzt

1) $\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2}=e^2$, so daß $b=c=a\cdot\sqrt{1+e^2}$ *)

wird, und berechnet dann nach (§. 54.) die Masse M des als homogen gedachten Ellipsoids, nämlich

2) $M=\frac{4}{3}\pi\cdot\varrho\cdot a^3\cdot(1+e^2)$.

Die Formel (§. 67. V. 10.) giebt nun

3) $X=\frac{3\mu Mhx}{a^3}\cdot\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varphi^2\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1+e^2\cdot\cos\varphi^2}}\cdot d\varphi$,

oder, wenn man nach (§. 32. I. Th. Analys.) wirklich integrirt

4) $X=\frac{3\mu Mhx}{a^3\cdot e^3}\cdot\left(e-\frac{1}{tg}e\right)$.

Eben so leicht findet sich

5) $\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=\frac{3\mu Mh}{a^3(1+e^2)}\cdot\int\frac{\cos\varphi^2\cdot\sin\varphi}{\sqrt{1+e^2\cdot\sin\varphi^2}}\cdot d\varphi$.

Führen wir diese Integration nach (§. 32. Th. I. Analys.) wirklich aus, und vereinigen wir die beiden anziehenden Kräfte Y und Z, welche mit y und z proportional sind, in eine einzige P, deren Richtung, des letzterwähnten Umstandes wegen, der Axe $O'X_1$ begegnen wird, so findet sich, wenn man

6) $\sqrt{y^2+z^2}=p$

setzt, so daß p die Entfernung des Elements μ von der Axe $O'X_1$ vorstellt,

7) $P=\frac{3\mu Mhp}{2a^3\cdot e^3}\cdot\left(\frac{1}{tg}e-\frac{e}{1+e^2}\right)$.

Vereinigt man zuletzt diese beiden Kräfte, nämlich P (welche das Element μ senkrecht gegen die Umdrehungs-Axe $O'X_1$ treibt) und X (welche parallel mit $O'X_1$ wirkt) in die einzige P_0, so hat

*) Dieser Werth e wird die Abplattung des Umdrehungs-Ellipsoids genannt.

man diese Gesammt-Anziehung P_0 ihrer Größe und ihrer Richtung nach.

In den Fällen, wo e sehr klein ist, kann man $\frac{1}{tg}e$ und $\frac{e}{1+e^2}$ in unendliche Reihen verwandeln, nämlich

$$\frac{1}{tg}e = e - \tfrac{1}{3}e^3 + \tfrac{1}{5}e^5 - \cdots$$

und $$\frac{e}{1+e^2} = e - e^3 + e^5 - \cdots;$$

und man erhält dann aus (3.)

$$8) \qquad X = \frac{\mu M h x}{a^3}\cdot(1 - \tfrac{2}{5}e^2 + \cdots)$$

und aus (7.)

$$9) \qquad P = \frac{\mu M h p}{a^3}\cdot(1 - \tfrac{6}{5}e^2 + \cdots),$$

woraus zuletzt

$$10) \qquad P_0 = \sqrt{X^2 + P^2}$$

gefunden wird. — Für $e = 0$, d. h. wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht, erhält man hieraus genau wieder die Resultate des (§. 66.).

Anmerk. Bis hierher haben wir die Anziehung eines Ellipsoids auf ein Element μ betrachtet, welches in der Masse des Ellipsoids selber liegt. Liegt aber das Element μ außerhalb des Ellipsoids, so werden die Rechnungen viel verwikkelter. Deshalb ist der nachstehende Lehrsatz des Ivori (philosophical transactions. 1809.), durch welchen das zuletzt erwähnte Problem auf das des (§. 67.) zurückgeführt wird, für die Anziehungen von besonderer Wichtigkeit.

§. 70.

Lehrsatz des Ivori.

1) Wir denken uns zwei concentrische Ellipsoide, deren halbe Axen a, b, c und a_1, b_1, c_1 bezüglich mit den Richtungen der

der, aus dem gemeinschaftlichen Mittel-Punkte O' auslaufenden Koordinaten-Axen $O'X_1$, $O'Y_1$ und $O'Z_1$ zusammenfallen. Wir setzen in diesen beiden Ellipsoiden

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1^2 - a_1^2 = b^2 - a^2 = h \\ c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2 = k \\ \text{also auch} \\ c_1^2 - b_1^2 = c^2 - b^2 = k - h \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wo } h, k \text{ und } k-h \text{ po-} \\ \text{sitiv, negativ, oder auch} \\ \text{der Null gleich seyn} \\ \text{können,} \end{array}$$

voraus, so haben die beiden durch die Axen $X_1O'Y_1$ gebildeten (Durchschnitts-) Ellipsen einerlei Brenn-Punkt; dasselbe gilt aber von den beiden (Durchschnitts-) Ellipsen, welche von der Ebene $X_1O'Z_1$, und auch von den beiden Ellipsen, welche durch die Ebene $Y_1O'Z_1$ gebildet werden. Wir drücken diese Eigenschaft dadurch aus, daß wir sagen: „die beiden Ellipsoide hätten „dieselben Brenn-Punkte.“

2) Auf den Oberflächen dieser beiden Ellipsoide denken wir uns zwei Punkte. Die Koordinaten-Werthe x, y, z drücken den einen aus, der in der Oberfläche des erstern liegt; die Koordinaten-Werthe x_1, y_1, z_1 stellen den andern vor, der in der Oberfläche des zweiten Ellipsoids liegt. Wir nennen diese beiden Punkte correspondirende (einander entsprechende), wenn zu gleicher Zeit

$$\text{II.} \quad \frac{x_1}{a_1} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y_1}{b_1} = \frac{y}{b} \quad \text{und} \quad \frac{z_1}{c_1} = \frac{z}{c}$$

ist *).

3) Sind nun X, Y, Z die Anziehungen nach den drei Koordinaten-Axen des erstern Ellipsoids auf das Element μ, welches in einem beliebigen Punkt x_1, y_1, z_1 der Oberfläche des zweiten Ellipsoids liegt; und stellen X_1, Y_1, Z_1 die Anziehungen (nach denselben Koordinaten-Axen zerlegt) vor, des zweiten Ellipsoids

*) Da wegen der Gleichungen der Ellipsoide allemal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{z_1^2}{c_1^2} = 1$$

ist, so enthalten obige drei Gleichungen keinen Widerspruch, und es kann daher zu jedem Punkt in der einen Oberfläche allemal der entsprechende Punkt in der andern Oberfläche dazu gefunden werden.

auf das Element μ, wenn solches in dem nach (II.) zu finden-den correspondirenden Punkt x, y, z auf der Oberfläche des ersten Ellipsoids ist, so ist allemal, wenn beide Ellipsoide homogen sind, und einerlei Dichtigkeit ϱ haben,

$$\text{III.} \quad \frac{X}{bc} = \frac{X_1}{b_1 c_1}, \quad \frac{Y}{ac} = \frac{Y_1}{a_1 c_1} \quad \text{und} \quad \frac{Z}{ab} = \frac{Z_1}{a_1 b_1}.$$

Diese letzteren Gleichungen (III.) bilden den Lehrsatz des Ivori. Dieser Satz bleibt wahr, auch wenn die Attraktion zwischen zwei Atomen als eine beliebige Funktion ihrer Entfernung u gedacht wird. — Mittelst dieser Gleichungen lassen sich aber X, Y und Z finden, sobald X_1, Y_1, Z_1 nach (§. 67. oder §. 69.) gefunden sind.

Man findet diesen Lehrsatz, wenn man die Integrale, welche die Anziehungen X, Y, Z zu geben haben, gehörig umformt. Weil aber dazu Lehren der bestimmten Integrale gehören, welche wir nicht als bekannt voraussetzen, sondern eben jetzt erst im Anhang zu diesem Kapitel entwickeln wollen, so mag in demselben Anhang auch diese Umformung, also der Beweis des vorstehenden Lehrsatzes, Platz finden.

4) In den Anwendungen dieses Lehrsatzes sind a, b, c und x_1, y_1, z_1 gegeben, dagegen a_1, b_1, c_1 und x, y, z zu finden. Zur Berechnung von a_1, b_1, c_1 muß man die beiden Gleichungen der (I.), nämlich

$\alpha)$ $b_1^2 - a_1^2 = b^2 - a^2$ und $\beta)$ $c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2$,

und noch die Gleichung des Ellipsoids für den angezogenen Punkt x_1, y_1, z_1, nämlich

$$\gamma) \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{z_1^2}{c_1^2} = 1$$

nehmen. — Zur Berechnung der x, y, z dienen dann die Gleichungen (II.).

Anmerk. Wendet man diesen Ivori'schen Lehrsatz auf den Fall an, daß die Ellipsoide in Kugeln übergehen, wo also $c = b = a$ und $c_1 = b_1 = a_1$ ist, so erhält man, wenn man die Axen so legt, daß $Y = Z = 0$ wird, auch $Y_1 = Z_1 = 0$, und

$$\frac{X}{a^2} = \frac{X_1}{a_1^2},$$

und dies stimmt genau mit den, für die Kugeln bereits gefundenen Resultaten überein.

§. 71.

Anziehung eines beliebigen Körpers auf ein Element in großen Entfernungen, und wenn $f_u = \frac{h}{u^2}$ ist.

Ist in dem allgemeinen Problem des (§. 65.), wo die Anziehung $= \frac{h}{u^2}$ genommen ist, die Entfernung u des angezogenen Elements μ sehr groß gegen die Dimensionen des anziehenden Körpers, also gegen die größten Werthe von x', y' und z', so kann man in dem Ausdruck für T daselbst, den Faktor $\frac{1}{u}$, d. h. $\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$ in eine Reihe nach x', y', z' geordnet verwandeln (mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes für drei Veränderliche), und man erhält, wenn δ den Werth von u bedeutet, für $x' = y' = z' = 0$, so daß

1) $$\delta = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ebenfalls sehr groß ist, auch gegen die größten Werthe von x', y', und z',

2) $$\frac{1}{u} = \frac{1}{\delta} + \frac{x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'}{\delta^3} + \frac{3(x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z')^2-(x'^2+y'^2+z'^2)\delta^2}{2\delta^5} + \cdots.$$

Nimmt man nun den Schwer-Punkt des anziehenden Körpers zum Anfangs-Punkt der Koordinaten x, y, z, x', y', z', so daß nach (§. 55. ⊙)

3) $\Sigma(x'\cdot dM) = 0$, $\Sigma(y'\cdot dM) = 0$ und $\Sigma(z'\cdot dM) = 0$

ist, so liefert die Gleichung (§. 65. Nr. 1.), weil $\Sigma(dM) = M$ ist,

4) $$T = \frac{hM}{\delta} + \frac{3h}{2\delta^5}\cdot\Sigma(x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z')^2\cdot dM - \frac{h}{2\delta^3}\cdot\Sigma(x'^2+y'^2+z'^2)\cdot dM + \cdots.$$

Ist nun δ gegen die größten Werthe von x', y' und z' so groß, daß die im Nenner mit δ^3 oder δ^5 ꝛc. afficirten Glieder ohne merklichen Fehler außer Acht gelassen werden können, so hat man bloß

$$5) \qquad T = \frac{hM}{\delta} = \frac{hM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

und daraus folgt dann aus (§. 65. Nr. 4.)

$$6) \qquad X = -\frac{h\cdot\mu\cdot M\cdot x}{\delta^3}, \quad Y = -\frac{h\cdot\mu\cdot M\cdot y}{\delta^3}$$

und

$$Z = -\frac{h\cdot\mu\cdot M\cdot z}{\delta^3},$$

und die gesuchte Gesammt-Anziehung wird daher jetzt hinsichtlich ihrer Größe und Richtung

$$7) \qquad P_0 = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \mu\cdot M\cdot\frac{h}{\delta^2}$$

und

$$8) \qquad \cos\alpha_0 = -\frac{x}{\delta}, \quad \cos\beta_0 = -\frac{y}{\delta}$$

und

$$\cos\gamma_0 = -\frac{z}{\delta};$$

d. h., unter der gemachten Voraussetzung ist die Anziehung genau dieselbe, wie wenn die Gesammt-Masse M des anziehenden Körpers im Anfangs-Punkt der Koordinaten, d. h. in seinem Schwer-Punkt vereint wirkte *).

Bei den Anziehungen, welche die Sonne auf die Planeten und die Planeten auf einander ausüben, kann man immer das vorliegende Resultat anwenden, ohne auf die Gestalt der Planeten Rücksicht nehmen zu müssen. Bei den Anziehungen der Planeten auf ihre Satelliten, muß man schon meist Anstand nehmen es zu thun. Bei den Anziehungen endlich der Welt-

*) Da nach (§. 66.) dieses Resultat für den Fall einer anziehenden homogenen Kugel genau wahr ist, für jede geringere oder größere Entfernung des angezogenen Elementes μ, so folgt, daß die Glieder von T in (4.), welche wir hier als unbedeutend außer Acht gelassen haben, für die Kugel ausgerechnet, genau der Null gleich werden müssen. Dies bestätigt sich auch.

Körper auf Gegenſtände ihrer Oberfläche, kann das vorſtehende Reſultat nur in ſeltenen Fällen benutzt werden, wenn man nicht vorher dargethan hat, daß der Welt-Körper homogen iſt und eine vollkommene Kugelgeſtalt hat.

Schluß-Anmerkung.

Hat man übrigens Größe und Richtung gefunden, der anziehenden Kraft eines Körpers M auf ein Element μ in jeder Lage des letztern, ſo kann man ſich nun das Problem der Dynamik vorlegen: „die Bewegung des „Elements μ zu beſtimmen, wenn es an jeder Stelle, wo es ſich befinden „mag, durch dieſe Kraft der Anziehung getrieben wird, unter der Vorausſetzung, daß man den anziehenden Körper M an ſeiner abſoluten Stelle „feſthält.“ Nach Maaßgabe der Löſung dieſer Aufgabe kann man erſt entſcheiden, ob z. B. ein frei fallender Körper, unter der Vorausſetzung, daß die Erde ein Umdrehungs-Ellipſoid iſt, eine gerade Linie oder eine krumme Bahn beſchreibt.

Anhang.

Einiges über beſtimmte Integrale, nebſt dem Beweis des Ivori'ſchen Lehrſatzes.

§. 72.

Da ein beſtimmtes Integral $\int_{\beta \div \alpha} f_p \cdot dp$ nichts weiter iſt, nach (I. Th. Analyſ. §. 35.), als die Summe einer unendlichen Reihe, zwiſchen den Grenz-Gliedern $f_\alpha \cdot dp$ und $f_\beta \cdot dp$ ſtetig neben einander liegender Glieder, — ſo iſt ein Doppel-Integral

$$\int_{\delta \div \gamma} \int_{\beta \div \alpha} f_{p,q} \cdot dp \cdot dq$$

als die Summe einer Doppel-Reihe von Gliedern anzuſehen, welche alle aus $f_{p,q} \cdot dp \cdot dq$ hervorgehen, wenn man ſtatt p alle von α an bis zu β hin um das unendlich-kleine dp wachſenden, daher ſtetig neben einander liegenden Werthe ſetzt, dabei aber bei jedem Werth von p auch dem q wieder alle von γ an bis zu δ hin wachſenden, um das unendlich-kleine dq verſchiedenen, alſo ſtetig neben einander liegenden Werthe gegeben ſich denkt.

§. 73.

Weil es bei jeder Summe einerlei ist, in welcher Ordnung man addirt, so muß es bei einem Doppel-Integral auch einerlei seyn, in welcher Ordnung man integrirt, wenn man nur darauf sieht, daß man noch immer die Summe derselben Doppel-Reihe von Gliedern erhält, d. h. wenn man nur die Grenzen des neuen Doppel-Integrals der jedesmaligen Natur des gegebenen Doppel-Integrals gemäß nimmt.

Namentlich ist unbedingt allemal

$$(\odot)\cdots \int_{q''\div q'}\left(\int_{p''\div p'} f_{p,q}\cdot dp\right)\cdot dq = \int_{p''\div p'}\left(\int_{q''\div q'} f_{p,q}\cdot dq\right)\cdot dp,$$

so oft die Grenz-Werthe q', q'', p' und p'' konstant gegeben, d. h. von einander ganz unabhängig sind. —

Dieser Satz ($\odot$) findet sich im (I. Th. Analys. §. 38.) noch besonders erwiesen.

Sind aber die Grenzen des erstern Integrals (nach p) in ($\odot$) zur Linken selbst wieder Funktionen desselben q, nach welchem die nun folgende Integration vorgenommen werden soll, so ist es, wenn man die Ordnung der Integrationen umkehren will, oft nöthig, daß man das neue Doppel-Integral in zwei oder mehr Theilen ausdrücke, welche immer andere, aber jedesmal durch die Natur des Falles bedingte Grenzen haben. Um dies recht anschaulich machen zu können, wollen wir einige besondere Fälle betrachten.

A. Wir wollen voraussetzen, daß das Doppel-Integral

1) $$\int_{q''\div q'}\left(\int_{p_q\div p'} f_{p,q}\cdot dp\right)\cdot dq$$

gegeben sey, in welchem die Grenze p_q eine, für p aus der Gleichung

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad \psi_{q,p} = 0$$

hervorgehende Funktion von q ist. Denken wir uns in dieser Gleichung ($\mathbb{C}$) q als Abscissen-Werth und p als Ordinaten-Werth, beide auf Axen OX und OY bezogen, welche auf ein-

ander senkrecht stehen, wie in den (Figg. 23. — 25.), so wird diese Gleichung $\psi_{q,p}=0$ im Allgemeinen eine Kurve liefern, nämlich CMD oder CM'D. Nimmt man nun $OF=q'$, $OG=q''$ und $OH=FA=GB=p'$; ferner $OR=q$, so ist $RM=p_q$ (oder $RM'=p_q$), so wie noch $FC=p_{q'}$ und $GD=p_{q''}$. — Denkt man sich ferner im Innern der Fläche ABCMD oder ABCM'D eine beliebige Stelle, deren Koordinaten-Werthe q und p von einander unabhängig sind, und an dieser Stelle ein Rechteckchen dq·dp, und die Dichtigkeit dieses Rechteckchens $=f_{p,q}$, so ist $f_{p,q}\cdot dp\cdot dq$ die Masse dieses Rechteckchens, und

$$\int_{p_q \div p'} (f_{p,q}\cdot dq)\cdot dp$$

ist daher die Masse des Streifens, welcher die Länge SM oder SM' und die unendlich-kleine Breite dq hat; — und das gegebene Doppel-Integral ist also nun die Masse der ganzen Fläche ABDMC oder ABDM'C.

Will man nun dieselbe Masse derselben Fläche dadurch finden, daß man zuerst die Massen der mit OX parallelen Streifen von der unendlich-kleinen Breite dp findet, und dann die Massen aller dieser Streifen summirt, so wird man verschiedene Einzelfälle unterscheiden müssen.

I. Zuvörderst seyen zwischen $q=q'$ und $q=q''$ alle Werthe p_q stetig wachsend, oder stetig abnehmend, wie in den (Figg. 23. und 24.) und p_k, p_g seyen bezüglich die kleinsten und größten dieser Werthe*), so wird man zuerst die Masse des Rechtecks ABCE in (Fig. 23.), oder ABDE in (Fig. 24.) finden, ausgedrückt durch das Doppel-Integral

$$(2)\cdots \qquad \int_{p_k \div p'} \left(\int_{q'' \div q'} f_{p,q}\cdot dq \right) \cdot dp;$$

und dieses Doppel-Integral wird nur dann $=0$ seyn, wenn der kleinste Werth p_k mit dem gegebenen Grenz-Werthe p' in

*) In (Fig. 23.) ist also $p_k=p_{q'}$ und $p_g=p_{q''}$; in (Fig. 24.) dagegen ist $p_k=p_{q''}$ und $p_g=p_{q'}$.

(1.) zuſammenfällt. — Hernach wird man die Maſſe der Fläche CMDE oder CMDE finden, nämlich, wenn q_p die aus der Grenz-Gleichung $\psi_{q,p} = 0$ für q hervorgehende Funktion von p vorſtellt, und im Falle der (Fig. 23.)

(3)··· $\int_{p_g \div p_k} \left(\int_{q'' \div q_p} f_{p,q} \cdot dq \right) \cdot dp,$

im Falle der (Fig. 24.) dagegen

(4)··· $\int_{p_g \div p_k} \left(\int_{q_p \div q'} f_{p,q} \cdot dq \right) \cdot dp.$

Das Doppel-Integral (1.) iſt alſo der Summe der beiden Doppel-Integrale (2.) und (3.), oder der Summe der beiden Doppel-Integrale (2.) und (4.) gleich, je nachdem die (Fig. 23.) oder die (Fig. 24.) vorausgeſetzt wird. — Es ſind aber die Doppel-Integrale (1.) und (3.) einander genau gleich, ſo oft p' der kleinſte Werth p_k ($= p_{q'}$) von p_q in der (Fig. 23.) iſt; und es ſind die Doppel-Integrale (1.) und (4.) einander genau gleich, ſo oft p' der kleinſte Werth p_k ($= p_{q''}$) von p_q in der (Fig. 24.) ſeyn ſollte.

II. Giebt aber die Gleichung $\psi_{q,p} = 0$, zu allen Werthen von q zwiſchen q' und q'' ſolche Werthe von $p_{q'}$, daß die (Fig. 25.) und zwar CMD entſteht, ſo daß die Werthe p_q zuerſt ſtetig wachſen, von $p_{q'}$ an bis zu dem größeſten p_g hin, dann aber wieder ſtetig abnehmen bis zu $p_{q''}$ hin, und wird von den beiden Werthen $p_{q'}$ und $p_{q''}$ der kleinſte durch p_k, der größere aber durch p_m bezeichnet, ſo iſt zuerſt die Maſſe des Rechtecks ABDE

(5)··· $\int_{p_k \div p'} \left(\int_{q'' \div q'} f_{p,q} \cdot dq \right) \cdot dp;$

dann die Maſſe der Figur CEDK

(6)··· $\int_{p_m \div p_k} \left(\int_{q'' p \div q'} f_{p,q} \cdot dq \right) \cdot dp;$

endlich aber die Maſſe der Figur CMK

(7)··· $\int_{p_g \div p_m} \left(\int_{q'' \div q' p} f_{p,q} \cdot dq \right) \cdot dp.$

Das gegebene Doppel-Integral (1.) iſt daher nun der Summe der drei Doppel-Integrale (5.), (6.) und (7.) gleich; dagegen

dem letztern Doppel-Integral allein nur dann genau gleich, wenn der kleinste und der mittlere Werth (p_k und p_m) von p_q zu gleicher Zeit mit dem gegebenen Grenz-Werthe p' zusammenfallen.

III. Haben die Werthe p_q von $q = q'$ an bis zu $q = q''$ hin mehrere Maxima und Minima, so kann das Doppel-Integral (1.), wenn die Ordnung des Integrirens soll umgekehrt werden, in drei, vier und eine sehr große Anzahl Doppel-Integrale zerlegt werden müssen, wie man sich leicht aus der Betrachtung der zu dieser Voraussetzung gezeichneten Grenz-Kurven $\psi_{q,p} = 0$ überzeugt.

IV. Auch fällt in die Augen, daß man die Masse der Fläche ABCMD (oder ABCM'D) auch als Differenzen von Massen mehrerer Flächen ausdrücken kann, indem man Rechtecke sich denkt, welche den größten Werth von p_q zur Höhe haben, welche also größer sind, als die Fläche ABCMD.

B. Geben wir statt des Doppel-Integrals (A. 1.) lieber dieses andere

$$(1)\cdots \qquad \int_{q''\div q'} \left(\int_{p''\div p_q} f_{p,q} \cdot dp \right) \cdot dq,$$

so drückt solches, — wenn wiederum

$$2) \qquad \psi_{q,p} = 0$$

die Grenz-Gleichung ist, d. h. die Gleichung, welche nach p aufgelöst, den zweiten Grenz-Werth $p = p_q$ liefert, und wenn man in den (Figg. 23. — 25.) $OH' = FA' = GB' = p''$ nimmt, — die Masse der Fläche A'B'CMD oder A'B'CM'D aus. — Auch diese Masse kann nur durch zwei, drei oder mehr andere Doppel-Integrale ausgedrückt werden, wenn man die Ordnung der Integration umkehrt; und das gegebene Doppel-Integral (1.) ist wieder nur dann einem einzigen dieser letztern Doppel-Integrale gleich, wenn in den (Figg. 23. 24.) der größeste Werth p_q mit p'' und in der (Fig. 25.) die Kurve DM'C die Grenz-Kurve, und dabei $p_{q'} = p_{q''} = p''$ ist.

C. Betrachten wir endlich das Doppel-Integral

1) $$\int_{q''\div q'}\left(\int_{p''_q\div p'_q} f_{p,q}\cdot dp\right)\cdot dq,$$

wo p'_q und p''_q zwei für p aus der Gleichung

2) $$\psi_{q,p} = 0$$

hervorgehende Funktionen von q sind, so jedoch, daß für jeden Werth von q zwischen q' und q'', $p''_q > p'_q$ wird, und daß nur für $q = q'$, so wie noch für $q = q''$ die Ordinaten p' und p'' einander gleich sind, nämlich $p'_{q'} = p''_{q'}$ und $p'_{q''} = p''_{q''}$. — Setzen wir ferner voraus, daß p'' und p' die größten und kleinsten Werthe sind, welche aus $\psi_{q,p} = 0$ für p sich ergeben; daß aber auch q'' und q' die größten und kleinsten Werthe sind, welche aus derselben Gleichung $\psi_{q,p} = 0$ für q hervorgehen; sind endlich q'_p und q''_p zwei Werthe von q aus der Gleichung $\psi_{q,p} = 0$, so daß für alle Werthe von p, von p' an bis zu p'' hin, allemal $q''_p > q'_p$ wird, und nur $q'_{p'} = q''_{p'}$, so wie noch $q'_{p''} = q''_{p''}$ ist, — so ist das Doppel-Integral (1.) allemal genau gleich dem Doppel-Integral

3) $$\int_{p''\div p'}\left(\int_{q''_p\div q'_p} f_{q,p}\cdot dq\right)\cdot dp,$$

in welchem die Ordnung des Integrirens die umgekehrte ist.

Denn die Grenz-Kurve $\psi_{q,p} = 0$ bildet dasmal eine geschlossene krummlinige Figur, wie sie die (Fig. 26.) sehen läßt, und da fällt in die Augen, daß jedes der beiden Doppel-Integrale (1.) und (3.) die Masse der ganzen Figur GHIK ausdrückt. — Folglich sind beide Doppel-Integrale einander gleich.

Sind aber die Grenzen unter andern Voraussetzungen genommen, so wird auch hier bei der Umkehrung der Ordnung des Integrirens das neue Doppel-Integral in zwei, drei und mehr Theile zerfallen können und müssen.

§. 74.

Aufgabe.

Es ist gegeben das Doppel-Integral

1) $$\int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'} f_{x,y}\cdot dy\right)\cdot dx,$$

wo y', y'' entweder konstant oder Funktionen von x sind, und zwar entweder beide oder nur eine davon, jedesmal aber durch die Gleichung

$$(\mathbb{C})\cdots \qquad \psi_{x,y} = 0$$

gegeben, während die Grenzen x' und x'' konstant gedacht sind. Es werden zwei neue Veränderliche q und r mittelst der Gleichungen

2) $\psi'_{x,y,q,r} = 0$ und 3) $\psi''_{x,y,q,r} = 0$,

oder, wenn man diese Gleichungen nach x und nach y aufgelöst sich denkt, mittelst der Gleichungen

4) $x = x_{q,r}$ und 5) $y = y_{q,r}$

eingeführt. Man soll das neue Doppel-Integral finden, nach r und nach q, welches dem gegebenen gleich ist.

Auflösung. I. Man führe zuerst nur einen der neuen Veränderlichen, z. B. q statt y ein, indem man aus den Gleichungen (2. und 3.) oder (4. und 5.) den andern r eliminirt, und die neue Gleichung nach y auflöst, so daß man

6) $y = \chi_q$

findet, welche Funktion χ_q jedoch auch noch x enthalten wird. Dann ist nach (I. Th. Analys. §. 37. II.)

$$\int_{y'\div y''} f_{x,y}\cdot dy = \int_{q'\div q''} f_{x,y}\cdot \partial\chi_q \cdot dq;$$

so daß das gegebene Doppel-Integral (1.) in ein anderes nach q und nach x genommenes umgewandelt ist, nämlich in

7) $$\int_{x'\div x''} \left(\int_{q'\div q''} (f_{x,y}\cdot \partial\chi_q)\cdot dq\right)\cdot dx,$$

wo die Gleichung (6.) auch zwischen den Grenz-Werthen y' und q', desgleichen noch zwischen y'' und q'' statt finden muß. Die Grenzen q' und q'' werden daher im Allgemeinen auch noch Funktionen von x seyn. Es versteht sich dabei, daß in (7.) und zwar in $f_{x,y}$ statt y ebenfalls sein Werth χ_q gesetzt werden muß. —

II. Sind nun die Grenzen der Integrale so, daß nach (§. 73.) die Ordnung des Integrirens umgekehrt werden kann, so hat

man ſtatt des Doppel-Integrals (7.) ſogleich wieder dieſes andere:

$$8) \qquad \int_{q''\div q'} \left(\int_{x''\div x'} (f_{x,y} \cdot \partial\chi_q) \cdot dx \right) \cdot dq,$$

wo jetzt q' und q'' konſtante Werthe vorſtellen, wo aber x' und x'' im Allgemeinen Funktionen von q ſeyn werden, die nach (§. 73.) gefunden werden müſſen.

III. Nun kann man aber in (8.) ſtatt des Veränderlichen x, den zweiten neuen Veränderlichen r einführen, der mittelſt der Gleichung (4.) gegeben iſt. Dann erhält man nach (I. Th. Analyſ. §. 37. II.) ſtatt des Doppel-Integrals (8.) ſogleich das nachſtehende:

$$9) \qquad \int_{q''\div q'} \left(\int_{r''\div r'} (f_{x,y} \cdot \partial\chi_q \cdot \partial x_r) \cdot dr \right) \cdot dq,$$

wo x durchweg die Funktion $x_{q,r}$ aus (4.) vorſtellt, und wo daher auch ſtatt y der Werth χ_q und ſomit auch der Werth $y_{q,r}$ aus (5.) geſetzt werden muß, und wo x' und r', desgleichen x'' und r'' mittelſt derſelben Gleichung (4.) mit einander zuſammenhängen, ſo nämlich, daß, wenn y' und y'' konſtant geweſen ſind, dann r' und r'' diejenigen Funktionen von q ſind, welche aus den Gleichungen (4. u. 5.) für r hervorgehen, wenn man y' oder y'' ſtatt y ſetzt und dann x eliminirt; — daß aber, wenn y' oder y'' oder beide, Funktionen von x noch geweſen ſind, dann r' oder r'' oder beide, diejenigen Funktionen von q ſeyn werden, welche aus ($\mathfrak{C}$) $\psi_{x,y} = 0$ hervorgehen, wenn man mittelſt der Gleichungen (4. u. 5.) die Veränderlichen x und y eliminirt, und die entſtehende Gleichung nach r auflöſt. Die Werthe q' und q'' in (9.) laſſen ſich aus (II.), d. h. aus der Betrachtung des (§. 73.) in jedem beſondern Falle beſonders angeben.

IV. Auch der Faktor $\partial\chi_q$ in (9.) läßt ſich in die Funktionen $x_{q,r}$ und $y_{q,r}$ der (4. u. 5.) ausdrücken. Man bekommt nämlich offenbar $\partial\chi_q$, wenn man in den Gleichungen (4. u. 5.) χ_q ſtatt y ſetzt, dann auch r als eine Funktion von q, dagegen x als konſtant anſieht, beide neue Gleichungen nach allem q

differenziirt und zuletzt ∂r_q eliminirt, in so ferne es einerlei ist, ob man r vor oder nach dem Differenziiren nach q eliminirt. Die Gleichungen (4. u. 5.) geben aber unter dieser Voraussetzung

10) $0 = \partial x_q + \partial x_r \cdot \partial r_q$ und 11) $\partial \chi_q = \partial y_q + \partial y_r \cdot \partial r_q$,

woraus zuletzt, wenn ∂r_q eliminirt wird,

12) $$\partial \chi_q = \frac{\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q}{\partial x_r}$$

hervorgeht. Dadurch geht aber das Resultat (9.) in das nachstehende über, nämlich in

13) $$\int_{q''\ldots q'} \left(\int_{r''\ldots r'} f_{x,y} \cdot (\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) \cdot dr \right) \cdot dq,$$

wo die Grenzen der Integrale so sind, wie solche in (III.) beschrieben stehen.

V. Sollte endlich bei der Umkehrung der Ordnung des Integrirens in (II.), nicht ein, sondern nach Anleitung des (§. 73.) die Summe zweier oder mehrerer Integrale gesetzt werden müssen, so würde das End-Resultat (13.) doch genau eben so werden, nur daß dann ebenfalls zwei oder mehr solche Integrale sich ergeben würden, deren Grenzen in jedem Einzel-Falle nach (§. 73.) und nach dem Vorstehenden ausgemittelt werden müßten, in welchen aber das zu integrirende Element allemal erhalten wird, wenn man in dem gegebenen Element $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ statt des Produktes

14) $dx \cdot dy$ dieses andere $(\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) \cdot dr \cdot dq$

substituirt, unter x und y selbst aber die in (4. u. 5.) gegebenen Funktionen von q und r versteht *).

---

*) Dieser Satz ist nicht neu, aber noch nirgend gehörig erwiesen. Vergl. Lagrange, Théorie des fonctions. Nouvelle édit. chap. XIV.; Laplace, Mécanique céleste. T. II. pag. 1 seqq., und die Abhandlung des Ivori in den philosophical transactions 1809; auch Lacroix, Calcul diff. et integr. ꝛc. — Der Nerv des Beweises ruht auf der obigen (II.), und diese Idee verdankt der Verf., der auf diesen Uebelstand mehrseitig aufmerksam gemacht hat, einer mündlichen Besprechung darüber mit seinem scharfsinnigen Kollegen Dirichlet.

§. 75.

Derselbe Satz läßt sich auch sogleich auf dreifache Integrale ausdehnen. — Hat man nämlich ein dreifaches Integral

1) $\int\int(\int f_{x,y,z}\cdot dz)\cdot dy)\cdot dx,$

wo die Integration nach z zwischen den Grenzen z' und z'' (welche konstant oder Funktionen von y und x seyn können), die Integration nach y zwischen den Grenzen y' und y'' (welche konstant oder noch Funktionen von x sind), endlich die Integration nach x zwischen den konstanten Grenzen x' und x'' geschehen soll; — führt man dann drei neue Veränderliche p, q, r ein mittelst der Gleichungen

2) $x = x_{p,q,r}$; 3) $y = y_{p,q,r}$ und 4) $z = z_{p,q,r}$,

und soll nun das Element der neuen dreifachen Integration gefunden werden, welche dasselbe liefert, was die (1.), sobald jedes dieser drei letztern Integrale zwischen den durch die Natur des gegebenen Integrals (1.) bedingten Grenzen genommen wird, so geschieht dies auf folgende Art:

I. Zuerst führt man statt des Veränderlichen z einen der drei neuen Veränderlichen z. B. p ein, indem man aus den drei Gleichungen (2. — 4.) die beiden andern q und r eliminirt, dadurch

5) $z = \chi_p$, wo χ_p auch noch x und y enthält,

findet, und nun statt

$$\int f_{x,y,z}\cdot dz \quad \text{sogleich} \quad \int f_{x,y,z}\cdot\partial\chi_p\cdot dp$$

schreibt, nach (I. Th. Analys. §. 37. II.).

II. In der nun statt der (1.) entstehenden neuen dreifachen Integration (nach p, nach y und nach x) vertauscht man jetzt die Ordnung der Integrationen, so daß sie zuerst nach y, dann nach p, zuletzt nach x statt finden. Die Ordnung der beiden letztern Integrationen vertauscht man nun auf's Neue, so daß man zuletzt statt des dreifachen Integrals (1.) hat

6) $\int\int\int(f_{x,y,z}\cdot\partial\chi_p)\cdot dy)\cdot dx)\cdot dp.$

III. In der erstern dieser drei Integrationen (nach y) führt man nun statt des Veränderlichen y den zweiten neuen Veränderlichen q ein, indem man aus den beiden Gleichungen (2. u. 3.) r eliminirt und die neue Gleichung nach y auflöst, so daß man hat:

7) $y = \chi'_q$, wo χ'_q auch noch x enthält; —

dann aber wieder (I. Th. Analys. §. 37. II.) anwendet, so daß man statt

8) $\int f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot dy$ jetzt $\int f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot \partial\chi'_q \cdot dq$

erhält.

IV. In der nun aus (6.) hervorgehenden dreifachen Integration (nach q, nach x und nach p) vertauscht man jetzt wieder die beiden erstern Integrationen mit einander und erhält so statt der (1.), d. h. statt der (6.), das nachstehende dreifache Integral:

9) $\int\int\int (f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot \partial\chi'_q) \cdot dx) \cdot dq) \cdot dp.$

V. Nun aber führt man bei der erstern dieser dreifachen Integration (nach x) statt des Veränderlichen x den dritten neuen Veränderlichen r mittelst der Gleichung (2.) ein, und man erhält sonach statt der (9.), also statt der (1.), folgendes:

10) $\int\int\int (f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot \partial\chi'_q \cdot \partial x_r) \cdot dr) \cdot dq) \cdot dp,$

welches das gesuchte End-Resultat ist, sobald man nur alles in die in (2. — 4.) gegebenen Funktionen von p, q und r ausdrückt. —

VI. Die Faktoren $\partial\chi_p$, $\partial\chi'_q$ lassen sich aber auf folgende Art in die in (2. — 4.) gegebenen Funktionen $x_{p,q,r}$, $y_{p,q,r}$ und $z_{p,q,r}$ bequem ausdrücken.

Um $\partial\chi_p$ zu finden, muß man nämlich in den Gleichungen (2. — 4.) statt z die Form χ_p substituiren, dann die drei Gleichungen unter der Voraussetzung nach allem p differenziiren, daß x und y konstant, dagegen q und r Funktionen von p seyen; zuletzt aber ∂q_p und ∂r_p eliminiren; denn es ist einerlei, ob man q und r zuerst eliminirt, und dann nach p differenziirt, oder ob

man das so eben angeführte Verfahren befolgt. Diese Rechnung giebt aber zuerst aus (2. — 4.)

$$11)\quad \begin{cases} 0 = \partial x_p + \partial x_q \cdot \partial q_p + \partial x_r \cdot \partial r_p, \\ 0 = \partial y_p + \partial y_q \cdot \partial q_p + \partial y_r \cdot \partial r_p, \\ \partial \chi_p = \partial z_p + \partial z_q \cdot \partial q_p + \partial z_r \cdot \partial r_p. \end{cases}$$

Die Elimination von ∂q_p und ∂r_p hieraus giebt aber sogleich

$$12)\quad \partial \chi_p = \frac{\partial z_p \cdot (\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) + \partial y_p \cdot (\partial z_r \cdot \partial x_q - \partial x_r \cdot \partial z_q) + \partial x_p \cdot (\partial y_r \cdot \partial z_q - \partial z_r \cdot \partial y_q)}{\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q}.$$

Um $\partial \chi'_q$ zu finden, verfährt man genau wie so eben, oder genau wie in (§. 74. IV.). Dadurch erhält man aus (2. u. 3.), indem man χ'_q statt y setzt und nach allem q differenzirt, dabei aber x als konstant und r als Funktion von q ansieht,

$$13)\quad 0 = \partial x_q + \partial x_r \cdot \partial r_q \text{ und } \partial \chi'_q = \partial y_q + \partial y_r \cdot \partial r_q;$$

und indem man hieraus ∂r_q eliminirt, so ergiebt sich

$$14)\quad \partial \chi'_q = \frac{\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q}{\partial x_r}.$$

Man erhält daher, wenn man (13. u. 14.) mit einander multiplizirt,

$$15)\quad \partial \chi_p \cdot \partial \chi'_q \cdot \partial x_r = \partial z_p \cdot (\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) + \partial y_p \cdot (\partial z_r \cdot \partial x_q - \partial z_q \cdot \partial x_r) + \partial x_p \cdot (\partial y_r \cdot \partial z_q - \partial z_r \cdot \partial y_q).$$

VII. Im Praktischen setzt man also, wenn das dreifache Integral (1.) gegeben ist, statt des Produktes dx·dy·dz sogleich diesen Faktor in (15.) zur Rechten, noch mit dr·dq·dp multiplizirt; und man hat, wenn man nur überall unter x, y, z die in (2. — 4.) dafür gegebenen Funktionen von p, q, r versteht, sogleich das Element, dessen dreifache Integration nach den neuen Veränderlichen p, q, r, wenn man die durch die Natur der Aufgabe bedingten Grenzen gehörig berücksichtigt, genau zu demselben End-Resultat führt, welches auch das gegebene dreifache Integral (1.) liefert.

§. 76.

§. 76.

Betrachten wir namentlich noch die folgenden beiden besondern Fälle als Beispiele zu den vorstehenden (§§. 74. u. 75.).

I. Es seyen im (§. 74.) x und y rechtwinkliche Koordinaten-Werthe, dagegen q und r die von uns gewöhnlich gebrauchten Polar-Koordinaten φ und r in der Ebene, so daß man

1) $x = e + r\cdot\cos\varphi$ und 2) $y = r\cdot\sin\varphi$

hat, so ist (weil jetzt φ statt q genommen worden)

$$\partial y_q = \partial y_\varphi = r\cdot\cos\varphi; \quad \partial y_r = \sin\varphi;$$

$$\partial x_q = \partial x_\varphi = -r\cdot\sin\varphi; \quad \partial x_r = \cos\varphi;$$

folglich

3) $\partial y_q\cdot\partial x_r - \partial y_r\cdot\partial x_q = r\cdot(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = r.$

Es ist also jetzt

4) $$\iint f_{x,y}\cdot dy\cdot dx = \iint f_{x,y}\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi,$$

wenn nur rechts statt x und y die Werthe $e + r\cdot\cos\varphi$ und $r\cdot\sin\varphi$ gesetzt, und bei den Integrationen die Grenzen gehörig beachtet werden *).

II. Es seyen im (§. 75.) x, y, z rechtwinkliche, dagegen p, q, r unsere Polar-Koordinaten θ, φ und r (so daß θ statt p und φ statt q gesetzt werden), so hat man

1) $x = e + r\cdot\cos\varphi; \quad y = r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta$

und

$$z = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta.$$

Hieraus folgt nun

$$\partial z_p = \partial z_\theta = r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta; \quad \partial y_p = \partial y_\theta = -r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta;$$

$$\partial x_p = \partial x_\theta = 0; \quad \partial z_q = \partial z_\varphi = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta;$$

$$\partial y_q = \partial y_\varphi = r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta; \quad \partial x_q = \partial x_\varphi = -r\cdot\sin\varphi;$$

*) Nimmt man $f_{x,y} = 1$, so giebt diese Gleichung (4.) sogleich

$$\iint 1\cdot dy\cdot dx = \iint r\cdot dr\cdot d\varphi,$$

ohne daß jedoch $1\cdot dx\cdot dy = r\cdot dr\cdot d\varphi$ wäre, d. h. ohne daß die Elemente selbst einander gleich sind; was genau mit (§. 52. II.) übereinstimmt.

$\partial z_r = \sin\varphi \cdot \sin\theta$; $\partial y_r = \sin\varphi \cdot \cos\theta$; $\partial x_r = \cos\varphi$.

Also wird dasmal

$$\partial y_q \cdot \partial z_r - \partial y_r \cdot \partial z_q = r \cdot \cos\theta,$$

und $\partial z_r \cdot \partial x_q - \partial z_q \cdot \partial x_r = -r \cdot \sin\theta$;

und der Ausdruck in (§. 75. Nr. 15.) wird daher jetzt

$$= r^2 \cdot \sin\varphi.$$

Deshalb findet sich dasmal

2) $\iiint f_{x,y,z} \cdot dz\,dy\,dx = \iiint f_{x,y,z} \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$;

wenn nur rechts statt x, y, z in $f_{x,y,z}$, die in (1.) gegebenen Funktionen von θ, φ und r substituirt werden *).

Anmerkung. Mittelst dieser beiden vorstehenden Rechnungen (I. und II.) kann man daher aus den für rechtwinkliche Koordinaten bekannten Raum-Elementen, deren Integration den Inhalt der Fläche oder des Körpers giebt, sogleich die (größern oder kleinern) Raum-Elemente ableiten, welche bei dem Gebrauch der Polar-Koordinaten genommen werden müssen, wenn ihre Integration (Summation) ebenfalls den Inhalt der Fläche oder des Körpers soll geben können, und welche letzteren Elemente im (§. 52.) von uns aus geometrischen Betrachtungen direkt gefunden worden sind. — Auch kann man natürlich von den Polar-Elementen zu den erstern wieder übergehen.

§. 77.

Beweis des Ivorischen Satzes.

Nehmen wir nun noch einmal die Aufgabe vor: Die Anziehung eines durch die Gleichung

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegebenen homogenen Ellipsoids auf ein Massen-Element μ

*) Nimmt man hier wieder $f_{x,y,z} = 1$, so geht die Gleichung (2.) über in

$$\iiint 1 \cdot dx\,dy\,dx = \iiint r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta;$$

was mit (§. 52. IV.) sehr gut übereinstimmt.

zu finden, welches innerhalb oder außerhalb des Ellipsoids an einer Stelle m liegt, deren Koordinaten-Werthe x_1, y_1, z_1 sind, alles auf dieselben Axen $O'X_1$, $O'Y_1$ und $O'Z_1$ bezogen (welche durch den Mittel-Punkt O'_1 des Ellipsoids hindurchgehen und resp. den Richtungen der halben Axen a, b, c bezüglich zusammenfallen). Dabei setzen wir voraus, daß die Anziehung im Verhältniß des umgekehrten Quadrats der Entfernung der anziehenden Atome statt findet.

Lösen wir diese Aufgabe ganz direkt. Denken wir uns ein Element dM des Ellipsoids in irgend einer Stelle m im Innern oder an der Oberfläche desselben, deren Koordinaten-Werthe x, y, z sind (welche nicht mit den x_1, y_1, z_1 in der Gleichung (1.) verwechselt werden dürfen, in so ferne letztere bloß der Oberfläche des Ellipsoids angehören); setzen wir

2) $u = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}$,

so ist u die Entfernung m'm; die Anziehung von dM auf μ ist also $= h\cdot\mu\cdot dM\cdot\frac{1}{u^2}$, und es sind

3) $\frac{x_1-x}{u}, \frac{y_1-y}{u}, \frac{z_1-z}{u}$

die Kosinusse der Winkel, welche die Richtung mm' der Anziehung von dM auf μ mit den Axen macht. Folglich ist die nach der Axe $O'X_1$ zerlegte Anziehung X ausgedrückt durch die Gleichung

4) $X = -\Sigma\left(h\cdot\mu\cdot dM\cdot\frac{x_1-x}{u^3}\right)$.

Ist nun ϱ die Dichtigkeit des Ellipsoids, so ist

$$dM = \varrho\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

und die Gleichung (4.) geht über in

5) $X = -h\mu\varrho\cdot\iiint\frac{x_1-x}{u^3}\cdot dx\cdot dy\cdot dz$,

wo statt u sein Werth aus (2.) gesetzt werden muß.

Jetzt führe man statt der Veränderlichen x, y, z die drei neuen Veränderlichen x', y', z' ein, mittelst der Gleichungen

man ſtatt des Doppel-Integrals (7.) ſogleich wieder dieſes andere:

8) $$\int_{q''\div q'}\left(\int_{x''\div x'}(f_{x,y}\cdot\partial\chi_q)\cdot dx\right)\cdot dq,$$

wo jetzt q' und q'' konſtante Werthe vorſtellen, wo aber x' und x'' im Allgemeinen Funktionen von q ſeyn werden, die nach (§. 73.) gefunden werden müſſen.

III. Nun kann man aber in (8.) ſtatt des Veränderlichen x, den zweiten neuen Veränderlichen r einführen, der mittelſt der Gleichung (4.) gegeben iſt. Dann erhält man nach (I. Th. Analyſ. §. 37. II.) ſtatt des Doppel-Integrals (8.) ſogleich das nachſtehende:

9) $$\int_{q''\div q'}\left(\int_{r''\div r'}(f_{x,y}\cdot\partial\chi_q\cdot\partial x_r)\cdot dr\right)\cdot dq,$$

wo x durchweg die Funktion $x_{q,r}$ aus (4.) vorſtellt, und wo daher auch ſtatt y der Werth χ_q und ſomit auch der Werth $y_{q,r}$ aus (5.) geſetzt werden muß, und wo x' und r', desgleichen x'' und r'' mittelſt derſelben Gleichung (4.) mit einander zuſammenhängen, ſo nämlich, daß, wenn y' und y'' konſtant geweſen ſind, dann r' und r'' diejenigen Funktionen von q ſind, welche aus den Gleichungen (4. u. 5.) für r hervorgehen, wenn man y' oder y'' ſtatt y ſetzt und dann x eliminirt; — daß aber, wenn y' oder y'' oder beide, Funktionen von x noch geweſen ſind, dann r' oder r'' oder beide, diejenigen Funktionen von q ſeyn werden, welche aus $(\mathfrak{C})\ \psi_{x,y}=0$ hervorgehen, wenn man mittelſt der Gleichungen (4. u. 5.) die Veränderlichen x und y eliminirt, und die entſtehende Gleichung nach r auflöſt. Die Werthe q' und q'' in (9.) laſſen ſich aus (II.), d. h. aus der Betrachtung des (§. 73.) in jedem beſondern Falle beſonders angeben.

IV. Auch der Faktor $\partial\chi_q$ in (9.) läßt ſich in die Funktionen $x_{q,r}$ und $y_{q,r}$ der (4. u. 5.) ausdrücken. Man bekommt nämlich offenbar $\partial\chi_q$, wenn man in den Gleichungen (4. u. 5.) χ_q ſtatt y ſetzt, dann auch r als eine Funktion von q, dagegen x als konſtant anſieht, beide neue Gleichungen nach allem q

differenziirt und zuletzt ∂r_q eliminirt, in so ferne es einerlei ist, ob man r vor oder nach dem Differenziiren nach q eliminirt. Die Gleichungen (4. u. 5.) geben aber unter dieser Voraussetzung

10) $0 = \partial x_q + \partial x_r \cdot \partial r_q$ und 11) $\partial \chi_q = \partial y_q + \partial y_r \cdot \partial r_q$,

woraus zuletzt, wenn ∂r_q eliminirt wird,

12) $$\partial \chi_q = \frac{\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q}{\partial x_r}$$

hervorgeht. Dadurch geht aber das Resultat (9.) in das nachstehende über, nämlich in

13) $$\int_{q''\ldots q'} \left(\int_{r''\ldots r'} f_{x,y} \cdot (\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) \cdot dr \right) \cdot dq,$$

wo die Grenzen der Integrale so sind, wie solche in (III.) beschrieben stehen.

V. Sollte endlich bei der Umkehrung der Ordnung des Integrirens in (II.), nicht ein, sondern nach Anleitung des (§. 73.) die Summe zweier oder mehrerer Integrale gesetzt werden müssen, so würde das End-Resultat (13.) doch genau eben so werden, nur daß dann ebenfalls zwei oder mehr solche Integrale sich ergeben würden, deren Grenzen in jedem Einzel-Falle nach (§. 73.) und nach dem Vorstehenden ausgemittelt werden müßten, in welchen aber das zu integrirende Element allemal erhalten wird, wenn man in dem gegebenen Element $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ statt des Produktes

14) $dx \cdot dy$ dieses andere $(\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) \cdot dr \cdot dq$

substituirt, unter x und y selbst aber die in (4. u. 5.) gegebenen Funktionen von q und r versteht *).

---

*) Dieser Satz ist nicht neu, aber noch nirgend gehörig erwiesen. Vergl. Lagrange, Théorie des fonctions. Nouvelle édit. chap. XIV.; Laplace, Mécanique céleste. T. II. pag. 1 seqq., und die Abhandlung des Ivori in den philosophical transactions 1809; auch Lacroix, Calcul diff. et integr. ꝛc. — Der Nerv des Beweises ruht auf der obigen (II.), und diese Idee verdankt der Verf., der auf diesen Uebelstand mehrseitig aufmerksam gemacht hat, einer mündlichen Besprechung darüber mit seinem scharfsinnigen Kollegen Dirichlet.

§. 75.

Derſelbe Satz läßt ſich auch ſogleich auf dreifache Integrale ausdehnen. — Hat man nämlich ein dreifaches Integral

1) $\int\int\int f_{x,y,z} \cdot dz) \cdot dy) \cdot dx,$

wo die Integration nach z zwiſchen den Grenzen z' und z'' (welche konſtant oder Funktionen von y und x ſeyn können), die Integration nach y zwiſchen den Grenzen y' und y'' (welche konſtant oder noch Funktionen von x ſind), endlich die Integration nach x zwiſchen den konſtanten Grenzen x' und x'' geſchehen ſoll; — führt man dann drei neue Veränderliche p, q, r ein mittelſt der Gleichungen

2) $x = x_{p,q,r}$; 3) $y = y_{p,q,r}$ und 4) $z = z_{p,q,r}$,

und ſoll nun das Element der neuen dreifachen Integration gefunden werden, welche daſſelbe liefert, was die (1.), ſobald für des dieſer drei letztern Integrale zwiſchen den durch die Natur des gegebenen Integrals (1.) bedingten Grenzen genommen wird, ſo geſchieht dies auf folgende Art:

I. Zuerſt führt man ſtatt des Veränderlichen z einen der drei neuen Veränderlichen z. B. p ein, indem man aus den drei Gleichungen (2. — 4.) die beiden andern q und r eliminirt, dadurch

5) $z = \chi_p$, wo χ_p auch noch x und y enthält,

findet, und nun ſtatt

$$\int f_{x,y,z} \cdot dz \quad \text{ſogleich} \quad \int f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot dp$$

ſchreibt, nach (I. Th. Analyſ. §. 37. II.).

II. In der nun ſtatt der (1.) entſtehenden neuen dreifachen Integration (nach p, nach y und nach x) vertauſcht man jetzt die Ordnung der Integrationen, ſo daß ſie zuerſt nach y, dann nach p, zuletzt nach x ſtatt finden. Die Ordnung der beiden letztern Integrationen vertauſcht man nun auf's Neue, ſo daß man zuletzt ſtatt des dreifachen Integrals (1.) hat

6) $\int\int\int f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p) \cdot dy) \cdot dx) \cdot dp.$

III. In der erstern dieser drei Integrationen (nach y) führt man nun statt des Veränderlichen y den zweiten neuen Veränderlichen q ein, indem man aus den beiden Gleichungen (2. u. 3.) r eliminirt und die neue Gleichung nach y auflöst, so daß man hat:

7) $y = \chi'_q$, wo χ'_q auch noch x enthält; —

dann aber wieder (I. Th. Analys. §. 37. II.) anwendet, so daß man statt

8) $\int f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot dy$ jetzt $\int f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot \partial\chi'_q \cdot dq$

erhält.

IV. In der nun aus (6.) hervorgehenden dreifachen Integration (nach q, nach x und nach p) vertauscht man jetzt wieder die beiden erstern Integrationen mit einander und erhält so statt der (1.), d. h. statt der (6.), das nachstehende dreifache Integral:

9) $\int\int\int (f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot \partial\chi'_q) \cdot dx) \cdot dq) \cdot dp.$

V. Nun aber führt man bei der erstern dieser dreifachen Integration (nach x) statt des Veränderlichen x den dritten neuen Veränderlichen r mittelst der Gleichung (2.) ein, und man erhält sonach statt der (9.), also statt der (1.), folgendes:

10) $\int\int\int (f_{x,y,z} \cdot \partial\chi_p \cdot \partial\chi'_q \cdot \partial x_r) \cdot dr) \cdot dq) \cdot dp,$

welches das gesuchte End-Resultat ist, sobald man nur alles in die in (2. — 4.) gegebenen Funktionen von p, q und r ausdrückt. —

VI. Die Faktoren $\partial\chi_p$, $\partial\chi'_q$ lassen sich aber auf folgende Art in die in (2. — 4.) gegebenen Funktionen $x_{p,q,r}$, $y_{p,q,r}$ und $z_{p,q,r}$ bequem ausdrücken.

Um $\partial\chi_p$ zu finden, muß man nämlich in den Gleichungen (2. — 4.) statt z die Form χ_p substituiren, dann die drei Gleichungen unter der Voraussetzung nach allem p differenziiren, daß x und y konstant, dagegen q und r Funktionen von p seyen; zuletzt aber ∂q_p und ∂r_p eliminiren; denn es ist einerlei, ob man q und r zuerst eliminirt, und dann nach p differenziirt, oder ob

man das so eben angeführte Verfahren befolgt. Diese Rechnung giebt aber zuerst aus (2. — 4.)

$$11)\quad \begin{cases} 0 = \partial x_p + \partial x_q \cdot \partial q_p + \partial x_r \cdot \partial r_p, \\ 0 = \partial y_p + \partial y_q \cdot \partial q_p + \partial y_r \cdot \partial r_p, \\ \partial \chi_p = \partial z_p + \partial z_q \cdot \partial q_p + \partial z_r \cdot \partial r_p. \end{cases}$$

Die Elimination von ∂q_p und ∂r_p hieraus giebt aber sogleich

$$12)\quad \partial \chi_p = \frac{\partial z_p \cdot (\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) + \partial y_p \cdot (\partial z_r \cdot \partial x_q - \partial x_r \cdot \partial z_q) + \partial x_p \cdot (\partial y_r \cdot \partial z_q - \partial z_r \cdot \partial y_q)}{\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q}.$$

Um $\partial \chi'_q$ zu finden, verfährt man genau wie so eben, oder genau wie in (§. 74. IV.). Dadurch erhält man aus (2. u. 3.), indem man χ'_q statt y setzt und nach allem q differenziirt, dabei aber x als konstant und r als Funktion von q ansieht,

$$13)\quad 0 = \partial x_q + \partial x_r \cdot \partial r_q \text{ und } \partial \chi'_q = \partial y_q + \partial y_r \cdot \partial r_q;$$

und indem man hieraus ∂r_q eliminirt, so ergiebt sich

$$14)\quad \partial \chi'_q = \frac{\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q}{\partial x_r}.$$

Man erhält daher, wenn man (13. u. 14.) mit einander multiplizirt,

$$15)\quad \partial \chi_p \cdot \partial \chi'_q \cdot \partial x_r = \partial z_p \cdot (\partial y_q \cdot \partial x_r - \partial y_r \cdot \partial x_q) + \partial y_p \cdot (\partial z_r \cdot \partial x_q - \partial z_q \cdot \partial x_r) + \partial x_p \cdot (\partial y_r \cdot \partial z_q - \partial z_r \cdot \partial y_q).$$

VII. Im Praktischen setzt man also, wenn das dreifache Integral (1.) gegeben ist, statt des Produktes dx·dy·dz sogleich diesen Faktor in (15.) zur Rechten, noch mit dr·dq·dp multiplizirt; und man hat, wenn man nur überall unter x, y, z die in (2. — 4.) dafür gegebenen Funktionen von p, q, r versteht, sogleich das Element, dessen dreifache Integration nach den neuen Veränderlichen p, q, r, wenn man die durch die Natur der Aufgabe bedingten Grenzen gehörig berücksichtigt, genau zu demselben End-Resultat führt, welches auch das gegebene dreifache Integral (1.) liefert.

§. 76.

gend einem Atom α des einen festen Theils, eine Wirkung aus auf irgend einen Atom β des andern, so muß von dem letztern Atom β auf den erstern Atom α genau dieselbe Wirkung ausgehen; d. h. Wirkung und Gegenwirkung dieser beiden Atome müssen jedesmal einander gleich seyn.

Denn wäre dies nicht, so würde die eine Wirkung von der andern überwunden, und das Gleichgewicht gebrochen.

Ist die eine Wirkung von α auf β ein Druck, so heißt die Gegenwirkung von β auf α der Widerstand; und umgekehrt.

3) Werden zwei feste Körper mit ihren ebenen oder krummen Oberflächen lose gegen einander gedrückt, so können sie nicht im Gleichgewicht seyn, wenn nicht jeder gegen den andern in der Richtung der Normalen angedrückt wird, so daß beide Oberflächen an der Stelle, wo sie gegen einander gedrückt werden, eine gemeinschaftliche Normale haben, nach (I. Th. Mechanik §. 22.).

4) Wird ein fester Körper mit einer festen scharfen Kante, die gerade oder krumm seyn mag, gegen einen Körper mit fester Oberfläche, oder ebenfalls mit fester scharfer Kante an einem Punkt α lose gedrückt, so können diese beiden Körper einander nicht das Gleichgewicht halten, wenn nicht die gemeinschaftliche Richtung des (gleichen) Druckes und Gegendruckes mit der Normale der festen Oberfläche an α zusammenfällt und zugleich auf der Tangente der scharfen Kante an α, oder auf den Tangenten beider scharfen Kanten an α zugleich senkrecht steht.

5) Wird ein fester Körper mit einer scharfen festen Ecke α (d. h. mit einem seiner Atome) gegen einen andern Körper mit fester Oberfläche oder mit fester scharfer Kante lose gedrückt, so kann dieses lose System nicht im Gleichgewicht seyn, wenn nicht die gemeinschaftliche Richtung des (gleichen) Druckes und Gegendruckes, auf der festen Oberfläche, oder auf der Tangente der scharfen Kante an α, senkrecht steht; immer nach (I. Th. Mechanik §. 22.).

6) Dieses alles gilt, auch wenn einer der beiden festen Körper absolut fest seyn sollte.

$\partial z_r = \sin\varphi \cdot \sin\theta$; $\partial y_r = \sin\varphi \cdot \cos\theta$; $\partial x_r = \cos\varphi$.

Also wird dasmal

$$\partial y_q \cdot \partial z_r - \partial y_r \cdot \partial z_q = r \cdot \cos\theta,$$

und $$\partial z_r \cdot \partial x_q - \partial z_q \cdot \partial x_r = -r \cdot \sin\theta;$$

und der Ausdruck in (§. 75. Nr. 15.) wird daher jetzt

$$= r^2 \cdot \sin\varphi.$$

Deshalb findet sich dasmal

2) $\iiint f_{x,y,z} \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \iiint f_{x,y,z} \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$;

wenn nur rechts statt x, y, z in $f_{x,y,z}$ die in (1.) gegebenen Funktionen von θ, φ und r substituirt werden *).

Anmerkung. Mittelst dieser beiden vorstehenden Rechnungen (I. und II.) kann man daher aus den für rechtwinklich Koordinaten bekannten Raum-Elementen, deren Integration da Inhalt der Fläche oder des Körpers giebt, sogleich die (größern oder kleinern) Raum-Elemente ableiten, welche bei den Gebrauch der Polar-Koordinaten genommen werden müssen, wenn ihre Integration (Summation) ebenfalls den Inhalt da Fläche oder des Körpers soll geben können, und welche letztern Elemente im (§. 52.) von uns aus geometrischen Betrachtungen direkt gefunden worden sind. — Auch kann man natürlich von den Polar-Elementen zu den erstern wieder übergehen.

§. 77.

Beweis des Ivorischen Satzes.

Nehmen wir nun noch einmal die Aufgabe vor: Die Anziehung eines durch die Gleichung

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegebenen homogenen Ellipsoids auf ein Massen-Element

*) Nimmt man hier wieder $f_{x,y,z} = 1$, so geht die Gleichung (2 über in

$$\iiint 1 \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \iiint r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta;$$

was mit (§. 52. IV.) sehr gut übereinstimmt.

zu finden, welches innerhalb oder außerhalb des Ellipsoids an einer Stelle m liegt, deren Koordinaten-Werthe x_1, y_1, z_1 sind; alles auf dieselben Axen $O'X_1$, $O'Y_1$ und $O'Z_1$ bezogen (welche durch den Mittel-Punkt O' des Ellipsoids hindurchgehen und mit den Richtungen der halben Axen a, b, c bezüglich zusammenfallen). Dabei setzen wir voraus, daß die Anziehung im Verhältniß des umgekehrten Quadrats der Entfernung der anziehenden Atome statt findet.

Lösen wir diese Aufgabe ganz direkt. Denken wir uns ein Element dM des Ellipsoids, in irgend einer Stelle m', im Innern oder an der Oberfläche desselben, deren Koordinaten-Werthe x, y, z sind (welche nicht mit den x_1, y_1, z_1 in der Gleichung (1.) verwechselt werden dürfen, in so ferne letztere bloß der Oberfläche des Ellipsoids angehören); setzen wir

$$2) \quad u = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2},$$

so ist u die Entfernung m'm; die Anziehung von dM auf μ ist also $= h\cdot\mu\cdot dM\cdot\frac{1}{u^2}$, und es sind

$$3) \quad \frac{x_1-x}{u}, \quad \frac{y_1-y}{u}, \quad \frac{z_1-z}{u}$$

die Kosinusse der Winkel, welche die Richtung mm' der Anziehung von dM auf μ mit den Axen macht. Folglich ist die nach der Axe $O'X_1$ zerlegte Anziehung X ausgedrückt durch die Gleichung

$$4) \quad X = -\Sigma\left(h\cdot\mu\cdot dM\cdot\frac{x_1-x}{u^3}\right).$$

Ist nun ϱ die Dichtigkeit des Ellipsoids, so ist

$$dM = \varrho\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

und die Gleichung (4.) geht über in

$$5) \quad X = -h\mu\varrho\cdot\iiint\frac{x_1-x}{u^3}\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

wo statt u sein Werth aus (2.) gesetzt werden muß.

Jetzt führe man statt der Veränderlichen x, y, z die drei neuen Veränderlichen x', y', z' ein, mittelst der Gleichungen

so wird aus der Gleichung (5.) sogleich

7) $X = -h\mu\varrho\cdot abc\cdot \iint \frac{(x_1 - ax')\cdot dx'\cdot dy'\cdot dz'}{[(x_1-ax')^2+(y_1-by')^2+(z_1-cz')^2]^{\frac{3}{2}}}$,

wo jedoch die Grenzen dieser Integrale durch die aus (1.) hervorgehende Gleichung

8) $x'^2+y'^2+z'^2 = 1$

bestimmt und gegeben sind (während diese letztere Gleichung die Gleichung einer Kugel-Oberfläche ist, die den Radius 1 hat).

Integrirt man aber in (7.) zur Rechten wirklich nach x', was ohne weiteres geschehen kann, und versteht man unter

9) x_1 die positive Wurzel $\sqrt{1-y'^2-z'^2}$,

wie solche aus der (8.) für x' hervorgeht, so daß $-x_1$ und $+x_1$ die Grenzen der Integration nach x' sind, so erhält man aus (7.)

10) $X = -h\mu\varrho\cdot bc\cdot\left(\iint \frac{dy'\cdot dz'}{[(x_1-ax_1)^2+(y_1-by')^2+(z_1-cz')^2]^{\frac{3}{2}}} - \iint \frac{dy'\cdot dz'}{[(x_1+ax_1)^2+(y_1-by')^2+(z_1-cz')^2]^{\frac{3}{2}}}\right)$,

und die Grenzen der Integrationen nach y' und nach z' mittelst der, für $x' = 0$ aus (8.) hervorgehenden Gleichung

11) $y'^2+z'^2 = 1$

gegeben sind (welche Gleichung einem Kreise angehört, dessen Radius $= 1$ ist).

Um nun jedes dieser beiden Doppel-Integrale (nach y' und nach z') zu finden, führe man statt y' und z' die beiden neuen Veränderlichen φ und θ ein, mittelst der Gleichungen

12) $y' = \sin\varphi\cdot\cos\theta$ und 13) $z' = \sin\varphi\cdot\sin\theta$,

so daß aus (9.)

14) $x_1 = \cos\varphi$

wird *). Der (§. 74.) giebt nun den Faktor $\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi\cdot d$

*) Diesen drei Gleichungen (12. — 14.) wird man es ansehen, daß

den statt $dx/dy/dz$ in die beiden Doppel-Integrale zur Rechten von (10.) gesetzt werden muß, damit die neuen Doppel-Integrale nach φ und nach θ genommen werden können. Was aber die Grenzen betrifft, zwischen denen die neuen Integrale nach φ und nach θ genommen werden müssen, so kann man, wie im (§. 73.) das erstere Doppel-Integral in (10.) zur Rechten als die Masse einer durch die Gleichung (11.) gegebenen Kreisfläche sich denken, deren Dichtigkeit an jeder durch x', y' gegebenen Stelle im Innern oder an der Grenze dieses Kreises

$$= \frac{1}{[(x_1 - ax_0)^2 + (y_1 - by')^2 + (z_1 - cz')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

ist. Da nun die Gleichungen (12. u. 13.) der Gleichung (11.) bereits genügen, so sind φ und θ ganz unabhängig von einander und nur so zu nehmen, daß y' und z' alle Werthe von -1 bis zu $+1$ annehmen können, wie solches die Grenz-Gleichung des Kreises in (11.) ihnen erlaubt. Dies ist der Fall, wenn man φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, und θ von 0 bis 2π nimmt; dies sind also die Grenzen von φ und θ.

Das zweite Doppel-Integral in (10.) läßt sich auf das erstere zurückführen, wenn man $\pi + \varphi$ statt φ, also $-d\varphi$ statt $d\varphi$ schreibt; es wird dann genau das erstere, jedoch mit dem Unterschied, daß $\pi - \varphi$ die Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, folglich φ selbst die Grenzen π und $\frac{1}{2}\pi$ hat. Die beiden Doppel-Integrale vereinigen sich daher in ein einziges, so daß man erhält aus (10.)

$$15)\quad X = -h\mu\varrho \cdot bc \cdot \int_{\pi \div 0} \left(\int_{2\pi \div 0} \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{R} \cdot d\theta \right) \cdot d\varphi,$$

wo die Integration in beliebiger Ordnung kann vorgenommen werden, während R positiv gedacht wird übrigens durch die Gleichung

$$16)\quad R^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2(ax_1 \cdot \cos\varphi + by_1 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + cz_1 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta) + a^2 \cdot \cos\varphi^2 + b^2 \cdot \sin\varphi^2 \cdot \cos\theta^2 + c^2 \cdot \sin\varphi^2 \cdot \sin\theta^2$$

gegeben ist.

1, φ, θ die Polar-Koordinaten der durch die Gleichung (8.) gegebenen Kugel-Oberfläche sind.

Denkt man sich nun ein anderes Ellipsoid, welches denselben Mittel-Punkt O und dieselben Axen-Richtungen, aber die halben Axen a_1, b_1, c_1 hat, welches homogen ist, dieselbe Dichtigkeit ϱ hat, wie das erstere, und welches ein in dem Punkt (x_1, y_1, z_1) liegendes Massen-Element μ anzieht, so ist die nach der Axe OX_1 zerlegte Anziehung X_1 offenbar ausgedrückt durch die Gleichung

$$17)\quad X_1 = -h\mu\varrho\, b_1 c_1 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sin p\cdot\cos\varphi}{R_1^3}\cdot d\theta\right)\cdot d\varphi,$$

wo R_1 aus R in (16.) erhalten wird, wenn man statt a, b, c, x_1, y_1, z_1 jetzt bezüglich a_1, b_1, c_1, x_1, y_1, z_1 schreibt.

Nimmt man also nun a_1, b_1, c_1, a, b, c, x_1, y_1, z_1 und x_1, y_1, z_1 so, daß

$$R = R_1$$

wird, so sind in (15. u. 17.) die Doppel-Integrale einander gleich, und man hat dann offenbar

$$18)\quad X : X_1 = bc : b_1 c_1, \text{ oder } \frac{X}{bc} = \frac{X_1}{b_1 c_1}.$$

Nun bewirkt aber die Annahme des (§. 70.), nämlich

$$b^2 - a^2 = b_1^2 - a_1^2 = h,\quad c^2 - a^2 = c_1^2 - a_1^2 = k,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{a_1},\ \frac{y}{b} = \frac{y_1}{b_1},\ \frac{z}{c} = \frac{z_1}{c_1},\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{z_1^2}{c_1^2} = 1,$$

offenbar, daß $R = R_1$ wird. Denn setzt man

$$\frac{x}{a} = \cos p,\ \frac{y}{b} = \sin p\cdot\cos q,\ \text{so daß } \frac{z}{c} = \sin p\cdot\sin q$$

wird, so hat man vermöge der vorstehenden Annahmen

$$x = a\cdot\cos p,\quad y = b\cdot\sin p\cdot\cos q,\quad z = c\cdot\sin p\cdot\sin q,$$

$$x_1 = a_1\cdot\cos p,\quad y_1 = b_1\cdot\sin p\cdot\cos q,\quad z_1 = c_1\cdot\sin p\cdot\sin q,$$

$$b^2 = a^2 + h,\ c^2 = a^2 + k,\ b_1^2 = a_1^2 + h,\ c_1^2 = a_1^2 + k;$$

und diese Werthe in (16.) substituirt, geben

$$R^2 = a_1^2 + a^2 + h\cdot(\sin p^2\cdot\cos q^2 + \sin\varphi^2\cdot\cos\theta^2) +$$
$$k\cdot(\sin p^2\cdot\sin q^2 + \sin\varphi^2\cdot\sin\theta^2) - 2(a_1 a\cdot\cos p\cdot\cos\varphi +$$
$$b_1 b\cdot\sin p\cdot\cos q\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta + c_1 c\cdot\sin p\cdot\sin q\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta).$$

Dieser Werth R^2 ändert sich aber offenbar nicht, wenn man in ihm a und a_1, b und b_1, c und c_1 mit einander vertauscht, weil h und k, nach der Annahme, dadurch sich nicht ändern. Also ist bei der im (§. 70.) gemachten Annahme wirklich $R = R_1$; folglich ist der Lehrsatz des Ivori im (§. 70.) jetzt strenge erwiesen, und (nach Ivori) gleichsam erfunden; denn was für X und X_1 hier gesagt ist, kann man für Y und Y_1, desgleichen für Z und Z_1 wiederholen.

Die Statik fester Körper.

Neuntes Kapitel.

Von dem Gleichgewicht der unfreien und der losen Systeme. Vom mathematischen Hebel. Bestimmung des Druckes auf Unterlagen.

§. 78.

Allgemeine Principien für lose Systeme.

In den Anwendungen kommt selten ein fester Körper allein vor, sondern gewöhnlich wirken zwei oder mehr feste Körper auf einander ein, und bilden dann die in den (§§. 2. u. 3.) definirten unfreien und losen Systeme.

Für das Gleichgewicht eines angegriffenen losen Systems sind folgende Punkte zunächst gut fest zu halten.

1) Wirkt, während des Gleichgewichts eines losen Systems, einer der festen Theile desselben auf die übrigen gar nicht, so kann derselbe, unbeschadet des Gleichgewichts, aus dem System entfernt werden; und er bildet dann für sich ein freies festes System, und die auf diesen Theil einwirkenden Kräfte halten in diesem Falle für sich und unabhängig von den, auf die übrigen Theile des losen Systems einwirkenden Kräften, einander das unbedingte Gleichgewicht.

2) Geht aber während des Gleichgewichts eines aus zweien oder mehreren festen Theilen bestehenden losen Systems, von ir-

gend einem Atom α des einen festen Theils, eine Wirkung aus auf irgend einen Atom β des andern, so muß von dem letztern Atom β auf den erstern Atom α genau dieselbe Wirkung ausgehen; d. h. Wirkung und Gegenwirkung dieser beiden Atome müssen jedesmal einander gleich seyn.

Denn wäre dies nicht, so würde die eine Wirkung von der andern überwunden, und das Gleichgewicht gebrochen.

Ist die eine Wirkung von α auf β ein Druck, so heißt die Gegenwirkung von β auf α der Widerstand; und umgekehrt.

3) Werden zwei feste Körper mit ihren ebenen oder krummen Oberflächen lose gegen einander gedrückt, so können sie nicht im Gleichgewicht seyn, wenn nicht jeder gegen den andern in der Richtung der Normalen angedrückt wird, so daß beide Oberflächen an der Stelle, wo sie gegen einander gedrückt werden, eine gemeinschaftliche Normale haben, nach (I. Th. Mechanik §. 22.).

4) Wird ein fester Körper mit einer festen scharfen Kante, die gerade oder krumm seyn mag, gegen einen Körper mit fester Oberfläche, oder ebenfalls mit fester scharfer Kante an einem Punkt α lose gedrückt, so können diese beiden Körper einander nicht das Gleichgewicht halten, wenn nicht die gemeinschaftliche Richtung des (gleichen) Druckes und Gegendruckes mit der Normale der festen Oberfläche an α zusammenfällt und zugleich auf der Tangente der scharfen Kante an α, oder auf den Tangenten beider scharfen Kanten an α zugleich senkrecht steht.

5) Wird ein fester Körper mit einer scharfen festen Ecke α (d. h. mit einem seiner Atome) gegen einen andern Körper mit fester Oberfläche oder mit fester scharfer Kante lose gedrückt, so kann dieses lose System nicht im Gleichgewicht seyn, wenn nicht die gemeinschaftliche Richtung des (gleichen) Druckes und Gegendruckes, auf der festen Oberfläche, oder auf der Tangente der scharfen Kante an α, senkrecht steht; immer nach (I. Th. Mechanik §. 22.).

6) Dieses alles gilt, auch wenn einer der beiden festen Körper absolut fest seyn sollte.

§. 79.

Allgemeine Regel für lose Systeme.

Um die Bedingungen des Gleichgewichts eines losen Systems in Gleichungen gebracht zu haben, darf man nur auf jeden der festen Theile desselben, an jeder (bekannten oder unbekannten) Stelle, wo solcher auf einen andern der festen Theile eine (unbekannte) Wirkung R ausübt, eine, dieser Wirkung R gleiche, aber genau entgegengesetzte Kraft noch hinzutreten lassen; und diesen festen Theil ist für sich, als ein freies System angesehen, im unbedingten Gleichgewicht.

Schreibt man auf diese Weise die Gleichungen hin, welche zum unbedingten Gleichgewicht der einzelnen, das lose System bildenden festen Theile erfordert werden, so ist

a) das Gleichgewicht des losen Systems nothwendig, und

b) diese Gleichungen dienen dazu, die unbekannten Kräfte, namentlich auch die unbekannten Einwirkungen R, so wie die unbekannten Stellen, wo sie statt finden, mit einem Worte alles Unbekannte, und folglich auch das Gesuchte, so viel sie es vermögen, zu bestimmen.

Anmerk. 1. Es versteht sich, daß alles dieses auch dann noch gilt, wenn einer der festen Theile auf die übrigen gar nicht einwirken, oder wenn ein anderer dieser festen Theile des losen Systems absolut fest (§. 1.) seyn sollte. Im erstern Fall würde man die vorausgesetzten Einwirkungen der Null gleich finden; im andern Falle aber würde man die Gleichungen weglassen, welche das Gleichgewicht des absolut festen Theils ausdrücken, weil solche nun überflüssig wären.

Anmerk. 2. Da das Gleichgewicht eines losen Systems nicht gestört wird, wenn man mehrere oder alle Theile desselben in einen einzigen festen Körper verwandelt sich denkt, so folgt noch der sehr wichtige Satz:

Ist ein loses System im Gleichgewicht, so sind die Gleichungen allemal richtige Gleichungen, welche man unter der Voraussetzung erhält, daß mehrere oder alle Theile des im Gleich-

gewicht sich befindenden losen Systems, einen einzigen festen Körper bilden.

Die unter dieser letztern Voraussetzung erhaltenen Gleichungen sind aber nicht als neue Gleichungen anzusehen, sondern als solche, die auch auf blos algebraischem Wege aus den, nach unserm (§.) selbst gefundenen Gleichungen des Gleichgewichts aller einzelnen Theile des losen Systems, abgeleitet werden können.

Geben wir nun von diesen allgemeinen und für die Anwendungen höchst wichtigen Sätzen zunächst einige Anwendungen.

§. 30.

Gleichgewicht um einen absolut festen Punkt.

Es sey ein Körper von den n Kräften $P_1, P_2, \dots P_n$ des (§. 26.) angegriffen, und die Bezeichnung des (§. 29.) vorausgesetzt.

I. Hängt nun derselbe Körper an einem seiner Punkte mit einem absolut festen Punkte A lose zusammen, so daß er sich nach allen Richtungen um diesen Punkt A drehen kann, so kann man die Bedingungen des Gleichgewichts um diesen absolut festen Punkt (also des bedingten Gleichgewichts), so wie noch den Druck P_0 suchen, welchen der absolut feste Atom A im Falle des Gleichgewichts erleidet.

Der vorstehenden Regel zu Folge wird man an dem Punkte A des festen Körpers noch eine Kraft P' anbringen, dem gesuchten Druck P_0 gleich und genau entgegen, und alle $n+1$ Kräfte in's Gleichgewicht stellen. Dies giebt genau die Gleichungen (1. — 6.) des (§. 30. I.), wenn x_0, y_0, z_0 die Koordinaten-Werthe von A vorstellen. Legen wir aber noch überdies die Koordinaten-Axen OX, OY, OZ durch den absolut festen Punkt A, so haben wir $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ und $z_0 = 0$, und die drei letztern Gleichungen gehen sogleich über in

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

welche blos die gegebenen Kräfte enthalten, also die Bedingungen dieses (bedingten) Gleichgewichts sind. Die drei erstern Glei-

chungen geben, dagegen den Gegendruck P_0, also auch den ihm gleichen, nur gerade entgegengesetzten Druck P_0 seiner Größe und Richtung nach.

Man könnte dieselbe Aufgabe auch direkt behandeln, und blos die Wirkung aller Kräfte auf das freie System suchen, also ohne die Regeln des (§. 79.) in Anwendung zu bringen. Zu dem Ende versammelt man alle gegebenen Kräfte P_1, P_2, ... P_n in dem Punkt A nach (§. 26.), und erhält die Versammlungs-Kraft $P_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, welche mit den Axen die Winkel α_0, β_0, γ_0 macht, die durch die Gleichungen $P_0 \cdot \cos\alpha_0 = X$, $P_0 \cdot \cos\beta_0 = Y$, und $P_0 \cdot \cos\gamma_0 = Z$ gegeben sind. Diese Versammlungs-Kraft wird durch den absolut festen Punkt O vernichtet, und ist der Druck, welchen der letztere auszuhalten hat. Die hinzugetretenen n Gegen-Paare sind aber nun im Gleichgewicht, wenn die Summe der statischen Momente der Projektionen dieser Kräfte, auf jede der durch den absolut festen Punkt O gelegten Koordinaten-Ebenen, in so ferne man O zum Centrum dieser Momente nimmt, der Null gleich ist; also wenn man $L = 0$, $M = 0$ und $N = 0$ hat (§§. 19. 21. 22.).

Jede dieser verschiedenen Ansichten läßt übrigens erkennen, daß das System um den absolut festen Punkt A herum im Gleichgewicht ist, wenn die Summe der statischen Momente aller Kräfte, um jede von dreien beliebig durch A gelegten Axen, einzeln der Null gleich ist (vergl. §. 27. Nr. 3. 4.).

II. Liegt derselbe Körper mit einem seiner Punkte auf einer absolut festen ebenen oder krummen Fläche lose auf, so kann nicht Gleichgewicht existiren, wenn der Druck nicht normal gegen diese Fläche erfolgt, nach (§. 78. Nr. 5.). Dasmal reicht also eine der drei ersten Gleichungen (1. — 3.) des (§. 30. I.) schon aus, um den Gegendruck P_0 zu geben, weil die Winkel α', β' und γ' dasmal gegeben und die Winkel sind, welche die Normale mit den Axen macht. Man erhält demnach jetzt fünf Bedingungs-Gleichungen des (bedingten) Gleichgewichts. — Läßt man OZ mit der Richtung der Normale in der Richtung des Widerstandes zusammenfallen, so ist $\gamma' = 0$, $\beta' = \alpha' = \frac{1}{2}\pi$, also $\cos\gamma' = 1$, $\cos\beta' = \cos\alpha' = 0$, und die sechs Gleichungen (1. — 6. des §. 30. I.) werden nun

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z + P_0 = 0,\quad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,$$

und so hat man die fünf Bedingungs-Gleichungen des (bedingt

ten) Gleichgewichts, so wie noch den Druck $P_0 = -Z$, wo aber $-Z$ sich positiv zeigen muß, wenn das Gleichgewicht möglich seyn soll.

§. 81.

Neue praktische Regel.

Wir fügen den Regeln des (§. 79.) die nachstehende neue praktische Regel noch hinzu:

1) An jeder Stelle, wo eine ihrer Größe und Richtung nach unbekannte Gegenwirkung in Rechnung gebracht wird, thut man im Allgemeinen besser, diese unbekannte Gegenwirkung nach den drei Axen zerlegt sich zu denken, und diese drei unbekannten Seitenwirkungen in Rechnung zu bringen. Zuletzt kann man aus den drei Seitenwirkungen die wahre Gegenwirkung der Größe und Richtung nach zusammensetzen.

2) Liegt alles in einer und derselben Ebene XOY, so daß die dritte Axe OZ ganz überflüssig wird, so denkt man sich natürlich auch den unbekannten Gegendruck, da er in derselben Ebene wirkt, nur in zwei unbekannte Seiten-Drucke nach den beiden Axen zerlegt; und bringt letztere dann in Rechnung.

§. 82.

Gleichgewicht um eine absolut feste Axe.

Es wird wiederum der angegriffene Körper des (§. 26.), und die Bezeichnung des (§. 29.) vorausgesetzt. Dieser Körper hänge mit zwei absolut festen Punkten A und B lose und dergestalt zusammen, daß er sich um die Gerade AB drehen kann. Man soll die Bedingungen des (bedingten) Gleichgewichts finden, so wie auch die Drucke, welche A und B im Gleichgewicht erleiden.

Nach (§. 79. u. §. 81.) setzt man dem Drucke an A die drei Gegen-Drucke X_1, Y_1 und Z_1, eben so dem Drucke an B die drei Gegen-Drucke X_2, Y_2 und Z_2 parallel mit den Koordinaten-Axen OX, OY und OZ entgegen, so sind alle $n+6$ Kräfte im unbedingten Gleichgewicht. Man hat daher dasmal

genau die sechs Gleichungen (II. des §. 30.), wenn nur x', y', z' die Koordinaten-Werthe des Punktes A, und x'', y'', z'' die des Punktes B vorstellen, welche hier gegeben sind, (dort aber gesucht waren). Man erhält daher die einzige Bedingungs-Gleichung (⊙ des §. 30. II.) für dieses (bedingte) Gleichgewicht.

Legt man der größern Bequemlichkeit wegen die drei Koordinaten-Axen durch den einen absolut festen Punkt O, und läßt man OZ mit OB zusammenfallen; ist ferner die Entfernung $OB = a$, so hat man $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, $x'' = 0$, $y'' = 0$ und $z'' = a$ und die sechs Gleichungen (§. 30. II.) werden jetzt folgende:

1) $X + X_1 + X_2 + 0$; 2) $Y + Y_1 + Y_2 + 0$; 3) $Z + Z_1 + Z_2 = 0$;
4) $L = 0$; 5) $M - a X_2 = 0$; 6) $N + a Y_2 = 0$.

Die Gleichung (4.) ist die Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts. — Die Gleichungen (5. 6. 1. u. 2.) geben die Gegen-Drucke X_2, Y_2, X_1, Y_1 augenblicklich; die Gleichung (3.) endlich bestimmt die Summe der in der Richtung OB wirkenden Gegendrucke $Z_1 + Z_2$ ($= -Z$), läßt aber jeden einzelnen derselben unbestimmt.

Aber eben, weil sich Z_1 und Z_2 im Allgemeinen nicht näher bestimmen, so hängen zwar die Gegen-Drucke P' und P'', — welche sich bezüglich aus X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 zusammensetzen lassen, und die, in genau entgegengesetzter Richtung genommen, die Drucke sind, welche die absolut festen Punkte A und B (im Gleichgewicht) erleiden, — von einander ab; allein keiner von beiden bestimmt sich, seiner Größe und Richtung nach, ganz und vollständig, so daß beide von einem noch unbestimmten Elemente abhängen, welches man in jedem einzelnen Falle der Anwendung noch näher zu bestimmen suchen muß *).

*) So kann man sich namentlich fragen, wie muß das unbestimmt gelassene Element genommen werden, damit der Gesammt-Druck an A ein Maximum werde, und wie? — damit der Gesammt-Druck bei B als ein Maximum erscheine. In den Anwendungen hat man nämlich sich vorzusehen, daß die Gesammt-Drucke getragen werden, und deshalb ist es gut, die

Auch dieses Problem konnte man direkt und ohne Zuziehung der Regeln des (§. 79.) lösen, indem man die Kräfte alle parallel mit sich in einem der Punkte der absolut festen Axe AB versammelte, durch diesen die Koordinaten-Werthe OX, OY, OZ legte und OZ mit AB zusammenfallen ließ, so daß die Koordinaten-Ebene XOY auf der absolut festen Axe senkrecht steht.

Bleibt dann die Bezeichnung genau wie im (§. 29.), so wird der Versammlungs-Punkt O von der in (A. NNr. 4. u. 5. daselbst.) gefundenen Versammlungs-Kraft P_0 in der daselbst bestimmten Richtung gedrückt, und diese Kraft bringt offenbar keine Bewegung hervor, weil sie der absolut festen Axe begegnet. Außerdem aber wirkt nun bloß noch das in (B. NNr. 9. u. 10. des §. 29.) gefundene mittlere Gegen-Paar. Dieses aber bringt nur dann, aber auch dann allemal keine Bewegung hervor, wenn die Ebene desselben durch die absolut feste Dreh-Axe geht (oder mit ihr parallel läuft), d. h. wenn der in (§. 29. B. Nr. 10.) gefundene Winkel ν_0 ein rechter ist, d. h. wenn $L_0 = 0$ ist; gerade so, wie solches auch kurz vorher gefunden worden ist.

„Die n Kräfte halten sich daher um die absolut feste Axe nur dann, „aber dann auch allemal im (bedingten) Gleichgewicht, wenn

$$L = 0, \text{ nämlich } \Sigma P \cdot (y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta) = 0$$

„ist, d. h. wenn die Summe der Momente der Projektionen aller Kräfte „P_1, P_2, P_3, ... P_n auf eine durch einen beliebigen Punkt O der absolut „festen Axe senkrecht auf dieselbe gelegte Ebene, in Bezug auf den Punkt „O, als Centrum der Momente genommen, der Null gleich ist;" oder kürzer gesagt, nach (§. 27. NNr. 3. 4.), „wenn die Summe der statischen „Momente aller Kräfte, um die absolut feste Axe AB als Momenten-Axe, „der Null gleich ist."

Das Moment des Gegen-Paares Q_0 selbst ist dann $= \sqrt{M^2 + N^2}$, und man kann das mittlere Gegen-Paar in seiner, durch die absolut feste Axe gehenden Ebene und in seiner gefundenen Richtung an zwei beliebigen Punkten der absolut festen Axe OZ, senkrecht (oder schief) auf diese Axe OZ anbringen, wenn man nur, im Falle der Arm des Moments $= d$ ist, jede der beiden gleichen parallelen und entgegengesetzten Kräfte $= \frac{Q_0}{d}$ nimmt, so daß das Gegen-Paar dasselbe Moment Q_0 hat.

Man kann auch O in A oder in B selbst nehmen, auch zuletzt die gleichen Kräfte des Gegen-Paares in den Punkten A und B senkrecht auf die Axe OZ anbringen, wo dann jede $= \frac{Q_0}{a}$ ist, wenn die Entfernung $AB = a$ gesetzt wird. Dadurch bekommt man die Drucke, welche die absolut festen Punkte A und B in den auf AB senkrechten Richtungen, im

---

größten Werthe zu wissen, welche in keinem vorkommenden Falle von den Gesammt-Drucken überschritten werden können.

Falle des Gleichgewichts, erleiden; während Z allemal die Kraft ist, mit welcher das feste System längs der Axe OZ fortgehen will.

Deshalb muß noch die Bedingung

$$Z = 0$$

hinzugefügt werden, wenn der feste Körper an der absolut festen Axe AB so lose sitzt, daß er sich nicht bloß drehen, sondern auch auf ihr hin- und herschieben kann, und nun das Gleichgewicht statt finden soll.

Anmerk. Die völlige Bestimmung der einzelnen Drucke Z_1 und Z_2, wie solche in den Anwendungen wirklich statt finden, hängt von der besondern Eigenthümlichkeit derjenigen Materie ab, welche den angegriffenen festen Körper, und auch den andern Körper bildet, an welchem die absolut festen Punkte (oder die absolut feste Gerade) gegeben sind. Jede Materie in der Natur giebt nämlich den Kräften etwas nach (d. h. sie entspricht nicht vollkommen dem Begriffe der Festigkeit) und kommt erst nachher in das Gleichgewicht. Dieses Nachgeben ist bei verschiedener Materie und selbst an verschiedenen Stellen eines und desselben Körpers verschieden. Wird nun diese specielle Beschaffenheit der Materie in jedem besonderen Falle der Physik oder Technik in Rechnung gebracht, so erhält man die fehlende Gleichung zur endlichen bestimmten Auswerthung aller vorhandenen Drucke, im Falle solche ihrer Natur nach völlig bestimmte Drucke sind.

Wir wollen nun einige einfache Beispiele hinzufügen.

1stes Beispiel. Eine Thüre CDEF (Fig. 27.), deren Gewicht P in ihrem Schwer-Punkte S wirkt, hängt in A und B in ihren Angeln, während die Gerade BA mit der Vertikalen ST den spitzen Winkel ψ bildet. Man soll die Drucke finden, welche A und B im Falle des Gleichgewichts erleiden.

Vergleicht man die jetzige Aufgabe mit der des vorstehenden (§. 82.), indem man die Ebene ABS vertikal voraussetzt und zur Ebene XOZ nimmt, ferner O mit A, und OZ mit AB zusammenfallen läßt (so daß OX senkrecht auf AB zu stehen kommt), indem man endlich der größeren Bequemlichkeit wegen statt der einzig wirkenden Kraft P die beiden Seiten-Kräfte $P_1 = P \cdot \cos\psi$ parallel mit BA, und $P_2 = P \cdot \sin\psi$ senkrecht auf BA anbringt, zuletzt SU senkrecht auf AB sich denkt und $SU = b$, $AB = a$ und $AU = c$ setzt, so hat man

$\alpha_1 = 90°$, $\beta_1 = 90°$, $\gamma_1 = 180°$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 90°$, $\gamma_2 = 90°$,
also

$$Y = 0, \quad L = 0, \quad N = 0; \quad X = P \cdot \sin\psi, \quad Z = -P \cdot \cos\psi$$

und

$$M = -P \cdot (c \cdot \sin\psi + b \cdot \cos\psi).$$

Die Gleichungen des (§. 82. Nr. 1. — 6.) geben daher jetzt

$$Y_2 = Y_1 = 0, \quad X_2 = -P \cdot \frac{b \cdot \cos\psi + c \cdot \sin\psi}{a} \quad \text{und} \quad X_1 = P \cdot \frac{b \cdot \cos\psi - (a-c) \sin\psi}{a},$$

so wie noch

$$Z_1 + Z_2 = P \cdot \cos\psi.$$

Da X_2 negativ ist, so geht der Gegen-Druck X_2 im entgegengesetzten Sinne der Axe OX, also der Druck selbst von B nach L. — Der Gegen-Druck X_1 wird der Null gleich, wenn

$$b \cdot \cos\psi - (a-c) \cdot \sin\psi = 0, \text{ oder } tg\,\psi = \frac{b}{a-c} = \frac{SU}{BU},$$

mithin wenn $\mathfrak{W}.\,\psi = \mathfrak{W}.\,SBU$ wird, d. h. wenn BS vertikal wird. Ist $\psi > SBU$, so wird X_1 negativ, also geht der Druck selbst, den A, im Gleichgewicht, senkrecht auf AB erleidet, ebenfalls von A nach K hin. Ist aber $\psi < SBU$, so wird X_1 positiv, und der feste Punkt A wird dann nicht in der Richtung AK, sondern in der entgegengesetzten Richtung KA senkrecht auf AB gedrückt. — Da ferner die Summe der Gegen-Drucke

$$Z_1 + Z_2 = P \cdot \cos\psi,$$

also positiv ist, so geht die Summe der Drucke, welche A und B wirklich erleiden, von B nach A hin. Je nachdem nun die eine oder die andere der Angeln A und B mehr oder weniger nachgiebt, bis das Gleichgewicht eintritt, wird sich dieser Druck $Z_1 + Z_2$ auf A und B verschieden vertheilen, und das wie? hängt also in jedem Einzelfalle von der besondern Materie ab, aus welcher Zarge, Angeln, Bänder und Thüre verfertigt sind. Diese Eidbestimmung der Drucke ist daher eine rein physikalische Frage, welche noch überdies in höchst seltenen Fällen eine genügende Beantwortung finden wird.

2tes Beispiel. Betrachten wir dieselbe Aufgabe in dem Falle, daß der Winkel $\psi = 0$ wird, daß also BA selbst vertikal zu stehen kommt, wie dies bei den Thüren gewöhnlich der Fall ist.

Es ist nun

$$X = 0, \quad Z = -P, \quad M = -b \cdot P;$$

$$X_2 = -\frac{b}{a} \cdot P, \quad X_1 = \frac{b}{a} \cdot P \quad \text{und} \quad Z_1 + Z_2 = P.$$

Steht also die Thüre auf, so wird sich der obere Haken herausziehen wollen; der untere aber wird das Bestreben haben, sich mehr in die Zarge hinein zu begeben; und beide Haken an A und B tragen in vertikaler Richtung gemeinschaftlich das ganze Gewicht der Thüre.

3tes Beispiel. Nehmen wir $\psi = 90°$, so daß AB horizontal und die Thüre selbst wie eine nach unten offen stehende Fall-Thüre zu liegen kommt, so wird jetzt

$$X = P, \quad Z = 0, \quad M = -c \cdot P,$$

also

$$X_2 = -\frac{c}{a} \cdot P, \quad X_1 = -\frac{a-c}{a} \cdot P \quad \text{und} \quad Z_1 + Z_2 = 0.$$

Da diese Werthe für X_2 und X_1 negativ werden, so gehen die vertikalen Drucke selbst im Sinne der Axe OX also von oben nach unten. Die Aufgabe ist dasmal völlig bestimmt, weil aus $Z_1 + Z_2 = 0$, dasmal $Z_1 = Z_2 = 0$ gefolgert werden kann, in so ferne kein Grund vorhanden ist, aus welchem durch das Gewicht P die Horizontale AB in ihrer Richtung eher zur Rechten als zur Linken zu gedrückt werden sollte.

Dieses letztere voraussetzend konnte man diese Aufgabe auch direkt behandeln, nämlich bloß in A und B die vertikalen Gegen-Drucke X_1 und X_2 angebracht sich denken, und nun die drei Kräfte P, X_1 und X_2 nach der Theorie der parallelen Kräfte (§. 38.) in das Gleichgewicht stellen. Dies giebt, wenn man A den Anfangs-Punkt der auf AB zu nehmenden Koordinaten seyn läßt,

$$P + X_1 + X_2 = 0 \quad \text{und} \quad P \cdot c = -X_2 \cdot a,$$

woraus

$$X_2 = -\frac{c}{a} \cdot P \quad \text{und} \quad X_1 = -\frac{a-c}{a} \cdot P.$$

So groß sind also auch die Drucke, nur daß letztere von oben nach unten wirken.

Die gegenwärtige Aufgabe lehrt zugleich, wie sich das Gewicht P eines horizontal liegenden Balkens auf zwei Unterlagen A und B vertheilt, sobald er mit horizontalen Flächen aufliegt *).

4tes Beispiel. Fassen wir das Beispiel (1.) noch einmal auf, lösen wir es aber direkt, d. h. ohne die Resultate des (§. 82.) zu Hilfe zu nehmen, sondern nur dieselbe Methode gebrauchend. — Man lege die Axen OX und OZ wieder durch den Punkt A (Fig. 28.), aber dasmal

*) Dächte man sich den Balken an seinen Enden mit Flächenstücken lose aufliegend, deren Normalen nicht vertikal sind, sondern nur mit dem Schwer-Punkte S des Balkens in einer und derselben Vertikal-Ebene liegen, so wäre nach (§. 78. Nr. 3.) nur dann Gleichgewicht möglich, wenn die Richtungen der wahren Gegen-Drucke $\sqrt{X_1^2 + Z_1^2}$ und $\sqrt{X_2^2 + Z_2^2}$ mit diesen Normalen zusammenfallen. Dadurch bekommt man noch zwei Gleichungen, und deshalb bestimmen sich dann nicht nur die Drucke alle ganz vollständig, sondern es bleibt sogar noch eine Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts.

Weil aber zu diesen Aufgaben im Praktischen noch der Begriff der Reibung hinzukommen muß, wenn sie vollständig gründlich behandelt seyn sollen, so mag hier diese Andeutung vorläufig genügen.

zur Abwechselung die eine Axe OX horizontal, die andere vertikal; man bringe in A und in B nach den jetzigen Axen die Gegen-Drucke X′, Z′ und X″, Z″ an, übrigens aber sey alles, wie im Beispiel (1.), namentlich SU = b, AU = c, AB = a, BU′ = a − c und W. BOZ = ψ. Das statische Moment von P in Bezug auf das Centrum O wird jetzt

$$(b\cdot\cos\psi + c\cdot\sin\psi)\cdot P,$$

wie man findet, wenn man den Arm OK desselben direkt berechnet, oder auch, wenn man die Kraft P in die beiden Seiten-Kräfte $P\cdot\sin\psi$ und $P\cdot\cos\psi$ zerlegt, und nun die Summe der statischen Momente dieser Seiten-Kräfte (in Bezug auf dasselbe Centrum O) nimmt, nach (§. 9.). Die statischen Momente von X″ und Z″ in Bezug auf dasselbe Centrum O sind dagegen bezüglich $a\cdot\cos\psi\cdot X''$ und $-a\cdot\sin\psi\cdot Z''$; und die drei Gleichungen des Gleichgewichts aller fünf Kräfte X′, X″, Z′, Z″ und P sind daher nach (§. 36.)

1) $X' + X'' = 0$, 2) $Z' + Z'' - P = 0$.

und 3) $(b\cdot\cos\psi + c\cdot\sin\psi)\cdot P - a\cdot\sin\psi\cdot Z'' + a\cdot\cos\psi\cdot X'' = 0$.

Aus diesen drei Gleichungen sind nun X′, X″, Z′, Z″ zu bestimmen.

Die (2.) lehrt uns wieder, „daß die Summe der vertikalen Drucke Z′ + Z″ dem Gewicht P gleich ist, läßt aber unbestimmt, wie viel davon jeder Unterstützungs-Punkt zu tragen hat.

Die Gleichung (1.) zeigt, daß die horizontalen Drucke X′ und X″ einander gleich, aber genau entgegengesetzt sind. Die (3.) endlich läßt sehen, daß diese horizontalen Drucke desto kleiner werden, je größer Z″ ist, d. h. je mehr der Punkt B von dem vertikalen Druck P über sich nimmt.

Will man aber die wirklichen Drucke haben, welche A und B im Falle des Gleichgewichts erleiden, so muß man noch die horizontalen Drucke mit den vertikalen Drucken an jedem dieser Punkte in eine einzige Kraft vereinigen. Diese beiden wirklichen Drucke können aber ihrer Größe und Richtung nach nur innerhalb bestimmter Grenzen liegend nachgewiesen werden, ohne daß sie sich mittelst der (3) Gleichungen (1. — 3.) ganz bestimmen ließen.

Es kann nämlich Z″ alle Werthe von 0 bis P annehmen, sobald wir die (physikalische oder technische) Aufgabe uns so denken, daß Z″ nicht negativ werden kann. Man kann daher

$$Z'' = P\cdot\cos\nu \quad \text{und} \quad Z' = P\cdot(1-\cos\nu)$$

setzen, wo ν unbestimmt gelassen wird. Setzt man dann X′ und Z′ in eine einzige P′ zusammen, so wird diese ihrer Größe und Richtung nach eine Funktion von ν werden, und man kann dann die Werthe von ν suchen, für welche P′ ein Maximum oder ein Minimum wird. Dann ist P′ und somit auch der andere Druck auf B seiner Größe und Richtung nach bestimmt. — Man kann aber auch X′ und Z″ zuerst in eine einzige Kraft P″ vereinigen, und dann den Werth von ν suchen, für welchen dieses P″ ein Maximum oder ein Minimum wird. — So erhält man die

Grenzen, welche in irgend einem wirklichen Falle der Anwendung in der Physik oder Technik, von den wirklich vorhandenen Drucken nicht überschritten werden können. — Aehnliche Fragen kann man sich in Bezug auf die Grenzen thun, innerhalb welcher die Richtungen der unbekannten Druck fallen, und sie werden in ähnlicher Weise beantwortet. — Nur muß man nie vergessen, daß man die Gegen-Drucke, welche in den Gleichgewichts-Gleichungen vorkommen, von den Drucken, welche die absolut festen Punkte A und B wirklich erleiden, gehörig unterscheidet. Letztere sind nämlich den ersteren gleich, aber genau entgegengesetzt.

5tes Beispiel. Denken wir uns den Fall, daß ein Balken AB (Fig. 29.) von der Länge a (übrigens als Linie gedacht) schief gegen den Horizont AC unter dem Winkel $BAC = w$ in B gegen eine vertikale Mauer BC, unten in A aber gegen die horizontale Unterlage AC, und ein vertikales Widerlager AD, durch sein Gewicht P drückt, übrigens aber im Gleichgewicht ist, so hat man dieselbe Aufgabe des vorstehenden Beispiels (4.), nur daß $w = 90 - \psi$, und, wenn man sich den Schwer-Punkt S des Balkens in AB selbst und zwar gerade in der Mitte von AB denkt, $b = 0$, $c = \frac{1}{2}a$ ist. Man erhält daher für dieses Beispiel direkt oder aus dem vorhergehenden Beispiel die drei Gleichungen des Gleichgewichts

1) $X' + X'' = 0$, 2) $Z' + Z'' - P = 0$,

und

3) $\frac{1}{2}P \cdot \cos w - Z'' \cdot \cos w + X'' \cdot \sin w = 0$.

Setzt man nun $Z'' = P \cdot \cos \nu$, so wird $Z' = P \cdot (1 - \cos \nu)$ und

$$X' = -X'' = \tfrac{1}{2}P \cdot \operatorname{cotg} w \cdot (1 - 2 \cdot \cos \nu),$$

wo ν noch ganz unbestimmt ist, und noch irgend einer, die specielle Natur betreffenden, oder irgend einer andern gegebenen Bedingung genügen kann.

Gewöhnlich nimmt man bei dieser speciellen Aufgabe an, daß, weil der Balken in B keine Unterlage hat, auch kein Druck nach unten statt finden könne; man setzt also gewöhnlich $Z'' = 0$, d. h. $\nu = 90°$, so daß dann $Z' = P$ und $X' = -X'' = \frac{1}{2}P \cdot \operatorname{cotg} w$ wird, welches für w unendlich klein, die horizontalen Seiten-Drucke unendlich groß, geben würde. In der Wirklichkeit wird sich aber der Balken bei B etwas in die Mauer eindrücken, und desto mehr, je kleiner der Winkel w wird; so daß er sich selbst in B eine Unterlage verschafft. In der Wirklichkeit wird man daher nicht unbedingt $Z'' = 0$ setzen dürfen.

§. 83.

Vom mathematischen Hebel.

Man denke sich wieder einen festen Körper um eine absolut feste Axe AB beweglich, aber alle n Kräfte P_1 P_2, ... P_n in einer und derselben auf AB senkrechten Ebene XOY, welche von AB in dem Punkte O geschnitten wird, so wird sich die Ebene

XOY und alles was an ihr fest hängt, um den Punkt O drehen lassen, und diese Vorrichtung nennt man gewöhnlich einen mathematischen Hebel, während der Punkt O der Unterstützungs-Punkt oder der Ruhe-Punkt (das Hypomochlium) des Hebels genannt wird.

Die Auflösung der Aufgabe des (§. 82.) giebt sogleich die Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts, und den Druck, welchen der Ruhe-Punkt O erleidet, seiner Größe und Richtung nach völlig bestimmt.

Sucht man aber die Bedingungen direkt auf, unter denen die n Kräfte am Hebel einander das (bedingte) Gleichgewicht halten, ohne die Regeln des (§. 79.) in Anwendung bringen zu wollen, so darf man nur den Ruhe-Punkt O des Hebels zum Versammlungs-Punkt aller Kräfte wählen. Sind dann die nach (§. 26. oder §. 35.) noch hinzutretenden n Gegen-Paare, welche dasmal alle in der Ebene XOY liegen, nicht im unbedingten Gleichgewicht, so kann nach (§. 36. NNr. 1. — 3.) der Hebel nicht im Gleichgewicht seyn. — Halten sich nun die n zum Versammlungs-Punkt O gehörigen Gegen-Paare einander im Gleichgewicht, d. h. ist, — unter der Voraussetzung, daß durch den Ruhe-Punkt O die Koordinaten-Axen OX und OY gelegt werden, und alles wie im (§. 36.) gedacht wird, —

$$L = 0, \text{ oder } \Sigma P(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta) = 0,$$

d. h. „ist die Summe der statischen Momente aller gegebenen „Kräfte in Bezug auf den Ruhe-Punkt O, als Centrum der „Momente genommen, der Null gleich," so ist der Hebel nothwendig im Gleichgewicht; denn es existirt dann allemal eine, im (§. 36. NNr. 3. u. 4.) gefundene mittlere Kraft P_0, welche gerade durch den absolut festen Punkt O hindurchgeht, also nichts leistet, sondern nur den Druck bestimmt, seiner Größe und Richtung nach, den der Ruhe-Punkt O im Falle des Gleichgewichts auszuhalten hat.

1stes Beispiel. Besteht der Hebel bloß aus einer festen geraden Linie A_1A_2 (Figg. 1. u. 2.), und ist A_0 sein Ruhe-Punkt; sind ferner die beiden einzigen wirkenden Kräfte P_1 und P_2 unter sich parallel und so, daß ihre Richtung mit der A_1A_2 den Winkel ψ bildet; wird endlich durch

A_0 die B_1B_2 auf die Richtungen der Kräfte senkrecht gezogen, so ist zum Gleichgewicht nothwendig und ausreichend

$$P_1 \cdot A_0B_1 = P_2 \cdot A_0B_2$$

d. h.
$$P_1 \cdot A_1A_0 \cdot \sin\psi = P_2 \cdot A_2A_0 \cdot \sin\psi;$$

oder
$$P_1 \cdot A_1A_0 = P_2 \cdot A_2A_0,$$

d. h.
$$P_1 : P_2 = A_2A_0 : A_1A_0.$$

Einen solchen Hebel nennt man aber in den Elementar-Anwendungen einen geradlinigen Hebel, und A_0A_1 so wie A_0A_2 heißen seine Arme (die Arme des Hebels); und zwar nennt man ihn im Falle der (Fig. 1.) einen zweiarmigen Hebel, im Falle der (Fig. 2.) dagegen einen einarmigen.

2tes Beispiel. Besteht der Hebel aus zweien unter sich festen geraden Linien AB und BC, die sich unter einem Winkel φ schneiden (Fig. 11.), sind P und Q zwei unter sich parallele Kräfte, welche den Hebel in A und in C angreifen; wird durch den Ruhe-Punkt B die Gerade DE senkrecht auf die Richtungen der Kräfte gedacht, und sind δ und ε die Winkel, welche die beiden geraden Theile (Arme) des Hebels mit diesen Geraden BD und BE bilden, so ist zum Gleichgewicht nothwendig und ausreichend

$$P \cdot BD = Q \cdot BE,$$

oder
$$P \cdot AB \cdot \cos\delta = Q \cdot BC \cdot \cos\varepsilon.$$

während δ, ε und φ durch die Gleichung

$$\delta + \varepsilon + \varphi = 180^\circ$$

von einander abhängen.

Einen solchen Hebel nennt man wohl auch zuweilen einen Winkel-Hebel, und AB, BC heißen dann seine Arme.

Nach diesen Annahmen ist also Arm des Hebels von dem Arm des Moments der Kraft wohl zu unterscheiden *).

---

*) Dreht man den geradlinigen Hebel im (Beispiel 1. Figg. 1. u. 2.) um A_0 etwas gegen die Kräfte, so daß der Winkel ψ etwas größer oder kleiner wird, so bleiben dieselben Kräfte P_1 und P_2, die vorher im Gleichgewicht waren, jetzt noch im Gleichgewicht, wenn nur die Angriffs-Punkte A_1 und A_2 am festen Hebel dieselben, und die Kräfte unter sich parallel bleiben.

Unter derselben Voraussetzung einer Drehung des festen Winkel-Hebels (Fig. 11.), wodurch, wenn alles übrige dasselbe bleibt, der Winkel δ um ein Stückchen γ größer, der Winkel ε dagegen um dasselbe Stückchen γ kleiner wird, — ist der Hebel in dieser neuen Lage nicht mehr im Gleichgewicht, wenn er vorher im Gleichgewicht gewesen ist, weil bei der letzten Annahme

$$P \cdot AB \cdot \cos\delta = Q \cdot BC \cdot \cos\varepsilon$$

ist, folglich im Allgemeinen nicht auch noch

Anmerk. Wir können diesen Paragraphen nicht verlassen, ohne darauf aufmerksam zu machen, daß eigentlich die Aufgabe des (§. 82.) die Theorie des allgemeinsten Hebels in sich schließt, und der hier im (§. 83.) betrachtete Hebel eigentlich nur ein spezieller Fall davon ist. — Dort aber, wie hier, hat man als einzige Bedingung des Gleichgewichts am Hebel erhalten, daß $L = 0$ seyn müsse, d. h.

„daß die Summe der statischen Momente der Projektionen „aller wirkenden Kräfte auf eine Ebene, welche senkrecht auf „der absolut festen Dreh-Axe gedacht wird, in Bezug auf „den Punkt O (als Centrum der Momente genommen), in „welchem diese Ebene von der Dreh-Axe geschnitten wird, „der Null gleich sey, oder kürzer nach (§. 27. Nr. 3. 4.), „daß die Summe der statischen Momente aller Kräfte um „die absolut feste Dreh-Axe als Momenten-Axe der Null „gleich sey,"

nur daß in dem Falle des (§. 83.) die Ebene der Kräfte, diese auf der festen Dreh-Axe senkrechte Ebene selbst ist, und deshalb die Projektionen der Kräfte von den Kräften selbst nicht verschieden sind.

§. 84.

Bestimmung des Druckes, den drei und mehr absolut feste Punkte erleiden.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, wo drei oder mehr absolut feste Punkte gegeben sind, mit welchen ein Körper, eine materielle Fläche, oder eine materielle Linie lose zusammenhängt.

I. Denken wir uns zuerst eine vertikale materielle feste ebene

---

$$P \cdot AB \cdot \cos(\delta + \gamma) = Q \cdot BC \cdot \cos(\varepsilon - \gamma)$$

seyn kann. Man kann sich daher jetzt fragen, um wieviel Kraft x die Kraft P vermehrt werden müßte, damit in dieser neuen Lage des Winkel-Hebels gegen die parallelen Kräfte, wiederum das Gleichgewicht vorhanden ist. Dies führt für die Bestimmung von x zu der Gleichung

$$(P + x) \cdot AB \cdot \cos(\delta + \gamma) = Q \cdot BC \cdot \cos(\varepsilon - \gamma).$$

Figur, deren Schwer-Punkt S und deren Gewicht P iſt, in den drei abſolut feſten Punkten A, B, C (Fig. 30.) unterſtützt. Wir nehmen AX horizontal und AY vertikal, ſetzen AB = b, AC = c, W. BAY = φ und W. CAY = ψ, und die Entfernung des Schwer-Punktes S von AY, = a, ſo müſſen zwiſchen den Gegen-Drucken x'', y'' (von A); x', y' (von B) und x, y (von C) nach (§. 36. und §. 80.) die drei Gleichungen ſtatt finden,

1) $x+x'+x''=0$; 2) $y+y'+y''=P$;

und

3) $P\cdot a+x'\cdot b\cdot\cos\varphi-y'\cdot b\cdot\sin\varphi+x\cdot c\cdot\cos\psi-y\cdot c\cdot\sin\psi=0$.

Aus dieſen drei Gleichungen beſtimmen ſich von den ſechs Unbekannten x, x', x'', y, y' und y'' wiederum nur drei in die drei übrigen, und die drei letztern bleiben unbeſtimmt.

Nimmt man $\varphi=\psi$, alſo A, B, C in einer und derſelben Geraden, ſo ändert ſich die dritte Gleichung ſo ab:

3') $P\cdot a+(x'\cdot b+x\cdot c)\cdot\cos\varphi-(y'\cdot b+y\cdot c)\cdot\sin\varphi=0$.

Und iſt $\varphi=\psi=90^0$, d. h. liegen die drei Unterſtützungs-Punkte in einer und derſelben horizontalen Geraden AX, ſo wird die Gleichung (3.) in folgende:

3'') $P\cdot a-y'\cdot b-y\cdot c=0$

übergehen, und obgleich jetzt kein Grund vorhanden iſt zu irgend einem horizontalen Druck, ſo daß man dasmal

$$x=x'=x''=0$$

annehmen kann, ſo bleibt von den drei unbekannten Gegen-Drucken y, y' und y'' doch noch einer unbeſtimmt, weil man nur die zwei Gleichungen

$$y+y'+y''=P \quad \text{und} \quad P\cdot a-y'\cdot b-y\cdot c=0$$

hat, zur Beſtimmung der drei Unbekannten y, y' und y''.

Nimmt man nun $y''=P\cdot\cos\nu$ an, wo ν ein unbeſtimmter Winkel iſt, aber zwiſchen 0 und 90^0 liegt, ſo findet ſich dazu

$$y=\frac{b-a-b\cdot\cos\nu}{b-c}\cdot P \quad \text{und} \quad y'=\frac{a-c+c\cdot\cos\nu}{b-c}\cdot P.$$

Man hat diese letztere Frage, wo z. B. ein Balken, dessen Gewicht P ist, an drei Stellen A, B, C horizontal unterstützt ist, und nun die Drucke auf die drei Unterlagen gefunden werden sollen, eben weil sich letztere nicht alle drei bestimmen, vielfältig behandelt. Man hat gesucht, sich noch eine dritte Gleichung zu verschaffen, mittelst irgend einer Hypothese. Betrachtet man nun die Sache rein mathematisch, so muß die noch zu machende Hypothese metaphysischer Natur seyn. Betrachtet man die Frage aber physikalisch, so ist klar, daß die Drucke in den einzelnen Unterstützungs-Punkten einzig und allein davon abhängen, wieviel oder wenig jeder dieser Unterstützungs-Punkte nachgiebt, wie wenig oder wieviel er also, innerhalb der Grenzen, welche die obigen Resultate nachweisen, tragen mag. Macht man nun über die Art der Nachgiebigkeit der Materie eine, den Beobachtungen und Erfahrungen entsprechende Hypothese, so bekommt man die fehlende Gleichung, die sich freilich nach Maaßgabe der verschiedenen Hypothesen jedesmal verschieden zeigt.

Je mehr Unterstützungs-Punkte der Balken hat, in horizontaler gerader Linie, desto mehrere der Drucke bleiben unbestimmt, in so ferne man immer nur zwei Gleichungen zu ihrer Bestimmung erhält, diese zwei Gleichungen also immer nur die Abhängigkeit angeben, welcher diese Drucke nothwendig, abgesehen von der speciellen Beschaffenheit der gerade hier gebrauchten Materie, unterworfen sind.

II. Denken wir uns einen materiellen festen Körper, dessen Gewicht P und dessen Schwer-Punkt gegeben ist, in drei absolut festen Punkten A, B, C unterstützt, welche beliebig in ihm und beliebig im Raume liegen, so kann man wieder die Fälle betrachten:

1) Die drei Unterstützungs-Punkte liegen in einer vertikalen Ebene, und entweder a) in gerader vertikaler, oder b) in gerader nicht vertikaler Linie, oder c) überhaupt nicht in gerader Linie;

2) Die drei Unterstützungs-Punkte liegen nicht in einer vertikalen Ebene.

In diesem letztern Falle nun muß man drei Koordinaten-Axen einführen, die man durch einen der Unterstützungs-Punkte und so legen kann, daß zwei derselben horizontal, die dritte aber vertikal läuft. Die Gegen-Drucke, ihrer Größe und ihrer Richtung nach unbekannt wie sie sind, denkt man sich nun nach den drei Axen zerlegt, so daß jeder durch drei unbekannte Kräfte nach den drei Axen wirkend, vorgestellt wird. Für die drei ab-

ſoluten feſten Punkte giebt dies neun unbekannte Kräfte; und zu ihrer Beſtimmung bekommt man die ſechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts des (§. 29. C.). Alſo bleiben drei der neun Unbekannten unbeſtimmt.

Denkt man ſich aber die drei Unterſtützungs-Punkte A, B, C in einer und derſelben Horizontal-Ebene, ſo iſt gar kein Grund zu einem horizontalen Druck vorhanden; daher kennt man nun ſchon die Richtungen der Gegen-Drucke bei A, B, C, da ſolche vertikal nach oben zu gehen; man hat daher lauter parallele Kräfte, bekommt nach (§. 38.) nur drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, und hat dafür auch nur die drei vertikalen Gegen-Drucke zu beſtimmen. Dasmal beſtimmen ſich alſo dieſe Drucke vollſtändig.

Um die Rechnung auszuführen, lege man durch A und C (Fig. 31.) die Axe AX, und die AY in derſelben Ebene ABC ſenkrecht auf AX. Iſt nun $AB = c$, $AC = b$ und $\measuredangle BAC = \alpha$, ſo hat man, wenn BD ſenkrecht auf AX gedacht wird, $AD = c \cdot \cos\alpha$, $BD = c \cdot \sin\alpha$. Sind nun die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes S durch p und q vorgeſtellt, ſo daß $p = AR$, $q = RS$ iſt, und nennt man z'', z', z die (vertikalen) Gegen-Drucke in A, B, C, ſo giebt die Theorie der parallelen Kräfte (§. 38.) folgende drei Gleichungen, nämlich:

1) $\quad z + z' + z'' - P = 0,$

2) $\quad z' \cdot c \cdot \sin\alpha - P \cdot q = 0,$

3) $\quad z' \cdot c \cdot \cos\alpha - P \cdot p + z \cdot b = 0;$

woraus

$$z' = P \cdot \frac{q}{c \cdot \sin\alpha}; \qquad z = P \cdot \frac{p \cdot \sin\alpha - q \cdot \cos\alpha}{b \cdot \sin\alpha}$$

und

$$z'' = P \cdot \frac{(b-p) \cdot c \cdot \sin\alpha - q \cdot (b - c \cdot \cos\alpha)}{bc \cdot \sin\alpha}$$

hervorgeht.

III. Iſt aber der feſte Körper an mehr als drei abſolut feſten Punkten zu bleiben gezwungen, ſo iſt das Problem, „die Gegen-Drucke dieſer abſolut feſten Punkte zu finden,“ noch unbeſtimmter, und ſelbſt in dem Falle noch unbeſtimmt, wo alle vier oder mehr Unterſtützungs-Punkte in einer und derſelben horizontalen Ebene liegen, ſo daß die Richtung der Gegen-Drucke als vertikal angenommen werden kann, folglich bekannt iſt. Man hat nämlich ſelbſt in dieſem letztern Falle doch im-

mer nur drei Gleichungen, welche für das Gleichgewicht paralleler Kräfte existiren, dagegen eben so viele Unbekannte als Unterstützungs-Punkte.

Alles was wir zur (I.) bemerken mußten, gilt daher auch hier. Hypotheſen über die Nachgiebigkeit der gebrauchten Materie, die nach Maaßgabe der verſchiedenen Materie ſelbſt wieder verſchieden anzunehmen ſeyn dürften, würden die fehlenden Gleichungen liefern, ſo daß die Drucke, welche die Unterlagen in jedem beſondern Falle wirklich erleiden, ſo beſtimmt wie ſie ſind, ſo beſtimmt auch durch die Rechnung gefunden werden.

Die Statik feſter Körper.

Zehntes Kapitel.

Allgemeines Geſetz des Gleichgewichts. (Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.)

§. 85.

Durch analoge Betrachtungen, wie die des vorſtehenden Kapitels, kann man die geſammte Statik aller feſten und loſen Syſteme unmittelbar auf die Statik des Atoms (I. Th. Mech. Kap. III.) zurückführen.

Im Zuſtande des Gleichgewichts irgend eines feſten oder loſen Syſtems wirken nämlich je zwei der angegriffenen Atome auf einander ein, vermöge des feſten oder loſen Zuſammenhanges, in welchem ſie zu einander ſtehen. Während aber der Atom A auf den Atom B eine ſolche Wirkung S ausübt in der Richtung AB (oder BA), übt zu gleicher Zeit der Atom B auf den Atom A in der genau entgegengeſetzten Richtung BA (oder AB) dieſelbe Wirkung S aus, weil ſonſt nicht Gleichgewicht ſeyn könnte. Nennen wir dieſe Wirkungen S die Spannung zwiſchen beiden (ſie ſtrebt zuweilen die Atome von einander zu entfernen, zuweilen aber auch ſolche einander näher zu bringen, je nachdem die auf die Atome einwirkenden Kräfte P_1, P_2, P_3, ꝛc. ꝛc. eine andere Größe und Richtung haben), — ſo iſt klar, daß, wenn wir an jedem angegriffenen Atom alle dieſe Spannungen

(als unbekannte Kräfte) anbringen, welche die Einwirkungen aller übrigen der angegriffenen Atome auf ihn vorstellen, dann dieser Atom für sich als ein freier Atom im Gleichgewicht seyn muß, so daß die drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts (I. Th. Mech. §§. 20. 25.) für ihn statt finden. Hat man n solche angegriffene Atome, so gilt solches für jeden derselben, und man erhält sonach 3n Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts.

Dies wollen wir nun in den nächsten Paragraphen ausführlicher und möglichst gründlich durchführen.

§. 86.

Es seyen drei Atome A, B, C (Fig. 32.) unter sich fest (z. B. Atome eines festen Körpers); solche werden bezüglich von den Kräften P_1, P_2, P_3 angegriffen, deren Richtungen in der Ebene ABC liegen und durch die Winkel α_1, α_2 und α_3 bestimmt sind, welche sie mit einer beliebigen Axe OX machen. Diese Winkel zählen wir hier von 0 bis 360°, in einer und derselben Richtung herumgehend (vergl. Note S. 151. Th. I.), und diese Art der Zählung mag sich auch noch über die folgenden Winkel erstrekken, durch welche die Lage vorkommender Kräfte bestimmt wird.

Halten sich nun diese drei Kräfte am festen System im Gleichgewicht, so ist jeder einzelne der drei Atome A, B und C auch für sich im Gleichgewicht; und auch umgekehrt. Die wirkenden Kräfte P_1, P_2, P_3 streben nun, im Gleichgewicht, die Entfernungen der Punkte A, B und C zu vergrößern oder zu verkleinern, und diese Bestrebungen, welche wir Spannung nannten, werden durch die von uns nicht beachteten Kräfte, welche die Festigkeit des Körpers bedingen, vernichtet. Nennen wir nun S_1, S_2 und S_3 die drei Spannungen, welche im Gleichgewicht bezüglich zwischen den festen Atomen A und B, B und C, endlich zwischen A und C statt finden, so wirkt z. B. S_1 an den Atomen A und B zugleich, an beiden aber in genau entgegengesetzten Richtungen. Dasselbe gilt von jeder andern der

Spannungen. Bringt man nun in jedem dieser Atome eine Kraft an, der an ihm wirkenden Spannung gleich, so muß jeder für sich im Gleichgewicht seyn.

Nennt man a_1, a_2, a_3 die Winkel, welche die drei an A, B, C, bezüglich angebrachten Kräfte S_1, S_2, S_3 mit der Axe OX machen, so hat man nach (I. Th. Mech. §. 21.) für das Gleichgewicht des Atoms A, weil S_3 an A mit der Axe OX den Winkel $180 - a_3$ macht,

1) $P_1 \cdot \cos\alpha_1 + S_1 \cdot \cos a_1 - S_3 \cdot \cos a_3 = 0,$

2) $P_1 \cdot \sin\alpha_1 + S_1 \cdot \sin a_1 - S_3 \cdot \sin a_3 = 0;$

für das Gleichgewicht des Atoms B dagegen ist

3) $P_2 \cdot \cos\alpha_2 - S_1 \cdot \cos a_1 + S_2 \cdot \cos a_2 = 0,$

4) $P_2 \cdot \sin\alpha_2 - S_1 \cdot \sin a_1 + S_2 \cdot \sin a_2 = 0;$

endlich hat man für das Gleichgewicht von C

5) $P_3 \cdot \cos\alpha_3 - S_2 \cdot \cos a_2 + S_3 \cdot \cos a_3 = 0,$

6) $P_3 \cdot \sin\alpha_3 - S_2 \cdot \sin a_2 + S_3 \cdot \sin a_3 = 0.$

Eliminirt man nun aus diesen sechs Gleichungen diese unbekannten Spannungen S_1, S_2 und S_3, so bleiben drei Gleichungen als Bedingungen des Gleichgewichts, von denen man die beiden

I. $P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 = 0$

und

II. $P_1 \cdot \sin\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2 + P_3 \cdot \sin\alpha_3 = 0$

sogleich erhält, sobald die Gleichungen (1. 3. 5.) und dann wieder die Gleichungen (2. 4. 6.) zu einander addirt werden. Die dritte Gleichung drückt die Bedingung aus, daß sich alle drei Kräfte in einem und demselben Punkte schneiden, oder alle drei mit einander parallel laufen, nämlich daß die Summe der statischen Momente der drei Kräfte P_1, P_2, P_3 der Null gleich ist, in Bezug auf ein beliebiges Centrum der Momente. Dies alles stimmt genau mit den Resultaten überein, welche wir (§§. 8. 9. u. 36.) für dieselbe Aufgabe erhalten haben.

Die jetzige Ansicht giebt aber auch noch die Wirkungen S_1, S_2, S_3, welche, im Falle des Gleichgewichts der Kräfte P_1, P_2, P_3, die angegriffenen Atome auf einander ausüben. — Sollte jedoch die Rechnung eine dieser Spannungen, z. B. S_1 negativ

geben, so wäre dies ein Beweis, daß man statt a_1 nicht den gehörigen Winkel gesetzt hätte, sondern den um 180° verminderten oder vermehrten Winkel hätte setzen sollen, d. h. daß die Spannung in der gerade entgegengesetzten Richtung wirkt, als die ist, in welcher man sie sich bei dem Ansatze der Gleichungen wirkend dachte.

§. 87.

Betrachten wir nun vier angegriffene Atome eines festen Körpers. —

I. Werden vier Atome A, B, C, D (Fig. 33.) eines festen Körpers angegriffen von bezüglich den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, welche mit einer Axe OX die Winkel α_1, α_2, α_3 und α_4 bilden; und liegen die vier Punkte A, B, C, D nebst den Richtungen der vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 in einer und derselben Ebene, so finden im Falle des Gleichgewichts zwischen je zweien dieser vier Atome Spannungen statt, welche wir durch $S_{a,b}$, $S_{a,c}$, $S_{a,d}$, $S_{b,c}$, $S_{b,d}$ und $S_{c,d}$ bezeichnen wollen. Nun kann aber die Kraft $S_{c,d}$, die an C in der Richtung CD wirkt, allemal in zwei andere zerlegt werden, nach den Richtungen CA und CB, während dieselbe Kraft $S_{c,d}$, welche an D in der Richtung DC wirkt, auch nach den beiden Richtungen DA und DB zerlegt werden kann. Dadurch vermehren oder vermindern sich die übrigen Spannungen, während dann diese sechste Spannung $S_{c,d}$ wegfällt, oder der Null gleich gedacht werden kann. Man hat aber nun, genau nach (§. 86.) verfahrend, für das Gleichgewicht jedes einzelnen der vier Atome, zwei Gleichungen, zusammen also acht Gleichungen. Eliminirt man daraus die fünf (geänderten) Spannungen, so bleiben die drei Gleichungen des Gleichgewichts, wie solche nach (§. 36.) für diesen Fall ebenfalls gefunden werden.

Man kann natürlich in die Rechnung auch alle sechs Spannungen einführen, ohne die eine davon auf die übrigen überzutragen, und man kann dann überzeugt seyn (vermöge der kurz vorher von uns angestellten Betrachtung), daß, wenn man aus

den acht Gleichungen irgend fünf der Spannungen eliminirt, dann die sechste jedesmal von selbst mit wegfällt, so daß dieselben drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts doch wieder hervorgehen.

Will man aber die Spannungen selbst berechnen, so hat man zu ihrer Bestimmung nur fünf Gleichungen, und es können daher nur fünf derselben in die sechste ausgedrückt werden, während diese sechste unbestimmt bleibt *).

II. Liegen die vier Punkte A, B, C, D nicht alle in einer und derselben Ebene, und sind die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 willkührlich und durch die Winkel α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 und α_4, β_4, γ_4 gegeben, welche sie mit drei Axen machen, so kann man die sechste Spannung $S_{c,d}$ nicht mehr nach den beiden andern Richtungen AC und BC, oder AD und BD, zerlegen, weil nun nicht mehr CD, AC und BC, eben so wenig als CD, AD und BD in einer und derselben Ebene liegen.

Dasmal bekommt man aber auch nach (I. Th. Mech. §. 20.) für das Gleichgewicht eines jeden Atoms drei Gleichungen, daher

*) Man kann sagen: wenn ein fester Körper, der von Kräften angegriffen ist, im Gleichgewicht sich befindet, so erleiden je zwei der angegriffenen Punkte eine ganz bestimmte Spannung; also sollten sich alle Spannungen genau bestimmen lassen, und es scheint daher nicht, wie oben, eine derselben und mit ihr alle, unbestimmt bleiben zu können. — Dies muß allerdings für jeden physikalischen Körper zugegeben werden. — Allein die Materie giebt etwas nach an jeder Stelle, und um wieviel? — das hängt von der specifischen Beschaffenheit der gerade hier angewandten bestimmten Materie ab. Die fehlende sechste Gleichung, um alle sechs Spannungen genau und völlig so zu bestimmen, wie sie in jedem Einzelfalle wirklich sind, ist daher keine allgemeine mehr, die für jede Materie dieselbe bliebe, und kann deshalb erst in jedem Einzelfalle aus der Eigenthümlichkeit dieser besonderen bestimmten Materie hergeholt werden. — Dies ist aber dann jedesmal eine specielle Aufgabe der Physik; aber auch daselbst wird man sehr schwer dahin gelangen (und dann gewiß nur in wenigen sehr abgesonderten Fällen), diese fehlenden Gleichungen sich zu verschaffen. Ja, jede spezielle Materie selbst ist dem Einflusse der Zeit unterworfen, und zeigt vielleicht heute noch Eigenschaften, die sie morgen entweder gar nicht mehr, oder doch nur noch in viel geringerem Grade besitzt.

her im Ganzen zwölf Gleichungen, welche alle sechs Spannungen enthalten. Eliminirt man letztere, so erhält man die sechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, welche im (§. 29. C.) für denselben Fall gefunden worden sind. — Auch bestimmen diese Gleichungen im Allgemeinen alle sechs Spannungen.

§. 88.

Betrachten wir nun den festen Körper an fünf seiner Punkte A, B, C, D, E bezüglich von den fünf Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 angegriffen, so finden zwischen je zweien dieser Atome A, B, C, D, E im Falle des Gleichgewichts Spannungen statt, deren Gesammt-Anzahl also $\frac{5 \cdot 4}{2}$ oder 10 ist.

I. Liegen nun alle fünf Punkte nebst den Richtungen der angreifenden Kräfte P_1, ... P_5, in einer und derselben Ebene, so kann man die Spannung $S_{a,e}$ an E (Fig. 34.) in zwei andere Kräfte zerlegen, welche in den Richtungen EA und EB wirken, welche daher die Spannungen $S_{a,e}$ und $S_{b,e}$ um so viel vermehren oder vermindern. Desgleichen kann dieselbe an D wirkende Spannung $S_{a,d}$ nach den Richtungen DA und DB zerlegt werden, wodurch sich die Spannungen $S_{a,d}$ und $S_{b,d}$ um so viel vermehren oder vermindern. — Ganz dasselbe kann von den Spannungen $S_{c,e}$ und $S_{c,d}$ gesagt werden. — Man kann daher diese drei Spannungen $S_{c,d}$, $S_{c,e}$, $S_{d,e}$ weglassen, und dafür die übrigen sieben Spannungen alle um so viel, als auf sie kommt, verändert sich denken, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird. Es bleiben also dann 1) die Spannung $S_{a,b}$ zwischen A und B, und 2) für jeden dritten Punkt bleiben zwei Spannungen, davon eine zwischen ihm und A und eine zwischen ihm und B wirkt.

Man hat nun für jeden der fünf Atome zwei, also im Ganzen zehn Gleichungen des Gleichgewichts, aus welchen die sieben letztern Spannungen eliminirt werden, um dieselben drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts zwischen den gegebenen Kräften zu erhalten, welche auch nach (§. 36.) erhalten worden sind. — Läßt man alle zehn Spannungen in den Gleichungen,

so fallen drei derselben von selber mit fort, sobald man die übrigen sieben Spannungen eliminirt, und man erhält wiederum die drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts des (§. 36.). Dieselben zehn Gleichungen liefern dann sieben dieser Spannungen in die drei übrigen ausgedrückt, und alle Spannungen erwarten ihre endlichen genauen und vollkommenen Bestimmungen in jedem gegebenen Einzel-Falle von den Eigenschaften der speciellen Materie, welche dasmal den festen Körper bildet.

II. Liegen die fünf Punkte A, B, C, D, E, und die Richtungen der sie angreifenden Kräfte beliebig im Raume, so kann man jede Spannung, z. B. $S_{d,e}$, welche an jedem vierten Punkt z. B. D und nicht in einer der drei Richtungen DA, DB oder DC wirkt, mittelst des Satzes vom Kräften-Parallelepipedum (I. Th. Mech. §. 17. b.) in drei andere Kräfte nach diesen letztgenannten Richtungen zerlegen, so daß man außer den drei (veränderten) Spannungen $S_{a,b}$, $S_{a,c}$, $S_{b,c}$ für jeden vierten Punkt z. B. D nur drei (veränderte) Spannungen $S_{a,d}$, $S_{b,d}$, $S_{c,d}$ behält, indem man alle übrigen an D etwa noch wirkenden Spannungen, also namentlich die Spannung $S_{d,e}$, weglässt oder $=0$ sich denkt. Dies giebt für unsern Fall neun Spannungen, und nun die zehnte darf wegbleiben.

Auf der andern Seite hat man aber für das Gleichgewicht eines jeden einzelnen der fünf Atome, fünf mal drei, d. h. fünfzehn Gleichungen; daraus die neun Spannungen eliminirt, und man hat sechs Bedingungs-Gleichungen für das Gleichgewicht, dieselben welche der (§. 29. C.) für denselben Fall liefert. Außerdem bestimmen sich hier noch, wenn man alle zehn Spannungen in die fünfzehn Gleichungen aufnimmt, neun derselben in die zehnte.

§. 89.

Denken wir uns nun n Atome eines festen Körpers bezüglich von n Kräften $P_1, P_2, \cdots P_n$ angegriffen, so hat man, im Gleichgewicht, zwischen je zweien dieser n Atome eine Spannung, also im Ganzen $\frac{n(n-1)}{2}$ solche Spannungen. Weil aber, wenn

man drei Atome A, B, C und die drei Spannungen zwischen je zweien derselben zuerst betrachtet, für jeden folgenden der angegriffenen Atome nur drei Spannungen, nämlich die drei zwischen ihm und A, zwischen ihm und B, endlich zwischen ihm und C zu beachten sind, in so ferne sich jede vierte nach diesen drei Richtungen zerlegen läßt, so hat man in der That nur eine Anzahl $3(n-2)$ von einander unabhängiger Spannungen. — Für das Gleichgewicht eines jeden einzelnen der n Atome hat man 3n Gleichungen. — Eliminirt man daher die $3(n-2)$ Spannungen, so fallen die übrigen Spannungen, deren Anzahl $= \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ ist, von selbst mit fort, und man erhält gerade wieder sechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, wie im (§. 29. C.).

Lägen die Atome alle in einer und derselben Ebene, so würden ganz analoge Betrachtungen auch für diesen Fall die Gleichgewichts-Gleichungen liefern.

§. 90.

Das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten für feste Körper.

I. Denken wir uns wieder einen festen Körper in n seiner Atome A_1, A_2, A_3, ... A_n bezüglich von den n Kräften P_1, P_2, P_3, ... P_n angegriffen; denken wir uns, daß das Gleichgewicht hergestellt sey, daß jedoch irgend eine äußere Veranlassung das so angegriffene System irgend wie, aber unendlich wenig verrücke, so daß jeder angegriffene Atom z. B. A_r einen unendlich-kleinen Weg beschreibt, folglich in Bezug auf die Richtung einer jeden auf ihn wirkenden Kraft eine *virtuelle Geschwindigkeit* hat *), so ist, im Gleichgewicht, auch hier allemal (wie im §. 27. Th. I. Mech.)

*) So nennt man nach (§. 27. Th. I. Mech.) die Projektion dieses unendlich-kleinen Weges des angegriffenen Atoms auf die Richtung der Kraft, positiv oder negativ genommen, je nachdem diese Projektion in die Richtung der Kraft selbst, oder auf ihre rückwärts gedachte Verlängerung fällt.

„die Summe der Produkte aus jeder Kraft multiplizirt mit „der ihr zugehörigen virtuellen Geſchwindigkeit (d. h. die „Summe der Momente der virtuellen Geſchwindigkeiten) der Null gleich.

Dieſen Satz nennt man das Geſetz (Princip) der virtuellen Geſchwindigkeiten für feſte Syſteme.

Man erhält dieſes Reſultat unmittelbar, wenn man alle $\frac{n(n-1)}{2}$ Spannungen, wie ſolche zwiſchen je zwei der angegriffenen Atome ſtatt finden, in Rechnung bringt, — wegen des Gleichgewichts eines jeden einzelnen der angegriffenen Atome die Gleichung des Gleichgewichts nach den (§§. 27. — 29. I. Th. Mech.) hinſchreibt, und alle dieſe Gleichungen addirt. — Bei dem Addiren fallen nämlich die Spannungen ganz fort, weil jede, z. B. die Spannung $S_{m,r}$ zwiſchen den Atomen A_m und A_r, zweimal vorkommt, einmal in der Gleichgewichts-Gleichung für den Atom A_m, und dann wieder in der Gleichgewichts-Gleichung für den Atom A_r; das erſte mal erſcheint ſie multiplizirt mit der virtuellen Geſchwindigkeit des Atoms A_m, in Bezug auf die Richtung der Spannung $S_{m,r}$ gedacht — das andere mal iſt ſie multiplizirt mit der virtuellen Geſchwindigkeit des Atoms A_r, in Bezug auf die Richtung derſelben Spannung $S_{m,r}$, aber an A_r. Dieſe beiden virtuellen Geſchwindigkeiten ſind aber, weil die Entfernung der Atome A_m und A_r, wegen der Feſtigkeit des Körpers auch nach der fingirten Bewegung noch genau dieſelbe iſt, einander genau gleich, aber mit entgegengeſetztem (+) oder (—) Zeichen verſehen.

Man kann dies letztere ganz ſo, wie ſolches im (§. 28. I. Th. Mech.) gezeigt iſt, durch Rechnung nachweiſen. Die Spannung $S_{r,m}$ zwiſchen den beiden Atomen A_r und A_m wirkt doppelt, einmal an dem Punkte A_r, und dann noch einmal an dem Punkte A_m. Sind nun x_r, y_r, z_r und x_m, y_m, z_m die Koordinaten-Werthe des Punktes A_r und A_m, und ſetzt man

$$1) \qquad \sqrt{(x_r-x_m)^2+(y_r-y_m)^2+(z_r-z_m)^2} = E_{r,m},$$

ſo drückt $E_{r,m}$ die Entfernung zwiſchen A_r und A_m aus, welche wegen der Feſtigkeit dieſer Atome unter ſich, auch nach der fingirten Bewegung des Syſtems genau dieſelbe bleibt.

Sind alſo x_m+dx_m, y_m+dy_m, z_m+dz_m die Koordinaten-Werthe des Punktes A_m in ſeiner neuen Lage, ſind ferner x_r+dx_r, y_r+dy_r, z_r+dz_r die Koordinaten-Werthe des Punktes A_r in ſeiner neuen Lage, und ſubſtituirt man dieſe neuen Koordinaten-Werthe ſtatt der alten in den Wurzel-Ausdruck für $E_{r,m}$, ſo muß ſolcher denſelben Werth behalten:

sein (sonst unendlich-kleiner) Zuwachs (Differenzial) muß also der Null gleich seyn. Dieses Differenzial besteht aber aus zwei Theilen, von denen der eine durch $d_r(E_{r,m})$ bezeichnet seyn mag und aus der Veränderung der drei Koordinaten-Werthe x_r, y_r und z_r allein herrührt, während der andere Theil durch $d_m(E_{r,m})$ bezeichnet werden kann, und aus der Veränderung der Koordinaten-Werthe x_m, y_m, z_m allein hervorgeht. Also hat man

$$d_r(E_{r,m}) + d_m(E_{r,m}) = 0, \quad \text{oder} \quad d_r(E_{r,m}) = -d_m(E_{r,m}),$$

während nach (§. 28. I. Th. Mech.) der Theil $d_r(E_{r,m})$ die virtuelle Geschwindigkeit von A_r in Bezug auf die Spannung $S_{r,m}$ an A_r, dagegen der andere Theil $d_r(E_{r,m})$ die virtuelle Geschwindigkeit von A_m in Bezug auf die Spannung $S_{r,m}$ an A_m ist. — Die Summe der beiden aus derselben Spannung $S_{r,m}$ herrührenden Momente der virtuellen Geschwindigkeiten ist daher der Null gleich.

II. Denkt man sich wieder, wie im (§. 28. I. Th. Mech.), in der Richtung einer jeden der wirkenden Kräfte P einen beliebigen Punkt (a, b, c), so ist seine Entfernung von dem Angriffs-Punkte A, dessen Koordinaten-Werthe x, y, z seyn mögen,

$$2) \quad = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}, \quad \text{oder} \quad = p,$$

wenn wir unter p diesen Wurzel-Ausdruck verstehen; und dann ist das zu dx, dy, dz gehörige Differenzial dp die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes A in Bezug auf die Richtung der Kraft P (alles genau nach §. 28. I. Th. Mech.), und das in (I.) vorliegende Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten läßt sich nun dahin ausdrücken, daß im Falle des Gleichgewichts

$$(\odot) \cdots \quad \Sigma(P \cdot dp) = 0, \text{ d. h. } P_1 \cdot dp_1 + P_2 \cdot dp_2 + \cdots + P_n \cdot dp_n = 0$$

seyn muß, welche unendlich-kleine Aenderung in der Lage der Atome nur immer gedacht werden mag, wenn nur die Bedingung der Festigkeit, d. h. der unveränderten Abstände der angegriffenen Atome von einander vorausgesetzt wird.

III. Es versteht sich von selbst, daß man nun demselben Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten auch die Form geben kann, welche im (§. 29. I. Th. Mech.) für den einfachsten Fall demselben gegeben worden ist.

Denkt man sich nämlich wieder alles wie vorher, namentlich die Entfernung $E_{r,m}$ zwischen den Atomen A_r und A_m und die Entfernung p des in der Richtung der Kraft P beliebig gedach-

ten Punktes von dem Angriffs-Punkte A dieſer Kraft genau durch dieſelben Wurzel-Ausdrücke gegeben, wie in den Nummern (1. u. 2.); nimmt man aber an, daß das Syſtem nicht unendlich wenig, ſondern beliebig viel aus ſeiner Lage gebracht werde, daß namentlich die Koordinaten-Werthe x, y, z eines jeden Angriffs-Punktes A in die neuen Koordinaten-Werthe $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ übergegangen ſind, ſo beſteht auch $\delta(E_{r,m})$ aus zwei Theilen $\delta_r(E_{r,m})$ und $\delta_m(E_{r,m})$, welche bezüglich als Koeffizienten von $\varkappa$ hervorgehen, wenn man in $E_{r,m}$ bloß $(x_r)_\varkappa$, $(y_r)_\varkappa$, $(z_r)_\varkappa$ allein ſtatt x_r, y_r, z_r, oder bloß $(x_m)_\varkappa$, $(y_m)_\varkappa$, $(z_m)_\varkappa$ allein ſtatt x_m, y_m, z_m ſetzt; während unter $\delta(E_{r,m})$ der Koeffizient von $\varkappa$ verſtanden wird, wenn in $E_{r,m}$ beide Veränderungen zugleich hervorgehen, ſo daß man nach den Sätzen der Variations-Rechnung (I. Th. Analyſ. §§. 54. 55.), oder nach dem Maclaurin'ſchen Lehrſatze ebenfalls

$$\delta(E_{r,m}) = \delta_r(E_{r,m}) + \delta_m(E_{r,m})$$

hat. Weil aber bei der totalen Veränderung in $E_{r,m}$ dieſe Entfernung denſelben Werth behalten ſoll, ſo iſt wieder $\delta(E_{r,m}) = 0$, d. h. $\delta_r(E_{r,m}) + \delta_m(E_{r,m}) = 0$. Da nun im Falle des Gleichgewichts auch jeder einzelne Atom im Gleichgewicht iſt, und deshalb, ſobald man alle Spannungen in Rechnung bringt, für jeden einzelnen Atom z. B. A_r nach (§. 29. I. Th. Mech.) die Gleichung

3) $P \cdot \delta p + S_{r,1} \cdot \delta_r(E_{r,1}) + S_{r,2} \cdot \delta_r(E_{r,2}) + \cdots + S_{r,n} \cdot \delta_r(E_{r,n}) = 0$

ſtatt findet (in welcher jedoch nicht $E_{r,r}$ erſcheinen kann), ſo folgt wiederum, daß wenn man dieſe n Gleichungen, welche für alle n Atome ſich ergeben, addirt, alle Spannungen ſich von ſelbſt wegheben, und bloß noch bleibt die Gleichung

(C)··· $\Sigma(P \cdot \delta p) = 0$, oder $P_1 \cdot \delta p_1 + P_2 \cdot \delta p_2 + \cdots + P_n \cdot \delta p_n = 0$.

Multiplizirt man aber dieſe Gleichung mit $\varkappa$ und denkt man ſich noch $\varkappa$ unendlich-klein, ſo geht dieſe Gleichung ſogleich wieder in die (II. ⊙.) über.

IV. Endlich gilt daſſelbe Geſetz in jeder der drei Formen (I. — III.) auch dann noch, wenn einer oder mehrere dieſer un-

ter sich festen Atome auf gegebenen festen Flächen oder Linien zu bleiben gezwungen sind, so daß diese Flächen oder Linien zum Gleichgewicht beitragen, wenn man nur voraussetzt, daß die veränderte Lage, in welche man das System gebracht sich denkt, allemal diesen Bedingungen gemäß genommen wird.

Denn es gelten unter dieser Voraussetzung die n Gleichungen (3.) noch immer; also ergiebt sich auch noch immer die Gleichung (C), wenn nur die angegriffenen Atome unter sich fest sind. Aus der Gleichung (C) geht aber die Gleichung (⊙), und daraus wieder die Form in (I.) hervor.

§. 91.

Das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten auf beliebige lose Systeme ausgedehnt.

Dieses allgemeine Gesetz der Statik gilt auch für alle losen Systeme, sobald man nur die neue Lage, in welche das im Gleichgewicht sich befindende lose System (durch äußere Veranlassung) versetzt gedacht wird, so nimmt, daß jeder Atom in der Fläche oder Linie noch liegt, welche der vorgeschriebene Zusammenhang des losen Systems für die Lage desselben bestimmt.

I. Um dies zu beweisen, betrachte man zuerst das einfachste aller losen Systeme, nämlich drei unter sich feste Atome A_1, A_2 und A_3, und einen losen Atom A_4, der vermöge seines losen Zusammenhanges mit A_1, A_2 und A_3 seine Lage gegen die drei letzteren zwar ändern kann, dagegen doch auf einer gegebenen Fläche oder Linie zu bleiben gezwungen ist.

Im Gleichgewicht wird nun der Atom A_4 gegen die Fläche oder Linie, in welcher er zu bleiben gezwungen ist, normal angedrückt (vgl. I. Th. Mech. §. 22.). Denkt man sich daher zu den wirkenden Kräften an A_4 noch einen eben so großen normalen Gegendruck R hinzugefügt, so bleibt das Gleichgewicht ungestört, 1) wenn man sich statt des losen Zusammenhanges, den Atom A_4 mit den übrigen Atomen A_1, A_2, A_3 fest verbunden, und auch 2) wenn man jeden Atom ganz frei, dagegen zu gleicher Zeit von den im Gleichgewicht zwischen je zweien Atomen statt findenden Spannungen ergriffen denkt. — Wird

nun A_1 mit A_1, A_2, A_3 fest gedacht, so hat man, wenn genau die Bezeichnung der (§§. 28. und 29. I. Th. Mech.) vorausgesetzt wird,

$$\text{a)}\quad P_1 \cdot dp_1 + P_2 \cdot dp_2 + P_3 \cdot dp_3 + P_4 \cdot dp_4 + R \cdot dr = 0,$$

oder auch

$$\text{b)}\quad P_1 \cdot \delta p_1 + P_2 \cdot \delta p_2 + P_3 \cdot \delta p_3 + P_4 \cdot \delta p_4 + R \cdot \delta r = 0,$$

während, unter der Voraussetzung, daß die neue Lage von A_4 in derselben Fläche oder Linie gedacht wird, in welcher A_4 zu bleiben gezwungen ist, in den (§§. 28. u. 29. I. Th. Mech.) bereits sehr strenge erwiesen sich findet, daß

$$dr = 0 \quad \text{und auch} \quad \delta r = 0$$

ist, so daß die Glieder $R \cdot dr$ und $R \cdot \delta r$ aus den Gleichungen (a. und b.) wieder herausfallen, und folglich das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten auch in diesem Falle aufrecht bleibt.

II. Wir ziehen aber für diesen einfachsten Fall noch die wichtige Folgerung,

„daß zwar nicht, wie wenn zwei Atome unter sich fest sind, „die Summe je zweier Momente der virtuellen Geschwindig„keiten einer und derselben Spannung (z. B. $S_{1,4}$ an A_1 und „derselben Spannung $S_{1,4}$ an A_4) der Null gleich ist, daß „aber dagegen die Summe aller sechs Momente der virtuel„len Geschwindigkeiten, aus den drei Spannungen $S_{1,4}$, $S_{2,4}$ „und $S_{3,4}$ (jede Spannung als Kraft zweimal gedacht) der „Null gleich seyn muß.

Denn da jeder Atom, wenn man alle Spannungen und den Gegendruck R in Rechnung bringt, für sich im Gleichgewicht ist, so ist für jeden Atom die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich; also ist auch, wenn man diese vier Gleichungen addirt, die Summe aller Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich. Wegen der Gleichung (a.) bleibt daher auch noch die Summe der zwölf Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der sechs Spannungen $S_{1,2}$, $S_{1,3}$, $S_{2,3}$, $S_{1,4}$, $S_{2,4}$, $S_{3,4}$ der Null gleich. Weil aber die erstern sechs Momente wegen der konstanten Entfernungen der drei Atome A_1, A_2 und A_3 von einander, paarweise der Null gleich sind; so bleibt die Summe der sechs letztern Momente ebenfalls der Null gleich.

III. Denken wir uns nun den allgemeinsten Fall, nämlich

beliebig viele unter sich feste Atome, und noch beliebig viele mit diesen lose zusammenhängende Atome, von Kräften angegriffen, und im Gleichgewicht. — Im Gleichgewicht findet zwischen je zweien dieser Atome eine Spannung statt; allein wir können, den (§§. 87. — 89.) zu Folge, alle Spannungen, welche irgend einen Atom A_r afficiren, auf drei zurückführen, nämlich auf die drei Spannungen $S_{1,r}$, $S_{2,r}$ und $S_{3,r}$ zwischen dem Atom A_r und dreien der unter sich festen Atome, die wir durch A_1, A_2 und A_3 bezeichnen können. Durch diese Zurückführung werden dann natürlich auch die Spannungen $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ und $S_{2,3}$ zwischen je zweien dieser drei letztgenannten Atome, der Zerlegung der Kräfte gemäß, abgeändert, wie in den angeführten (§§. 87. — 89.) zu sehen ist; — das Gleichgewicht bleibt aber unverändert.

Mögen nun noch so viel lose Atome A_4, A_5 ꝛc. ꝛc. und noch so viele feste Atome A_μ, A_ν ꝛc. ꝛc. vorhanden seyn, so kann man sich doch alle übrigen Spannungen der Null gleich denken, sobald man sich die Spannungen zwischen jedem einzelnen der Atome A_4, A_5, ... A_μ, A_ν ꝛc. und jedem der drei festen Atome A_1, A_2, A_3, so wie noch die Spannungen zwischen je zweien der drei letztern Atome selbst, der Zerlegung der Kräfte angemessen verändert sich denkt; ohne daß das Gleichgewicht dadurch gestört würde.

Da nun jeder einzelne lose Atom mit den drei festen Atomen A_1, A_2, A_3 für sich im Gleichgewicht ist, so ist nach (I.) für jeden der losen Atome die Summe der sechs Momente der virtuellen Geschwindigkeiten aus den drei Spannungen, die ihn an A_1, A_2 und A_3 ketten, der Null gleich; während für jeden der festen Atome die Summe je zweier Momente der virtuellen Geschwindigkeiten einer jeden einzelnen Spannung zwischen ihm und A_1, oder A_2, oder A_3, für sich der Null gleich ist; und da endlich auch die Summe je zweier der Momente der virtuellen Geschwindigkeit einer jeden der drei Spannungen $S_{1,2}$, $S_{1,3}$ und $S_{2,3}$ (wie sie unter der jetzigen Voraussetzung zwischen je zweien der drei festen Atome A_1, A_2 und A_3 statt finden) ebenfalls der

Null gleich seyn muß, wegen der Festigkeit, d. h. der unabänderlichen Entfernung je zweier dieser unter sich festen Atome von einander, so folgt —

daß wenn man für jeden Atom die Spannungen und die normalen Gegendrucke in Rechnung bringt, — für jeden Atom, wegen seines unter dieser Voraussetzung unabhängigen Gleichgewichts, die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich setzt, und alle diese Gleichungen addirt, — dann alle Spannungen sich von selber wegheben müssen, und daher nun auch die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte P_1, P_2, P_3, ... der Null gleich sich ergeben muß.

Dadurch ist aber das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten ganz allgemein für jeden denkbaren Fall erwiesen *).

IV. Dabei ist leicht einzusehen, daß, wenn wir auch im gegenwärtigen Beweise zuletzt immer nur von den virtuellen Geschwindigkeiten, im engsten Sinne, also von den, auf die Richtungen der Kräfte projicirten unendlich-kleinen Wegen der angegriffenen Atome gesprochen haben, — welche durch Differenzialien dp ꝛc. ꝛc. ausgedrückt werden, — doch auch die andere Form der Gleichgewichts-Gleichung, in welcher statt der unendlich-kleinen dp, ꝛc. ꝛc. die endlichen Funktionen δp, ꝛc. ꝛc. zu stehen kommen, mittelst derselben oder doch ganz analogen Schlüssen ebenfalls hergestellt werden kann.

Anmerk. 1. Dieses Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten ist für Praktiker bei der Bestimmung des Gleichgewichts an Maschinen, von großer Bequemlichkeit. Man setzt die Maschine unendlich wenig in Bewegung; man projicirt die unendlich-kleinen Wege der Angriffs-Punkte der wirkenden Kräfte, auf die Richtungen dieser letztern; man mißt diese Projektionen oder berechnet solche, und setzt die Summe der Produkte einer jeden der wirkenden Kräfte mit diesen virtuellen Geschwindigkeiten der Null

*) Dieser Beweis erstrekkt sich offenbar auch auf flüssige Körper aller Art (Wasser, Luft ꝛc. ꝛc.), wenn man nur die Beschränkung beobachtet, welche im Texte festgestellt werden mußte.

gleich. Gewöhnlich wirken an einer Maschine zwei Kräfte, von denen die eine die Last, die andere vorzugsweise die Kraft genannt wird. Glaubt man nun die übrigen Kräfte, welche etwa noch wirken, außer Acht lassen zu können, so wird die so eben beschriebene Anwendung noch leichter, und man erhält sogleich die Kraft in die Last ausgedrückt, für den vorausgesetzten Fall des Gleichgewichts.

In denjenigen Vorrichtungen endlich, bei denen nicht bloß diese letztere Voraussetzung gemacht wird, sondern bei denen sich noch überdies die Projektionen der unendlich-kleinen Wege, wie diese unendlich-kleinen Wege selbst verhalten, und letztere wieder, wie endliche Wege, welche die Angriffs-Punkte der Last und Kraft an der Maschine, wenn man letztere in Bewegung setzt, beschreiben, — kann die aus dem Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgehende Gleichgewichts-Gleichung so umgeformt werden, „daß sich Kraft und Last zu einander verhalten, wie „umgekehrt die Wege ihrer Angriffs-Punkte," und diese sehr specielle Wahrheit ist unter dem Namen des Cartesischen Grundsatzes bei den einfachsten Maschinen lange in Anwendung gebracht worden.

Anmerk. 2. Lagrange hat es in seiner trefflichen Mécanique analytique unternommen, alle speciellen Wahrheiten der Statik (und Dynamik) aus diesem, von ihm als Grundsatz angenommenen Princip der virtuellen Geschwindigkeiten mittelst eines eben so einfachen als völlig gleichförmigen Verfahrens abzuleiten. In so ferne die Resultate mit allem übereinstimmen, was man auf anderen Wegen nur immer erhalten hat, da solche ferner in den Anwendungen auf Physik und Astronomie ebenfalls nirgends Widersprüche erfahren, so kann diese großartige Arbeit auch noch in der Hinsicht empfohlen werden, als sie in ihrer Gesammtheit ein fortlaufender indirekter Beweis des vorausgesetzten Grundsatzes genannt werden kann.

Auch wir wollen jetzt, ehe wir weiter gehen, wenigstens für den Fall eines von Kräften angegriffenen festen Körpers, noch nachweisen, wie die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts,

welche wir im (§. 29. C.) oder sonst schon für diesen Fall bereits erhalten haben, auch aus dem Princip (Gesetz) der virtuellen Geschwindigkeiten" hervorgehen.

§. 92.

Zuvörderst ist klar, daß man dem angegriffenen Systeme eben so viele verschiedene Bewegungen andichten muß, als man Gleichungen aus dem „Princip" hervorgehen zu sehen wünscht. Dann ist ferner klar, daß man sich, um z. B. die sechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts eines freien festen Systems zu erhalten, sechs verschiedene Bewegungen ganz willkührlich denken kann, daß aber die dann aus dem Princip hervorgehenden sechs Gleichungen zwar ganz richtig seyn werden, aber vielleicht nicht alle von einander unabhängig seyn können, so daß sie zum Gleichgewicht selbst noch nicht ausreichend sind; endlich daß, wenn sie auch ausreichen sollten, solche dann doch nicht nothwendig dieselbe Form haben werden, wie die im (§. 29. C.) gefundenen. Will man daher gerade diese letzteren Gleichungen erhalten, so wird man dem System bestimmte Bewegungen andichten müssen.

Man muß nämlich, wenn für das Gleichgewicht eines freien festen Systems gerade dieselben Gleichgewichts-Gleichungen des (§. 29. C.) hervorgehen sollen, das feste System nach den drei Axen OX, OY, OZ daselbst, fortschreiten und um dieselben drei Axen auch sich drehen lassen.

I. Denkt man sich das feste System zuerst so fortschreitend, daß jeder der angegriffenen Atome unendlich wenig parallel mit OX fortrückt, so bilden die Wege dw, die jeder Atom x_r macht, mit den Kräften P_r die Winkel α_r, welche die Kräfte P_r mit OX machen; projicirt man daher diese Wege auf die Richtungen der Kräfte, so erhält man $dw \cdot \cos\alpha_r$ für die virtuellen Geschwindigkeiten, und $dw \cdot P_r \cdot \cos\alpha_r$ für die Momente der virtuellen Geschwindigkeiten. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten giebt daher, da der Weg dw, wegen der Festigkeit des Körpers, für jeden Atom derselbe ist, die Gleichung

$dw \cdot P_1 \cdot \cos\alpha_1 + dw \cdot P_2 \cdot \cos\alpha_2 + dw \cdot P_3 \cdot \cos\alpha_3 + \cdots + dw \cdot P_n \cdot \cos\alpha_n = 0,$

oder $P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n = 0,$

welches die Gleichung $X = 0$ des (§. 29. C.) iſt.

Wollte man daſſelbe mittelſt der Differenzial-Rechnung verfolgen, ſo hätte man bei dieſer Bewegung

$dx_1 = dx_2 = dx_3 = \text{ꝛc.} = dw$, $dy_1 = dx_1 = dy_2 = dx_2 = dy_3 = \text{ꝛc.} \text{ꝛc.} = 0$,

und die Gleichung

$$\Sigma(P \cdot dp), \quad \text{oder} \quad \Sigma(P \cdot \partial p_x \cdot dx) = 0$$

würde jetzt, weil dx für jeden Atom denſelben Werth dw behält, in

$$dw \cdot \Sigma(P \cdot \partial p_x) = 0, \quad \text{oder in} \quad \Sigma(P \cdot \partial p_x) = 0$$

übergehen, während nach (§. 28. I. Th. Mech.) $\partial p_x = \cos\alpha$ iſt, ſo daß die letztere Gleichung $\Sigma(P \cdot \partial p_x) = 0$ keine andere als $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$, d. h. $X = 0$ iſt.

Ganz analog bekäme man aus $\Sigma(P \cdot \partial p) = 0$, zuerſt $\Sigma(P \cdot \partial p_x) \cdot \partial x = 0$ und zuletzt $\Sigma(P \cdot \partial p_x) = 0$, alſo $X = 0$, wenn man von der Gleichung $\Sigma(P \cdot \partial p) = 0$ ausgehen wollte, wie ſolche die Anſicht des (§. 29. I. Th. Mech.) geliefert hat, und zu dem Ende die x alle um ein beliebig großes $\varkappa \cdot \partial x$ wollte wachſen laſſen.

II. Denken wir uns nun zunächſt den feſten Körper um OX gedreht, ſo daß jeder angegriffene Atom A_r einen Kreis beſchreibt, deſſen Mittel-Punkt C in OX liegt und deſſen Ebene mit der Ebene YOZ parallel läuft, ſo iſt der unendlich-kleine Weg des Atoms A_r ein Kreisbogen A_rB_r (Fig. 35.), der mit dem Radius B_rC beſchrieben iſt, und deſſen Centri-Winkel B_rCA_r, im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt, durch dw bezeichnet ſeyn mag, wo wir den unten angehängten Zeiger r weglaſſen, weil dw bei dieſer Drehung für alle Atome $A_1, A_2, \cdots A_r, \cdots A_n$ immer denſelben Werth behält. Iſt ferner $CD = y_r$, $DA_r = z_r$, ſo iſt $B_rE = dz_r$, und $A_rE = -dy_r$. Denkt man ſich nun ſtatt der Kraft P_r die drei Seiten-Kräfte $P_r \cdot \cos\alpha_r$, $P_r \cdot \cos\beta_r$, und $P_r \cdot \cos\gamma_r$ geſetzt, ſo ſind bei dieſer Drehung die virtuellen Geſchwindigkeiten in Bezug auf dieſe drei Seiten-Kräfte bezüglich 0, dy_r und dz_r (weil die Projektionen des unendlich-kleinen und als geradlinig angeſehenen Weges A_rB_r, auf die Richtungen der Kräfte, bezüglich A_rE und B_rE ſind). Die Summe

der Momente der virtuellen Geſchwindigkeiten dieſer drei Seiten-Kräfte iſt daher

$$(A)\cdots \quad = P_r\cdot\cos\beta_r\cdot dy_r + P_r\cdot\cos\gamma_r\cdot dz_r.$$

Nun verhält ſich, weil $\Delta CDA_r \sim \Delta B_rEA_r$ iſt,

$$y_r : dz_r = z_r : -dy_r = R_r : B_rA_r = 1 : dw;$$

alſo iſt $dz_r = y_r\cdot dw$ und $-dy_r = z_r\cdot dw$; und die Summe (A) geht in

$$(B)\cdots \quad = P_r\cdot(\cos\beta_r\cdot z_r - \cos\gamma_r\cdot y_r)\cdot dw$$

über. Nun hat aber dw für alle angegriffenen Atome einen und denſelben Werth; alſo giebt das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten dasmal die Gleichung

$$dw\cdot\Sigma P\cdot(z\cdot\cos\beta - y\cdot\cos\gamma) = 0,$$

welche mit der $N = 0$ des (§. 29. C.) zuſammenfällt.

Wollte man dieſelbe Gleichung erhalten, aber ohne ſolche geometriſche Betrachtungen mit unendlich-kleinen Größen anzuwenden, ſo müßte man von der Form (§. 90. III.), nämlich von der Gleichung

$$\Sigma(P\cdot\delta p) = 0$$

ausgehen. Zu dem Ende müßte man das Syſtem wiederum um OX ſich drehen laſſen, aber nun beliebig viel, und den Winkel ACB (Fig. 36.), um welchen ſich die vom Angriffs-Punkte A auf die Axe OX gefällte ſenkrechte AC dreht (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt), durch $x\cdot\delta w$ bezeichnen, ſo daß $x\cdot\delta w$ für alle Angriffs-Punkte denſelben Werth behält. Iſt nun $CD = y$, $DA = z$, ſo iſt

$$\left.\begin{aligned} CF &= y_x = y + x\cdot\delta y + \cdots \\ BF &= z_x = z + x\cdot\delta z + \cdots \end{aligned}\right\} \text{ während } x_x = x, \text{ alſo } \delta x = 0 \text{ iſt.}$$

Setzt man nun noch W. $ACD = w$ und $AC = BC = R$, ſo hat man

$$\sin w = \frac{z}{R}, \quad \cos w = \frac{y}{R}, \quad \sin(w + x\cdot\delta w) = \frac{z_x}{R},$$

$$\cos(w + x\cdot\delta w) = \frac{y_x}{R},$$

und die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(w + x\cdot\delta w) &= \sin w\cdot\cos(x\cdot\delta w) + \cos w\cdot\sin(x\cdot\delta w) \\ \cos(w + x\cdot\delta w) &= \cos w\cdot\cos(x\cdot\delta w) - \sin w\cdot\sin(x\cdot\delta w) \end{aligned}$$

geben daher ſogleich, wenn man die vorhergehenden Werthe ſubſtituirt,

$$z_\varkappa = z\cdot\cos(\varkappa\cdot\delta w) + y\cdot\sin(\varkappa\cdot\delta w)$$
$$y_\varkappa = y\cdot\cos(\varkappa\cdot\delta w) - z\cdot\sin(\varkappa\cdot\delta w).$$

Diese letztern beiden Gleichungen geben nun nach (I. Th. Analyt. §. 55.)

$$\delta z = y\cdot\delta w, \quad \delta y = -z\cdot\delta w, \text{ während } \delta x = 0 \text{ ist.}$$

Da nun zwar diese Werthe von y, z, δy, δz für jeden andern der angegriffenen Atome im Allgemeinen anders, der Werth δw dagegen, wegen der Festigkeit des Körpers, genau derselbe bleiben wird *), so gehe die Gleichung

$$\Sigma(P,\delta p) = 0, \text{ d. h. } \Sigma P\cdot(\delta p_x\cdot\delta x + \delta p_y\cdot\delta y + \delta p_z\cdot\delta z) = 0,$$

wenn man diese Werthe statt δx, δy, δz substituirt, sogleich in

$$\delta w\cdot\Sigma P\cdot(y\cdot\delta p_x - x\cdot\delta p_y) = 0$$

über, welche, weil $\delta p_x = \cos\gamma$ und $\delta p_y = \cos\beta$ ist,

$$\Sigma P\cdot(y\cdot\cos\gamma - z\cdot\cos\beta) = 0$$

liefert; d. h. wiederum die Gleichung N = 0 des (§. 29. C.).

Man hat hier $w_\varkappa = w + \varkappa\cdot\delta w$ genommen. Man hätte δw = 1, also $w_\varkappa = w + \varkappa$ nehmen können.

Nimmt man aber ϰ unendlich-klein, also daß ϰ·δw in dw übergeht, so hat man zu gleicher Zeit eine gründlichere Behandlung der vorhergegangenen mit der größern Schrift gedruckten Auseinandersetzung, d. h. die jetzige Rechnung geht dann in jene über, ohne daß man jene geometrische Betrachtung unendlich-kleiner Elemente zu Hilfe zu nehmen braucht.

III. Was aber in (I. u. II.) die Axe OX gegeben hat, das erhält man eben so in Bezug auf die Axe OY, und noch einmal so in Bezug auf die Axe OZ. — So hat man zuletzt genau dieselben sechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts eines freien festen Systems, wie solche in (§. 29. C.)

---

*) Es ist die Entfernung $E_{r,m}$ zweier Atome A_r und A_m von einander gegeben durch die Gleichung

$$E_{r,m} = \sqrt{(x_r - x_m)^2 + (y_r - y_m)^2 + (z_r - z_m)^2};$$

daher ist

$$\delta(E_{r,m}) = \frac{(x_r - x_m)(\delta x_r - \delta x_m) + (y_r - y_m)(\delta y_r - \delta y_m) + (z_r - z_m)(\delta z_r - \delta z_m)}{\sqrt{(x_r - x_m)^2 + (y_r - y_m)^2 + (z_r - z_m)^2}},$$

und dieser Zähler zur Rechten wird genau Null, sobald $\delta x_r = \delta x_m = 0$, $\delta y_r = -z_r\cdot\delta w$, $\delta y_m = -z_m\cdot\delta w$, $\delta z_r = y_r\cdot\delta w$ und $\delta z_m = y_m\cdot\delta w$ gesetzt wird. — So bestätigt die Rechnung a posteriori was an sich schon klar ist.

entwikkelt stehen, unmittelbar aus der Gleichung $\Sigma(P \cdot dp) = 0$ oder aus der andern $\Sigma(P \cdot \delta p) = 0$ abgeleitet.

IV. Wäre dasselbe feste System gezwungen, auf der Axe OZ zu bleiben, so daß es sich bloß um diese Axe drehen, sonst aber keine Bewegung weiter eingehen könnte, so würde man natürlich nur eine einzige Gleichung für das Gleichgewicht erhalten, nämlich die $L = 0$ des (§. 29.).

V. Könnte sich dagegen das feste System, welches gezwungen ist, auf der absolut festen Axe OZ zu bleiben, nicht bloß um letztere drehen, sondern sich auch noch auf OZ hin- und herschieben, so geben diese zwei möglichen Bewegungen zwei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich

$$Z = 0 \quad \text{und} \quad L = 0 \quad \text{des (§. 29.).}$$

Dieses alles stimmt aber mit den früher unter denselben Voraussetzungen erhaltenen Resultaten der (§§. 29. und 82.) genau überein. In den folgenden Kapiteln werden wir noch öfter die Gelegenheit wahrnehmen und dieses allgemeine Princip in Anwendung bringen.

Anwendungen der Statik

auf

Beantwortung

physikalischer und technischer Fragen.

Die Statik fester Körper.

Eilftes Kapitel.

Von der Reibung.

§. 93.

Begriff der Reibung.

Wenn zwei feste Körper, die ein loses System bilden, an einander gedrückt werden, und die Bedingungen des Gleichgewichts von den wirkenden Kräften gerade erfüllt sind, so muß das Gleichgewicht augenblicklich gestört werden, sobald eine der Kräfte sich verändert, oder eine neue Kraft noch hinzutritt, so daß die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts nun nicht mehr erfüllt sind. — Nichts desto weniger lehrt die Erfahrung, daß oft eine mehr oder minder bedeutende Kraft noch hinzutreten muß, bis endlich das Gleichgewicht wirklich gestört wird, daß jedoch diese Störung des Gleichgewichts desto schneller eintritt, je polirter die Flächen sind, mit welchen die festen Körper an einander gedrückt sich finden, und je kleiner dieser letzterwähnte Druck selbst ist.

Die Ursache dieser Erscheinung ist offenbar vorzugsweise in den Umstand zu suchen, daß die nie vollkommen glatten Flächen mit ihren Vertiefungen und Erhabenheiten in einander eingreifen, und zwar desto mehr, je größer der Druck ist. Es ist deshalb eine Kraft nöthig, welche *senkrecht auf die gemeinschaftliche Normale der beiden gegen einander ge-*

drückten Flächen (also in der Richtung einer gemeinschaftlichen Tangente) den einen Körper erfaßt, wenn der andere absolut fest ist, oder welche beide Körper in entgegengesetzten Richtungen erfaßt, — um diesen Widerstand zu vernichten. Diese dazu nothwendige und gerade ausreichende Kraft nennen wir die Reibung (frictio, frottement).

§. 94.

Gesetze der Reibung.

Durch sorgfältig angestellte Versuche hat Coulomb *) nachstehende Gesetze gefunden, welche durch die neueren, noch vollständigeren und höchst interessanten Versuche von Morin **) sich bestätigt gefunden haben, nämlich

1) die Reibung vermehrt sich mit der Rauhigkeit der sich reibenden Flächen, wird daher durch Schmieren vermindert, obgleich letzteres wieder eine Adhäsion hervorbringt.

Bei den folgenden Gesetzen sind möglichst glatte oder polirte Flächen vorausgesetzt.

2) Die Reibung ist unter übrigens gleichen Umständen dem Drucke proportional.

3) Bei gleichem Drucke ist unter übrigens gleichen Umständen die Größe der Reibung unabhängig von der Größe der sich reibenden Fläche.

Dies erklärt sich dadurch, daß, wenn die reibende Fläche doppelt so groß wird, der Druck sich vertheilt, und auf jede Flächen-Einheit nur halb so groß bleibt. — Wird Schmiere gebraucht, so vermehrt sich mit der Größe der reibenden Fläche die Adhäsion, und in so ferne tritt dann ein kleiner unbedeutender Unterschied in der Reibung ein, je nachdem die reibende Fläche größer oder kleiner ist. —

4) Die Reibung der Ruhe ist größer als die Reibung der Bewegung; und die gleitende Reibung größer als die wälzende.

---

*) Théorie des machines simples etc. etc. — Mém. de math. et phys. prés. à l'académie. T. X. Paris 1785. p. 161. — 332. (Coulomb).

**) Nouvelles expériences sur le frottement faites a Metz en (1831, 1832 et) 1833 (drei Memoiren). Paris, Bachelier (1834) 1835.

Unter wälzender Reibung verſteht man nämlich diejenige, welche ſtatt findet, wenn ein Cylinder oder eine Kugel auf einer Fläche rollt. Gleitend heißt die Reibung, wenn die Flächen an einander hingeſchoben, oder wenn Zapfen in ihren Lagern gedreht werden. — Reibung der Ruhe findet ſtatt, wenn das Syſtem einige Zeit in Ruhe geweſen iſt; Reibung der Bewegung findet während der Bewegung der ſich reibenden Flächen ſtatt.

5) Die verſchiedene Geſchwindigkeit der Körper bei der Reibung während der Bewegung hat keinen Einfluß auf die Größe der Reibung.

§. 95.

Wie die Reibung in Rechnung gebracht wird.

Dieſen Erfahrungs-Geſetzen zu Folge bringt man, wenn Q den bekannten oder unbekannten Druck vorſtellt, mit welchem die Flächen gegen einander gedrückt werden, die gleitende Reibung allemal dadurch in Rechnung,

„daß man ſie als eine Kraft anſieht, welche der Größe nach „durch $\mu \cdot Q$ ausgedrückt iſt, welche der Richtung nach ſenk„recht auf die Richtung des Druckes Q ſteht, und der je„desmal beabſichtigten, oder durch die Reibung gehinderten „Bewegung genau entgegen wirkt, ſo daß, wenn unter dieſer „Vorausſetzung die Bedingungen des Gleichgewichts (von al„len Kräften mit Inbegriff der Reibung $\mu \cdot Q$) erfüllt ſind, „dann der geringſte Anſtoß in der Richtung der beabſichtig„ten Bewegung, dieſe letztere allemal ſogleich wirklich hervor„bringt (während dann in jeder andern Richtung größere oder „geringere Anſtöße nöthig ſind, um eine Bewegung in dieſer „andern Richtung wirklich hervorzubringen).

§. 96.

Verſuchs-Werthe des Reibungs-Koeffizienten für gleitende Reibung.

Die Zahl μ in der Reibung $\mu \cdot Q$, wenn Q den Druck vorſtellt, mit welchem die reibenden Flächen an einander gedrückt werden, heißt der Reibungs-Koeffizient. Aus den Coulomb'ſchen Verſuchen hat man folgende Tabellen gezogen:

Erſte Tabelle.

Gleitende Reibung der Ruhe.

Das Zeichen (—) bedeutet hier, daß die reibenden Körper nach der Richtung der Holzfaſern bewegt worden ſind, und (+) bedeutet, daß ſich die Holzfaſern durchkreuzen.

Reibende Körper mit möglichſt glatten Flächen, ohne oder mit Schmiere.	Schiebende Reibung, wo ein Körper über den andern weggeſchoben wird.						Drehende Reibung, z. B. Zapfen im Zapfenlager.				
	— Trocken.	Talg.	Theer.	Oel.	Abgen. Talg.	+ Trocken.	Trocken.	Talg.	Theer.	Oel.	Abgen. Talg.
Eichen auf Eichen	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$			$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{13}$					
Kiefern auf Kiefern	$\frac{7}{12}$										
Ulmen auf Ulmen	$\frac{6}{13}$										
Eichen auf Kiefern	$\frac{2}{3}$										
Steineichen auf Guajac . . .											$\frac{1}{16}$
Eiſen auf Eiſen	$\frac{2}{7}$										
Kupfer auf Eiſen	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{6}$			$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{20}$		
Eiſen auf Guajac							$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$			
Eiſen auf Eichen	$\frac{1}{5}$					$\frac{1}{14}$					
Kupfer auf Eichen	$\frac{2}{11}$										
Meſſing auf Eiſen	$\frac{4}{15}$										

Zweite Tabelle.

Gleitende Reibung der Bewegung.

Reibende Körper mit möglichst glatten Flächen, ohne und mit Schmiere.	Schiebende Reibung.					Drehende Reibung.				
	– Trocken.	Talg.	Theer.	Abgen. Talg.	+ Trocken.	Trocken.	Talg.	Theer.	Oel.	Abgen. Talg.
Eichen auf Eichen	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{10}$					
Kiefern auf Kiefern	$\frac{1}{6}$									
Ulmen auf Ulmen	$\frac{1}{10}$									
Eichen auf Kiefern	$\frac{3}{19}$									
Steineichen auf Guajac						$\frac{1}{26}$				$\frac{1}{17}$
Steineichen auf Ulmen						$\frac{1}{33}$				$\frac{1}{20}$
Buchsbaum auf Guajac						$\frac{1}{23}$				$\frac{1}{14}$
Buchsbaum auf Ulmen						$\frac{1}{29}$				$\frac{1}{20}$
Eisen auf Eisen	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$								
Kupfer auf Eisen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{11}$				$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{15}$
Eisen auf Guajac						$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$			
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{35}$		$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{9}$					
Kupfer auf Eichen	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{41}$		$\frac{1}{16}$						

Anmerk. Daß diese Versuchszahlen nur mit Vorsicht dürfen angewandt werden, braucht wohl keiner besondern Erwähnung, da die reibenden Flächen in Einzel-Fällen sogar chemisch sich verändern können, so daß der Reibungs-Koeffizient bloß deshalb ein ganz anderer werden kann. Man wird daher in den Anwendungen darauf sehen, daß die Bedingungen, unter denen die Versuchs-Zahlen gefunden worden sind, möglichst erfüllt seyen, ehe man die Versuchs-Zahlen selbst benutzt.

In vielen Einzel-Fällen der Anwendung kann es rathsam seyn, für diesen Einzel-Fall die Zahl μ selbst erst mittelst besonders dazu angestellter Versuche zu ermitteln, wozu die späteren (§§.) noch insbesondere Anweisung geben.

§. 97.

Von der wälzenden Reibung.

Das Vorstehende gilt alles von der gleitenden Reibung. — Bei der wälzenden Reibung, die statt findet, wenn ein Cylinder (eine Walze) auf einer Ebene rollt, ist dagegen die Reibung nicht durch $\mu \cdot Q$, sondern durch

$$\mu \cdot \frac{Q}{r}$$

in Rechnung zu bringen, wie ebenfalls aus Versuchen des Coulomb hervorgeht, wo Q der Druck oder die Belastung, und r der Halbmesser des Cylinders (der Walze) ist. Wird Q in Pariser Pfunden und r in Pariser Zollen ausgedrückt, so kann man statt des Reibungs-Koeffizienten μ setzen die Zahl

0,018 oder $\frac{1}{56}$ bei Walzen von Guajac auf Eichenholz

0,03 bei Walzen von Ulmen auf Eichenholz.

Anmerk. Wenn in der Folge von Reibung die Rede ist, wird immer stillschweigend gleitende Reibung vorausgesetzt, und mit $\mu \cdot Q$ in Rechnung gebracht, sobald Q der Druck ist.

Folgende Aufgaben mögen noch zur näheren Erörterung dienen.

§. 98.

Aufgabe 1.

Ein Balken AB (Fig. 37.), dessen Länge $= l$, dessen Gewicht $= P$ ist, und welcher seinen Schwer-Punkt in seiner Mitte S hat, lehnt sich in B gegen die vertikale Mauer BC, und stützt sich in A gegen einen horizontalen Fußboden, doch so, daß die Ebene BAC auf der Ebene der Mauer senkrecht steht. Wie klein darf der Winkel $BAC = \alpha$ werden, damit die Reibung den Balken gerade noch vor dem Herabgleiten bewahrt.

Da der Balken auf den vertikalen und horizontalen Ebenen bloß lose aufliegt, so kann er nach (§. 78. Nr. 3.) nicht im Gleichgewicht bleiben, wenn er nicht senkrecht gegen selbige gedrückt wird. Es werde A mit der Kraft x, B mit der Kraft y senkrecht auf die bezüglichen Ebenen gedrückt, so findet in A die Reibung μx, in B die Reibung $\mu' y$ statt, wobei wir die Reibungs-Koeffizienten μ, μ' verschieden uns denken müssen, obgleich sie auch einander gleich seyn können. Glitte nun der Balken wirklich herab, so würde sich A von C entfernen; dagegen würde B dem C sich nähern; also wirkt die Reibung in A von A nach C hin, nämlich der zu verhindernden Bewegung gerade entgegen, und eben deshalb wirkt die Reibung an B, von C nach B hin. Denken wir uns nun die Drucke x und y, an A und an B in entgegengesetzter Richtung angebracht, so müssen sich die fünf Kräfte x, μx, y, $\mu' y$ und P an der festen geraden Linie AB im Gleichgewicht halten, nach (§. 79.).

Weil hier die Kräfte alle in einer und derselben Ebene BAC wirken, so betrachte man ACX und AY als die auf einander senkrechten Projektions-Axen der Kräfte, und man hat dann nach (§. 36.) für das Gleichgewicht die drei Gleichungen

I. $-\mu x + y = 0$, d. h. die Summe der Kräfte nach der Axe AX, der Null gleich;

II. $\mu' y + x - P = 0$; d. h. die Summe der Kräfte nach der Axe AY, der Null gleich;

III. $\frac{1}{2} P \cdot l \cdot \cos\alpha - \mu' \cdot y \cdot l \cdot \cos\alpha - y \cdot l \cdot \sin\alpha = 0$; d. h. die Mo-

menten-Summe der Null gleich, in Bezug auf ein beliebiges Centrum der Momente genommen; hier in Bezug auf das Centrum A.

Dies ist der Ansatz der Aufgabe.

Diese drei Gleichungen dienen nun zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y und α. Sie geben

$$1)\quad x = \frac{P}{1+\mu\mu'}, \qquad 2)\quad y = \frac{\mu P}{1+\mu\mu'}$$

und

$$3)\quad tg\,\alpha = \frac{1-\mu\mu'}{2\mu}.$$

Die Gleichung (3.) läßt sehen: a) daß wenn an A keine Reibung (d. h. wenn $\mu = 0$) wäre, dann nie Gleichgewicht seyn könnte, außer bei $\alpha = 90°$; — b) daß der Winkel α dagegen desto kleiner werden kann, je größer der Reibungs-Koefficient μ ist; c) daß die Reibung an B beiträgt, den Winkel α noch zu verkleinern.

Die Gleichung (1.) läßt dagegen sehen, a) daß wenn bei B keine Reibung statt findet (d. h. wenn $\mu' = 0$ ist), dann der Druck x in A dem ganzen Gewicht P des Balkens gleich ist; b) daß aber dieser Druck desto kleiner wird, je größer die Reibungs-Koefficienten an A und B werden.

Die Gleichung (2.) lehrt endlich: a) daß der Druck gegen die vertikale Mauer bei B desto kleiner wird, je kleiner an A der Reibungs-Koefficient μ ist; b) daß wenn die Reibung bei B Null wäre, dann dieser Druck bei B gegen die Mauer genau mit dem Reibungs-Koefficienten μ an A proportional wachsen würde *).

§. 99.

Aufgabe 2.

Eine Stange AB steht mit ihrem einen Ende A auf einem horizontalen Fußboden MVN (Fig. 38.) dergestalt fest, daß sie sich um A zwar drehen, aber nicht von A abweichen kann; mit ihrem andern Ende B lehnt sie sich lose und schief gegen eine vertikale Wand NVR, so nämlich, daß ihre Projektion CB auf letztere, mit der Durchschnitts-Linie NV der Wand und des Fußbodens, den spitzen Winkel $BCD = \varphi$ macht. Es wird gefragt, wie groß dieser Winkel φ werden könne, damit die

*) Man kann dieselbe Aufgabe noch etwas abändern, indem man sich statt des Balkens eine Leiter denkt, welche auf irgend einer Sprosse derselben noch mit einem Gewicht beschwert ist. Die Behandlung bleibt jedoch immer dieselbe.

Stange durch die bloße Reibung bei B von dem völligen Umfallen gerade noch bewahrt werde, so daß, wenn man den Winkel φ noch etwas kleiner nehmen wollte, dann sogleich das Herabgleiten des Endes B an der Wand erfolgen müßte.

Ist die senkrechte Entfernung AC des Punktes A von der Wand, $= a$; ist ferner die Länge der Stange $AB = l$ gegeben, so hat man auch die Winkel $BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$, welche immer dieselben bleiben, wo auch das Ende B der Stange an der Wand verweilen mag; denn es ist

$$BC = \sqrt{l^2 - a^2} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \sin\beta = \frac{a}{l}.$$

Bei'm Heruntergleiten der Stange an der Wand beschreibt ihr Ende B einen Kreisbogen, dessen Radius $= BC$ ist; die Reibung wirkt daher in der Richtung BH senkrecht auf BC.

Es sey nun P das Gewicht der Stange, in ihrer Mitte S der Schwer-Punkt derselben, so wird im Zustande des Gleichgewichts der Punkt A des Fußbodens in einer unbekannten Richtung gedrückt; deswegen bringen wir an der Stange in A nach (§§. 79. u. 81.) die drei unbekannten Gegen-Drucke x, y und z, nach den Axen ACX, AY (parallel mit NV) und AZ (senkrecht auf MVN) an. Da die Stange bei B ganz lose aufsitzt, so findet daselbst nach (§. 78.) ein Druck senkrecht gegen die Wand NVR statt, weshalb wir an der Stange in B einen eben so großen Gegen-Druck x' anbringen. Die Reibung ist dann $= \mu x'$ in der Richtung BH; und nach Umständen setzen wir dafür die beiden Seiten-Kräfte $\mu x' \cdot \sin\varphi$ in der Richtung BF (parallel mit AY) und $\mu x' \cdot \cos\varphi$ in der Richtung BG, welche letztere rückwärts verlängert die NV in D trifft, und senkrecht auf NV steht, also mit AZ parallel läuft.

Da nun die sieben Kräfte P, x, y, z, x', $\mu x' \cdot \sin\varphi$, $\mu x' \cdot \cos\varphi$ an der festen Stange AB einander das Gleichgewicht halten, nach (§. 79.), so liefert der (§. 29. C.) augenblicklich die sechs Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich zunächst die drei Gleichungen, welche man erhält, wenn die Summe der Kräfte nach jeder der drei Axen der Null gleich gesetzt wird, d. h.

I. $x - x' = 0$, II. $y - \mu x' \cdot \sin\varphi = 0$

und III. $z + \mu x' \cdot \cos\varphi - P = 0$;

und hernach noch die drei Gleichungen, welche man erhält, wenn die Kräfte auf die Koordinaten-Ebenen projicirt gedacht werden, und dann in jeder dieser Ebenen, die Summe der statischen Momente dieser projicirten Kräfte (in Bezug auf den Punkt A als Centrum der Momente genommen) der Null gleich gesetzt wird, d. h. weil $CD = \cos\varphi \cdot \sqrt{l^2 - a^2}$ ist,

IV. $x' \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{l^2 - a^2} - \mu x' \cdot a \cdot \sin\varphi = 0$,

V. $\frac{1}{2}a \cdot P - \mu x' \cdot a \cdot \cos\varphi - x' \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{l^2 - a^2} = 0$,

VI. $\frac{1}{2}P \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{l^2 - a^2} - \mu x' \cdot \sqrt{l^2 - a^2}$ *) $= 0$.

Dies ist der Ansatz der Aufgabe.

Die Gleichung (IV.) giebt sogleich das Verlangte, nämlich:

1) $\cot g\varphi = \mu \cdot \frac{a}{\sqrt{l^2 - a^2}} = \mu \cdot \cot g\,BAC = \mu \cdot \cot g\,\alpha$.

Die Gleichung (VI.) giebt den Druck x' (den die Wand bei B erleidet) unmittelbar nachdem φ bekannt ist, nämlich

2) $x' = \frac{P \cdot \cos\varphi}{2\mu}$.

Die Gleichungen (I. — III.) geben

3) $x = x' = \frac{P \cdot \cos\varphi}{2\mu}$; 4) $y = \frac{1}{4}P \cdot \sin 2\varphi$;

und 5) $z = P \cdot (1 - \frac{1}{2}\cos\varphi^2)$;

und die Gleichung (V.) wird durch die gefundenen Werthe von φ und x' genau identisch.

Das Resultat $\cot g\varphi = \mu \cdot \cot g\,\alpha$ lehrt, daß der Winkel φ desto größer seyn wird, je kleiner der Reibungs-Koefficient μ und je größer der Winkel α oder BAC ist. — Und hätte man nichts anders als φ finden wollen, so hätte man sich statt aller sechs Gleichgewichts-Gleichungen blos die (IV.) verschaffen können, ohne sich um die übrigen weiter zu bekümmern.

---

*) Statt der Momente in der Ebene YAZ in Bezug auf das Centrum A, nimmt man lieber die Momente derselben, aber auf die mit YAZ parallele Wand NVR projicirten Kräfte, in Bezug auf den Punkt C als Centrum (welcher die Projektion des Punktes A auf dieselbe Wand NVR ist), weil diese Momente genau dieselben sind und das Verfahren bequemer erscheint. — Hier ist es dann zugleich vortheilhafter, die Reibung $\mu x'$ in der Richtung BH selbst, statt ihrer beiden Seiten-Kräfte, in Rechnung zu bringen.

§. 100.

Aufgabe 3.

Auf einer gegen den Horizont AC (Fig. 39.) unter dem Winkel $BAC = \delta$ geneigten übrigens absolut festen schiefen Ebene BA liegt ein Gewicht P. Wie groß kann der Winkel δ werden, so daß das Gewicht P gerade noch vor dem Herabgleiten geschützt ist.

Es sey S der Schwer-Punkt des Gewichts P, und SO vertikal. Durch O lege man OX senkrecht auf die schiefe Richtung OAY. An einer unbekannten Stelle D, deren Abscissen-Werth y seyn mag, entsteht im Gleichgewicht ein unbekannter Druck senkrecht gegen die schiefe Ebene, dem wir sogleich einen eben so großen Druck N genau entgegensetzen; die Reibung μN, welche die Bewegung verhindern soll, wirkt in der Richtung DB. Diese drei Kräfte P, N und μN müssen sich nun im Gleichgewicht halten, nach (§. 79.).

Der (§. 36.) giebt daher wiederum die drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich

I. $N - P \cdot \cos\delta = 0$ } d. h. die Summe d. Kräfte nach jeder d.
II. $P \cdot \sin\delta - \mu N = 0$ } beiden Axen OX u. OY d. Null gleich.
III. $N \cdot y = 0$; d. h. die Summe der Momente in Bezug auf das Centrum O, der Null gleich.

Dies ist der Ansatz der Aufgabe.

Löst man diese Gleichungen nach den Unbekannten y, N und δ auf, so liefert die (III.) sogleich $y = 0$, d. h. der Druck N findet in O in der Richtung XO statt *); ferner geben die (I. u. II.), wenn N eliminirt wird,

$$(\odot) \cdots \qquad tg\,\delta = \mu;$$

während die (I.) noch finden läßt:

$$N = P \cdot \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot P.$$

*) Da hier nur drei Kräfte im Gleichgewicht sind, so müssen sich ihre Richtungen nach (§. 8.) in einem und demselben Punkte O schneiden. Daher konnte man hier die Aufgabe gleich von vorne herein noch einfacher behandeln (vergl. §. 112.).

Anmerk. Dieser Winkel δ, gegeben durch die Gleichung

$$tg\,\delta = \mu,$$

wird der Reibungs-Winkel, auch der Ruhe-Winkel oder der Winkel des Gleichgewichts genannt.

Mit der so eben betrachteten Vorrichtung werden gewöhnlich die Versuche angestellt, welche zur Bestimmung des Reibungs-Koefizienten dienen sollen; die schiefe Ebene wird bei A um ein Gewinde beweglich gemacht, doch so, daß sie unter jedem Winkel festgestellt werden kann. Der Winkel δ muß genau gemessen werden können.

Folgende Tabelle giebt zusammengehörige Werthe von μ und δ:

μ	δ	μ	δ	μ	δ
$\frac{1}{50}$	1° 8′ 45″	$\frac{1}{17}$	3° 21′ 59″	$\frac{3}{19}$	8° 58′ 22″
$\frac{1}{45}$	1 16 23	$\frac{1}{16}$	3 34 35	$\frac{1}{6}$	9 27 44
$\frac{1}{41}$	1 23 50	$\frac{1}{15}$	3 48 50	$\frac{3}{17}$	10 0 28
$\frac{1}{40}$	1 25 55	$\frac{1}{14}$	4 5 8	$\frac{2}{11}$	10 18 17
$\frac{1}{35}$	1 38 12	$\frac{1}{13}$	4 23 55	$\frac{4}{21}$	10 46 56
$\frac{1}{33}$	1 44 9	$\frac{1}{12}$	4 45 49	$\frac{1}{5}$	11 48 36
$\frac{1}{30}$	1 54 33	$\frac{2}{23}$	4 58 11	$\frac{2}{9}$	12 31 43
$\frac{1}{29}$	1 58 30	$\frac{1}{11}$	5 11 40	$\frac{6}{25}$	13 29 42
$\frac{1}{27}$	2 7 16	$\frac{1}{10}$	5 52 38	$\frac{1}{4}$	14 2 10
$\frac{1}{25}$	2 17 26	$\frac{1}{9}$	6 20 25	$\frac{4}{13}$	14 55 53
$\frac{1}{24}$	2 23 9	$\frac{3}{25}$	6 53 34	$\frac{2}{7}$	15 56 43
$\frac{1}{23}$	2 29 22	$\frac{1}{8}$	7 7 30	$\frac{3}{10}$	16 41 57
$\frac{1}{22}$	2 36 9	$\frac{3}{23}$	7 25 53	$\frac{6}{25}$	17 44 41
$\frac{1}{21}$	2 43 34	$\frac{2}{15}$	7 35 42	$\frac{1}{3}$	18 26 6
$\frac{1}{20}$	2 51 44	$\frac{1}{7}$	8 8 12	$\frac{7}{20}$	19 17 24
$\frac{1}{19}$	3 0 46	$\frac{3}{20}$	8 31 51	$\frac{8}{25}$	20 33 22
$\frac{1}{18}$	3 10 47	$\frac{2}{13}$	8 44 17	$\frac{2}{5}$	21 48 5

μ	δ	μ	δ	μ	δ
$\frac{5}{12}$	22° 37′ 11″	$\frac{1}{2}$	26° 33′ 54″	$\frac{5}{8}$	32° 0′ 19″
$\frac{3}{7}$	23 11 55	$\frac{6}{11}$	28 36 37	$\frac{2}{3}$	33 41 24
$\frac{6}{13}$	24 46 30	$\frac{7}{12}$	30 15 23	$\frac{7}{10}$	34 59 31
$\frac{7}{15}$	25 1 1	$\frac{3}{5}$	30 57 58	$\frac{5}{7}$	35 32 15
				$\frac{3}{4}$	36 52 11

§. 101.

Aufgabe 4.

Ein Cylinder, dessen Querschnitt den Radius CA = r (Fig. 40.) hat, und den wir Rolle nennen wollen, steckt auf einem andern Cylinder, welcher Zapfen genannt werden mag, dessen Querschnitt mit dem ersten concentrisch ist, und der den Radius CB = ρ hat. Die Rolle kann sich um den absolut festen Zapfen drehen. Es wird gefragt: wie groß kann das Gewicht P in A, senkrecht auf den (horizontalen) Radius CA angebracht, werden, so daß die bloße Reibung gerade noch das Drehen der Rolle um den Zapfen verhindert?

Es seyen CAX und CY die auf einander senkrechten Axen, also CY vertikal nach oben, so entsteht, während des Gleichgewichts an irgend einer Stelle D, ein Druck in der Richtung DC, dem wir sogleich einen eben so großen Druck N entgegensetzen; die Reibung μN wirkt in der Richtung DE, senkrecht auf DC. Den Winkel DCX, der ebenfalls unbekannt ist, bezeichnen wir durch ψ und zählen ihn von CX nach CY hin von 0 bis 360°. Das Gewicht der Rolle sey Q, und solches wirkt in der vertikalen Richtung CG an F. Die vier Kräfte Q, P, N und μN halten sich nun an diesem festen Körper im Gleichgewicht, und da man sie alle vier in derselben Ebene XAY concentrirt denken kann, so giebt dasmal wiederum der (§. 36.) die drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

I. $\quad N \cdot \cos\psi - \mu N \cdot \sin\psi = 0;$

II. $N \cdot \sin\psi + \mu N \cdot \cos\psi - P - Q = 0$

und III. $\mu N \cdot \varrho = P \cdot r.$

Dies ist der Ansatz der Aufgabe.

Die (I.) giebt sogleich

1) $\cot g\,\psi = \mu$, oder $tg\,\psi = \frac{1}{\mu}$, $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$,

$$\cos\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

woraus folgt, daß der Winkel ψ ein spitzer ist. Die (II. und III.) geben dann

2) $$P = \frac{\mu\varrho}{r\sqrt{1+\mu^2} - \mu\varrho} \cdot Q$$

und 3) $$N = \frac{P+Q}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{r}{r\sqrt{1+\mu^2} - \mu\varrho} \cdot Q.$$

Die Gleichung (2) giebt auch noch

4) $$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{P}{P+Q} \cdot \frac{r}{\varrho}, \text{ oder } \cos\psi = \frac{P}{P+Q} \cdot \frac{r}{\varrho},$$

so daß, wenn P aus Versuchen bekannt seyn sollte, sogleich $\cos\psi$, also auch $\cot g\,\psi$ oder μ durch Rechnung gefunden werden könnte.

Die Gleichung (3.) läßt sehen, daß die Reibung den Druck N vermindert. Die Gleichung (4.) dagegen läßt erkennen, daß allemal

$$\frac{P}{P+Q} \cdot \frac{r}{\varrho} < 1, \text{ also } \frac{P}{P+Q} < \frac{\varrho}{r}$$

werden müsse.

Man vgl. übrigens noch den (§. 105.), in welchem die hiesige Untersuchung als ein besonderer Fall jener Aufgabe enthalten ist.

Die Statik fester Körper.

Zwölftes Kapitel.

Gleichgewicht an einigen der einfachsten Maschinen.

§. 102.

In der Technik will man gewöhnlich durch eine angebrachte Kraft, eine oder mehrere andere wirkende Kräfte überwinden. Diese letzteren bilden dann das, was gewöhnlich die Last genannt wird, und welche man wiederum in die Hauptlast und in die Nebenlast eintheilt. Die Kraft, durch welche man die Last zu überwinden sucht, wird dann vorzugsweise die Kraft genannt. Der Inbegriff der materiellen Mittel, durch welche die Kraft mit der Last in Verbindung gebracht wird, heißt Maschine *). — Wir wollen hier einige der einfachsten Maschinen im Zustande des Gleichgewichts betrachten. Zu den einfachsten Maschinen gehören aber

1) feste Stangen, die als Hebel gebraucht werden (Hebebäume).
2) Feste gegen den Horizont geneigte Ebenen (schiefe Ebenen).

*) Die Maschinenlehre hat eine genaue Kenntniß aller gebräuchlichen Maschinen beizubringen, sowohl in theoretischer als praktischer Beziehung, und sowohl im Zustande des Gleichgewichts, als auch im Zustande der Bewegung. Wir betrachten aber hier nur einige der einfachsten Maschinen, und diese wiederum nur im Zustande des Gleichgewichts.

II. $N \cdot \sin\psi + \mu N \cdot \cos\psi - P - Q = 0$

und III. $\mu N \cdot \varrho = P \cdot r.$

Dies ist der Ansatz der Aufgabe.

Die (I.) giebt sogleich

1) $\cot g\,\psi = \mu$, oder $tg\,\psi = \frac{1}{\mu}$, $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$,

$$\cos\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

woraus folgt, daß der Winkel ψ ein spitzer ist. Die (II. und III.) geben dann

2) $$P = \frac{\mu\varrho}{r\sqrt{1+\mu^2} - \mu\varrho} \cdot Q$$

und 3) $$N = \frac{P+Q}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{r}{r\sqrt{1+\mu^2} - \mu\varrho} \cdot Q.$$

Die Gleichung (2) giebt auch noch

4) $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{P}{P+Q} \cdot \frac{r}{\varrho}$, oder $\cos\psi = \frac{P}{P+Q} \cdot \frac{r}{\varrho}$,

so daß, wenn P aus Versuchen bekannt seyn sollte, sogleich $\cos\psi$, also auch $\cot g\,\psi$ oder μ durch Rechnung gefunden werden könnte.

Die Gleichung (3.) läßt sehen, daß die Reibung den Druck N vermindert. Die Gleichung (4.) dagegen läßt erkennen, daß allemal

$$\frac{P}{P+Q} \cdot \frac{r}{\varrho} < 1, \quad \text{also} \quad \frac{P}{P+Q} < \frac{\varrho}{r}$$

werden müsse.

Man vgl. übrigens noch den (§. 105.), in welchem die hiesige Untersuchung als ein besonderer Fall jener Aufgabe enthalten ist.

Die Statik fester Körper.

Zwölftes Kapitel.

Gleichgewicht an einigen der einfachsten Maschinen.

§. 102.

In der Technik will man gewöhnlich durch eine angebrachte Kraft, eine oder mehrere andere wirkende Kräfte überwinden. Diese letzteren bilden dann das, was gewöhnlich die Last genannt wird, und welche man wiederum in die Hauptlast und in die Nebenlast eintheilt. Die Kraft, durch welche man die Last zu überwinden sucht, wird dann vorzugsweise die Kraft genannt. Der Inbegriff der materiellen Mittel, durch welche die Kraft mit der Last in Verbindung gebracht wird, heißt Maschine *). — Wir wollen hier einige der einfachsten Maschinen im Zustande des Gleichgewichts betrachten. Zu den einfachsten Maschinen gehören aber

1) feste Stangen, die als Hebel gebraucht werden (Hebebäume).
2) Feste gegen den Horizont geneigte Ebenen (schiefe Ebenen).

*) Die Maschinenlehre hat eine genaue Kenntniß aller gebräuchlichen Maschinen beizubringen, sowohl in theoretischer als praktischer Beziehung, und sowohl im Zustande des Gleichgewichts, als auch im Zustande der Bewegung. Wir betrachten aber hier nur einige der einfachsten Maschinen, und diese wiederum nur im Zustande des Gleichgewichts.

3) Gegen einander geneigte feste Ebenen, darunter vorzugsweise der Keil und die Schraube.
4) Die Rolle.
5) Das Rad an der Welle, also alle Haspeln (wenn die Umdrehungs-Axe horizontal liegt), und alle Göpel oder Winden (wenn die Umdrehungs-Axe vertikal steht).

Erste Abtheilung.

Von der Rolle, den Rollenzügen und den Flaschenzügen.

§. 103.

Die Rolle (Trochlea, *Poulie*) ist eine feste kreisförmige Scheibe, an deren Umfang eine Rinne (*Gorge*) angebracht ist, damit ein Seil (oder eine Kette) sich hinein und um die Rolle herumlegen könne.

Die Rolle ist entweder in ihrer Mitte durchbohrt und dreht sich dann um einen Bolzen (*Gougon*), welcher sich nicht mit umdreht; oder es sind in der Mitte der Rolle Zapfen (*Tourillons*) befestigt, welche sich mit der Rolle drehen.

Die Rolle heißt eine feste Rolle (*Poulie immobile*), wenn die Axe derselben absolut fest ist; sie heißt dagegen eine lose oder bewegliche Rolle (*Poulie mobile*), wenn ihre Axe selbst noch beweglich ist; im letztern Falle steckt sie noch in einer gabelförmigen Hülse oder Gabel (*Chape*), welche den Zapfen oder dem Bolzen die Unterlage giebt, und an welche noch ein Gewicht angehängt werden kann (vgl. Fig. 41.).

Anmerk. In allen in diesem Kapitel folgenden Untersuchungen lassen wir das Gewicht der Seile jedesmal außer Acht; eben so die Steifigkeit der Seile. Das erstere ist gewöhnlich von höchst geringem Einfluß; dagegen ist die letztere (die Steifigkeit der Seile nämlich) oft von sehr bedeutendem Einfluß, weshalb wir solche später besonders betrachten.

§. 104.

Gleichgewicht an der losen Rolle.

Um die lose Rolle (Fig. 41.) ist ein Seil gelegt, welches an dem einen Ende A absolut fest ist, an dem andern Ende B aber von einer Kraft P gehalten wird, in einer Richtung FB, welche mit dem Horizont CX den Winkel α macht. An der Gabel unten hängt ein Gewicht W. Das Gewicht der Gabel sey $=$ G, das der Rolle $=$ R. Man soll die Bedingungen des Gleichgewichts bestimmen, jedoch unter der Voraussetzung, daß die Reibung von der Kraft P bereits mit überwunden ist, daß dagegen das Seil vollkommen biegsam gedacht werde.

Es sey r der Halbmesser der Rolle bis in die Mitte des Seils gedacht, dagegen ρ der Halbmesser des Bolzens (oder der Zapfen); ferner sey der Winkel $AEX = \beta$. Im Gleichgewicht wird die Rolle gegen den Bolzen (oder mit den Zapfen gegen die Zapfenlager) an einer unbekannten Stelle N, nach dem Mittel-Punkt C hin gedrückt; wir setzen daher einen eben so großen Druck x in N, nach der Richtung NH angebracht, genau entgegen. Der unbekannte Winkel NCX werde $= \psi$ gesetzt und von CX an abwärts nach der vertikalen Axe CY hin von 0 bis 360° gezählt.

Der Punkt A wird in der Richtung AE gedrückt; wir setzen daher sogleich eine eben so große Kraft T in der Richtung EA genau entgegen. Die Reibung der Rolle am Bolzen bei N ist $= \mu x$, übrigens in der Richtung der Tangente NI wirkend, da sie von der Kraft P mit überwunden werden soll. Die fünf Kräfte R, T, P, x und μx halten sich nun an der Rolle im Gleichgewicht. Da man hier annehmen kann, daß alle Kräfte in einem und demselben Querschnitt wirken, so giebt der (§. 36.) die drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

$$\text{I.} \quad P \cdot \cos\alpha + T \cdot \cos\beta + x \cdot \cos\psi - \mu x \cdot \sin\psi = 0,$$

$$\text{II.} \quad -P \cdot \sin\alpha - T \cdot \sin\beta + x \cdot \sin\psi + \mu x \cdot \cos\psi + R = 0,$$

$$\text{III.} \quad T \cdot r + \mu x \cdot \rho - P \cdot r = 0.$$

Weil aber auch nach (§. 79.) die Gabel (die Hülse) eben-

falls im Gleichgewicht ſeyn muß, ſo muß man nun nachſehen, welche Kräfte an dieſer wirken. Zunächſt drückt die Hülſe die Rolle in N in der Richtung NH; wir bringen daher an der Hülſe ſogleich einen eben ſo großen Gegen-Druck x' an, in der genau entgegengeſetzten Richtung NC. Die Reibung, durch welche die Bewegung der Gabel (welche der Bewegung der Rolle gerade entgegen iſt) aufgehalten wird, iſt daher $= \mu x'$ und in der Richtung der Tangente NK. An der Gabel (Hülſe) halten ſich alſo die drei Kräfte x', $\mu x'$ und $W+G$, welche man alle drei in dem Punkte N angebracht ſich denken kann, im Gleichgewicht *). Daher giebt der (§. 21. I. Th. Mech.) noch die beiden Gleichungen des Gleichgewichts

IV. $$\mu x' \cdot \sin\psi - x' \cdot \cos\psi = 0$$

und V. $$-\mu x' \cdot \cos\psi - x' \cdot \sin\psi + W + G = 0.$$

Endlich iſt noch augenfällig, auch nach (§. 78. Nr. 2.),

VI. $$x' = x.$$

Dies iſt der Anſatz unſerer Aufgabe. Die Auflöſung giebt nun ψ, x', x, P, T und noch eine Gleichung zwiſchen den Winkeln α und β, die erfüllt ſeyn muß, wenn das Gleichgewicht der loſen Rolle ſoll beſtehen können, oder welche β liefert, wenn α gegeben iſt.

Die Gleichung (IV.) giebt unmittelbar

1) $$\cot g\,\psi = \mu, \text{ alſo } \cos\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Die Gleichung (V.) giebt dann ſogleich

2) $$x' = x = \frac{W+G}{\sqrt{1+\mu^2}} = (W+G)\cdot\sin\psi,$$

ſo daß man für die Größe der Reibung erhält

3) $$\mu x' = \mu x = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdot(W+G) = (W+G)\cdot\cos\psi.$$

*) Nach (§. 82.) müſſen ſich drei Kräfte in einem und demſelben Punkte ſchneiden, wenn ſie in einer und derſelben Ebene liegen und einander das Gleichgewicht halten, und wenn zweie davon ſich bereits ſchneiden. Das Gewicht $W+G$ wirkt im Schwer-Punkt der ganzen Gabel, mit der daran hängenden Laſt; alſo muß die durch den Schwer-Punkt gehende Vertikale in ihrer Verlängerung nothwendig den Punkt N treffen.

Die Gleichungen (I. u. II.) reduciren sich dadurch, daß man statt x und μx diese Werthe $(W+G)\cdot\sin\psi$ und $(W+G)\cdot\cos\psi$ substituirt, auf

4) $$P\cdot\cos\alpha+T\cdot\cos\beta=0,$$

5) $$P\cdot\sin\alpha+T\cdot\sin\beta=W+R+G=L,$$

wenn L die Gesammtlast, aus der Last W, dem Gewichte R der Rolle und dem Gewichte G der Gabel bestehend, vorstellt.

Wird nun noch der Bequemlichkeit wegen

6) $$\frac{\varrho}{r}=\nu$$

gesetzt, so daß ν ein kleiner Bruch wird (etwa zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$), so findet man aus (5. und III.) unmittelbar

7) $$P=\frac{1+\nu\cdot\cos\psi\cdot\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\cdot L-\frac{\nu\cdot\cos\psi\cdot\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\cdot R,$$

oder, wenn man den letztern Theil außer Acht läßt, weil das Gewicht R der bloßen Rolle ohne die Gabel gegen die Gesammt-Last L in der Regel sehr klein ist,

8) $$P=\frac{1+\nu\cdot\cos\psi\cdot\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\cdot L \quad \text{(genähert)},$$

und dann noch

9) $$T=\frac{1-\nu\cdot\cos\psi\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}\cdot L+\frac{\nu\cdot\cos\psi\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}\cdot R,$$

wo das mit R behaftete Glied ebenfalls außer Acht gelassen werden kann. Substituirt man diese Werthe aus (7. u. 9.) statt P und T in die Gleichung (4.), so erhält man

10) $$\cos\alpha+\cos\beta-\nu\cdot\cos\psi\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot\frac{L-R}{L}=0.$$

Wird daher α gegeben, so liefert die Gleichung (10.) sogleich β dazu. — Die Gleichung (1.) giebt den Winkel ψ, der hier spitz wird. — Die Gleichung (9.) giebt den Druck (oder Zug) T an A, welcher die Spannung des Seils EA genannt wird; — und die Gleichung (7. oder 8.) liefert die Kraft P, welche die Gesammtlast L erhält, und zwar so, daß, wenn P um noch so wenig vergrößert wird, dann augenblicklich eine Erhebung der Last W wirklich erfolgt. — Dabei ist immer $P>T$, und nur für $\mu=0$ wird $P=T$.

Anmerkung 1. Betrachten wir namentlich den Fall, wo $\beta=\alpha=90^0$ vorausgesetzt ist, d. h. wo die Seile mit einander parallel und vertikal sind, und der für die Anwendungen der wichtigste ist. — Die Gleichungen für das Gleichgewicht der Rolle werden nun

I. $x \cdot \cos\psi - \mu x \cdot \sin\psi = 0,$

II. $R + x \cdot \sin\psi + \mu x \cdot \cos\psi = P + T$

III. $\mu x \cdot \varrho = (P - T) \cdot r,$

und diese geben sogleich, wenn $\frac{\varrho}{r} = \nu$ gesetzt wird,

1) $\operatorname{cotg}\psi = \mu,\ \cos\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},\ \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$

2) $P = \frac{1}{2} \cdot \left[(\sqrt{1+\mu^2} + \mu\nu) \cdot x + R\right],$

3) $T = \frac{1}{2} \cdot \left[(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\nu) \cdot x + R\right]$

und

4) $P - \frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{1+\mu^2} + \mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2} - \mu\nu} \cdot (T - \frac{1}{2}R).$

Die Gleichungen des Gleichgewichts an der Gabel bleiben dagegen ganz unverändert; also finden außer den vorstehenden (I. — III.) jetzt noch dieselben Gleichungen (IV. — VI.) statt, wie die des (§.), nämlich

IV. $\mu x' \cdot \sin\psi - x' \cdot \cos\psi = 0,$

V. $-\mu x' \cdot \cos\psi - x' \cdot \sin\psi + W + G = 0,$

VI. $x' = x.$

Die Gleichung (IV.) fällt dasmal mit der (I.) zusammen*). Die Gleichung (V.) dagegen giebt x' oder x, nämlich

5) $x = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot (W + G) = (W + G) \cdot \sin\psi;$

und substituirt man diesen Werth statt x in die Gleichung (2), so erhält man noch

6) $P = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) \cdot (W + G + R) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot R$

und

7) $T = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) \cdot (W + G + R) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot R.$

---

*) Geschähe das nicht, so enthielten sie beide einen Widerspruch, und dies wäre ein Beweis, daß man nicht $\beta = \alpha = 90°$ voraussetzen dürfe. In der That giebt aber die Gleichung (10.) des (§.) sobald man $\alpha = 90°$ setzt, sogleich $\beta = 90°$ dazu.

Anmerk. 2. Da das Gewicht R der bloßen Rolle, gegen W+G+R = L, in der Regel sehr klein ist, so kann man R gegen L und auch gegen P, T und x meist ganz außer Acht lassen, und dann erhält man in der Aufgabe der vorstehenden (Anmerk. 1.)

1) $colg\,\psi = \mu$; $cos\,\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$; $sin\,\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$;

2) $P = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{1+\mu^2}+\mu\nu)\cdot x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\nu\cdot cos\,\psi}{sin\,\psi}\cdot x$;

3) $T = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{1+\mu^2}-\mu\nu)\cdot x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\nu\cdot cos\,\psi}{sin\,\psi}\cdot x$;

4) $P = \frac{\sqrt{1+\mu^2}+\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu\nu}\cdot T = \frac{1+\nu\cdot cos\,\psi}{1-\nu\cdot cos\,\psi}\cdot T$;

5) $x = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdot L = L\cdot sin\,\psi$;

6) $P = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)\cdot L = \frac{1}{2}\cdot(1+\nu\cdot cos\,\psi)\cdot L$;

7) $T = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)\cdot L = \frac{1}{2}\cdot(1-\nu\cdot cos\,\psi)\cdot L$;

wo L die Gesammtlast ist, d. h. die Last W nebst noch dem Gewicht der Gabel und der Rolle *).

Anmerk. 3. Läßt man auch noch die Reibung außer Acht, d. h. setzt man $\mu = 0$, so wird in derselben Aufgabe noch

(⊙)··· $P = T = \frac{1}{2}L$;

und diesem Resultate nähern sich die (6. u. 7.) der (Anmerk. 2.) desto mehr, je kleiner μ und ν sind, d. h. von diesem letztern Resultate weichen die Resultate der vorstehenden (Anmerk. 2.), wo die Reibung noch berücksichtigt wird, desto weniger ab, je größer

*) Entwikkelt man $cos\,\psi$, d. h. $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$ in eine Reihe, die nach Potenzen von μ fortläuft, so erhält man

$$cos\,\psi = \mu - \tfrac{1}{2}\mu^3 + \tfrac{3}{8}\mu^5 - \cdots.$$

Ist nun μ nicht viel größer als $\frac{1}{10}$, so ist das mit μ^3 afficirte Glied ungefähr $\frac{1}{1000}$. Daher kann man in den meisten Anwendungen bloß μ statt $cos\,\psi$ setzen, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen.

des Halbmessers r der Rolle gegen den Halbmesser ρ des Bolzen, und je kleiner der Reibungs-Koefficient μ ist.

Anmerk. 4. Wir haben bisher vorausgesetzt, daß der Zweck der Rolle sey, die Last W mittelst der Kraft P empor zu heben. — Wäre dagegen ein andermal ein anderer Zweck vorhanden, nämlich die Last W mittelst der Kraft P so zu erhalten, daß die Last W könne nach und nach langsam herabgelassen werden, — so würde die beabsichtigte Bewegung der Rolle, und daher auch jede der Reibungen in gerade entgegengesetzter Richtung statt finden. Um jedoch für diesen Fall unserer Aufgabe nicht neue Rechnungen anstellen zu müssen, darf man nur in allen den Rechnungen des (§.) und der (Anmerkk.) — μ statt μ schreiben, weil sich der Ansatz der Aufgabe ebenfalls nicht weiter ändern wird, als daß die Glieder, welche den Faktor μ enthalten, mit den entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen eingehen. Daher bleiben die Formeln alle ganz unverändert, nur daß, $cotg\psi = -\mu$, also ψ stumpf und $cos\psi$ negativ wird. Es wird dann $P < T$; und auch im Falle $\beta = \alpha = 90°$ ist, $P < \frac{1}{2}L$, eben weil jetzt die Reibung der Kraft zu Gunsten kommt *).

§. 105.

Von der festen Rolle.

Wäre alles wie vorher im (§. 104.), aber der Bolzen absolut fest und statt T eine Last gedacht, so hätte man die feste Rolle. Für diese existiren also nur die Gleichungen (I. — III. des §. 104.), weil das Gleichgewicht der Gabel vorausgesetzt wird. Wir wollen dieselbe jedoch in der Lage der (Fig. 42.) näher betrachten.

Es sey (Fig. 42.) W die Last, P die Kraft, x der Gegen-Druck, μx die Reibung, CX horizontal, CY vertikal, Winkel

*) Einen, besonders wegen der großen Einfachheit und Eleganz der Rechnungen sehr lesenswerthen Aufsatz des Dr. G. S. Ohm (jetzt Professor an der polytechnischen Schule zu Nürnberg) über die lose Rolle, findet man in Crelle's Journal 1829. V. Bd. I. Heft.

NCX $= \psi$, W. DAX $= \alpha$, W. EBX $= \beta$, so sind die drei Gleichungen des Gleichgewichts, wenn wiederum R das Gewicht der Rolle (ohne Gabel) und r und ϱ die Halbmesser der Rolle und des Bolzens vorstellen,

$$\text{I.} \quad P\cdot\cos\alpha + W\cdot\cos\beta + x\cdot\cos\psi - \mu x\cdot\sin\psi = 0,$$

$$\text{II.} \quad -P\cdot\sin\alpha - W\cdot\sin\beta + x\cdot\sin\psi + \mu x\cdot\cos\psi - R = 0,$$

$$\text{III.} \quad W\cdot r + \mu x\cdot\varrho - P\cdot r = 0.$$

Dies ist der Ansatz der Aufgabe; und diese drei Gleichungen dienen zur Bestimmung des Winkels ψ, des Druckes x und der Kraft P, so daß, wenn P um noch so wenig größer genommen wird, sogleich eine Bewegung der Last W in der Richtung EB (nach oben) erfolgt.

Man findet aus diesen Gleichungen:

1) $$P = m\cdot W,$$

wo m aus μ, α, β, r und ϱ und aus dem Verhältniß von R zu W zusammengesetzt ist. Um dieses m am bequemsten zu finden, setze man

2) $$\frac{\varrho}{r} = \nu \qquad \text{und} \qquad 3) \quad \frac{R}{W} = \zeta,$$

so daß ν jedenfalls kleiner als 1 ist (zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$), während ζ in den meisten Anwendungen ein äußerst kleiner Bruch wird; finde dann aus (III.), indem man m·W statt P setzt,

4) $$x = \frac{m-1}{\mu\nu}\cdot W;$$

löse die Gleichungen (I. u. II.), nachdem man überall m·W statt P geschrieben hat, nach den beiden als unbekannt angesehenen Produkten $x\cdot\sin\psi$ und $x\cdot\cos\psi$ auf, substituire die gefundenen Ausdrücke in die Gleichung

$$(x\cdot\sin\psi)^2 + (x\cdot\cos\psi)^2 = x^2,$$

und setze zuletzt statt x seinen Werth aus (4.). Dann findet man für m die Gleichung

5) $$m^2 - 2\frac{1+\mu^2+\mu^2\nu^2\cdot(\cos(\beta-\alpha)+\zeta\cdot\sin\alpha)}{1+\mu^2-\mu^2\nu^2}\,m + \frac{1+\mu^2-\mu^2\nu^2\cdot(1+2\zeta\cdot\sin\beta+\zeta^2)}{1+\mu^2-\mu^2\nu^2} = 0,$$

woraus für m zwei Werthe sich ergeben, so daß man noch entscheiden muß, welcher von beiden der richtige ist.

Betrachtet man aber die Gleichung (5.), so findet man, daß sie sich nicht ändert, daß sie also auch noch für m dieselben Werthe liefert, wenn $-\mu$ statt μ gesetzt wird. Auf der andern Seite geben die Gleichungen (I. — III.), sobald $-\mu$ statt μ gesetzt wird, da bloß die Glieder ihr Zeichen ändern, in welche die Reibung eingeht, den Ansatz der andern Aufgabe, wo die

Reibung der Kraft P zu Gunsten gerechnet wird, d. h. wo man die Rolle an derjenigen Grenze des Gleichgewichts betrachten will, neben welcher sogleich eine Bewegung der Last nach unten erfolgt, sobald die Kraft P um noch so wenig verkleinert wird. Folglich gehört von den beiden Werthen von m, welche die Gleichung (5.) liefert, der **größere** zu der Aufgabe des (§.), der **kleinere** dagegen der hier zuletzt erwähnten Aufgabe an.

Gewöhnlich setzt man $\zeta = 0$, d. h. man läßt das Gewicht der Rolle (ohne Gabel) außer Acht. Auch kann man die mit ν^2 afficirten Glieder als sehr klein außer Acht lassen. Dann erhält man

6) $$m = 1 \pm \frac{2\mu\nu \cdot \cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad \text{(genähert)},$$

wo für die Aufgabe des (§.) das (+) Zeichen genommen wird; wo aber das (−) Zeichen genommen werden muß, wenn die zuletzt erwähnte Aufgabe gelöst werden soll, bei welcher sogleich Bewegung der Last W nach unten erfolgt, sobald P um noch so wenig kleiner genommen wird.

Zuletzt findet sich, wenn man die für $x \cdot \sin\psi$ und $x \cdot \cos\psi$ gefundenen Ausdrücke durch einander dividirt, für $\zeta = 0$, d. h. wenn man das Gewicht R der Rolle außer Acht läßt,

7) $$tg\,\psi = -\frac{m \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) + (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta)}{m \cdot (\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha) + (\cos\beta - \mu \cdot \sin\beta)}.$$

Anmerk. 1. Setzt man $\beta = 90°$ voraus, so wird m sich danach ändern, und es wird zuletzt noch, für $\zeta = 0$,

$$tg\,\psi = -\frac{m \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) + 1}{m \cdot (\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha) - \mu}.$$

Anmerk. 2. Ist aber $\alpha = 90°$ und $\beta = 90°$, so wird für $\zeta = 0$, d. h. wenn wiederum das Gewicht der Rolle außer Acht gelassen wird,

1) $$m = \frac{\sqrt{1+\mu^2} + \mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2} - \mu\nu} = \frac{1 + \nu \cdot \cos\psi}{1 - \nu \cdot \cos\psi},$$

oder, wenn man nach Potenzen von $\nu \cdot \cos\psi$ entwickelt, und die zweiten und höhern Potenzen außer Acht läßt,

2) $$m = 1 + 2\nu \cdot \cos\psi,$$

weil jetzt

3) $$cotg\,\psi = \mu, \quad \text{also} \quad \cos\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

wird. Dies stimmt genau mit der (Nr. 4. des §. 164. An-

merk. 2.), wo T das ist, was hier W. Auch stimmt dies genau mit (Nr. 6. des §.), wenn daselbst $\beta = \alpha$ gesetzt wird.

In diesen Werthen muß $-\mu$ statt μ gesetzt werden (so daß dann $\cos\psi$ mit $\cot g\psi$ zugleich negativ wird), so oft die Reibung im entgegengesetzten Sinne in Rechnung gebracht wird, so oft man also statt der im (§.) gegebenen, die zuletzt berührte Aufgabe lösen will.

Anmerk. 3. Man vergesse ja nicht, daß wir im vorstehenden (§. 105. und in den zugehörigen Anmerkungen) den Bolzen absolut fest vorausgesetzt haben. Wäre aber, wie solches in den Anwendungen oft der Fall ist, die Gabel in H um einen absolut festen Punkt beweglich, so daß sich die Gabel, also auch der Bolzen um den Punkt H noch drehen könnten, so wäre dies wieder die lose Rolle, d. h. in dem jetzt erwähnten Falle müßte man wiederum die Rolle für sich, und die Gabel für sich in's Gleichgewicht bringen. Um die Gabel in's Gleichgewicht zu bringen, muß man dem seiner Größe und Richtung nach unbekannten Druck in H, einen eben so großen Gegen-Druck T entgegensetzen, und es müssen sich die vier Kräfte, nämlich T in H, das Gewicht G der Gabel am Schwer-Punkte der letzteren, endlich x und μx am Zapfen, einander das Gleichgewicht halten. Dies giebt drei Gleichungen, und diese bestimmen gerade T, seiner Größe und Richtung nach, und noch die Lage der Gabel gegen den Horizont, alles in x und μ ausgedrückt. —

Wird nun aber auch die Rolle in das Gleichgewicht gebracht, so erhält man ganz genau die drei Gleichungen (I. — III. des §.) wieder, d. h. genau dieselben drei Gleichungen zur Bestimmung von ψ, x und der Kraft P, die man auch erhielt, als man den Bolzen absolut fest sich dachte.

Dies ist der Grund, warum man diesen Fall der Rolle noch mit zu den festen Rollen zählen kann.

§. 106.

Von den Rollenzügen.

Werden mehrere lose Rollen so hinter einander angebracht, wie dies in (Fig. 43.) zu sehen ist, so nennt man diese Vorrich-

tung einen Rollenzug (*système de poulies*). Die letzte, feste Rolle heißt Handrolle (*poulie de renvoi*) und kann auch fehlen.

Wir denken uns das Gewicht einer jeden dieser Rollen = R, das Gewicht einer jeden der Gabeln = G; wir setzen die Halbmesser der Bolzen alle = ϱ, und den Halbmesser einer jeden der Rollen = r, so wie $\frac{\varrho}{r} = \nu$. Wir setzen ferner voraus, daß alle Seile mit einander parallel und vertikal liegen, und daß der Reibungs-Koeffizient μ an jeder Rolle ein und derselbe bleibt. Endlich lassen wir, wie hier immer, die Steifigkeit der Seile außer Acht. — Unter allen diesen Voraussetzungen soll in (Fig. 43.) die Kraft P an der festen Rolle OM gefunden werden, welche mit der Last W an der Rolle EF das Gleichgewicht hält, jedoch so, daß sogleich eine Bewegung der Last W nach oben erfolgt, sobald P um noch so wenig größer genommen wird. —

Es seyen die Spannungen an den Seilen FH, NI und KO bezüglich durch T, T′ und T″ bezeichnet, so ist an der untersten Rolle, nach (§. 104. Anmerk. 1. Nr. 6. u. 7.), wenn

$$1 + \frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}} = n$$

gesetzt wird,

1) $$T = \tfrac{1}{2}n \cdot W + \tfrac{1}{2}n \cdot G + \tfrac{1}{2}R.$$

An der nächsten Rolle ist T die Last an der Gabel und T′ die Kraft, daher nach derselben (Nr. 6.)

2) $$T' = \tfrac{1}{2}n \cdot T + \tfrac{1}{2}n \cdot G + \tfrac{1}{2}R.$$

An der nächsten losen Rolle ist aus gleichem Grunde

3) $$T'' = \tfrac{1}{2}n \cdot T' + \tfrac{1}{2}n \cdot G + \tfrac{1}{2}R,$$

wo immer

4) $$n = 1 + \frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

ist. Endlich ist noch an der (festen) Handrolle nach (§. 104. Nr. 1. und 6.)

5) $$P = \left(1 + \frac{2\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) \cdot T''' \quad \text{(genähert)}.$$

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen die unbekannten drei Spannungen T, T′ und T″, so erhält man die gesuchte Gleichung, welche P in W liefert.

Lägen h solche lose Rollen hinter einander, und wäre die letzte Spannung an der letzten losen Rolle durch $T^{(h-1)}$ bezeichnet, so fände man h solche Gleichungen, wie die (1. — 3.), und die Elimination liefert dann

6) $$T^{(h-1)} = (\tfrac{1}{2}n)^h \cdot W + p \cdot G + q \cdot R,$$

wo p und q zwei geometrische Reihen vorstellen, nämlich bezüglich die Reihen

$$(\tfrac{1}{2}n)^h + (\tfrac{1}{2}n)^{h-1} + (\tfrac{1}{2}n)^{h-2} + \cdots + (\tfrac{1}{2}n)^2 + \tfrac{1}{2}n$$

und

$$\tfrac{1}{2}[(\tfrac{1}{2}n)^{h-1} + (\tfrac{1}{2}n)^{h-2} + \cdots + (\tfrac{1}{2}n)^2 + \tfrac{1}{2}n + 1],$$

so daß, wenn man diese geometrischen Reihen summirt,

7) $$p = \tfrac{1}{2}n \cdot \frac{1-(\frac{1}{2}n)^h}{1-\frac{1}{2}n} \quad \text{und} \quad q = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2}n)^h}{1-\frac{1}{2}n}$$

wird.

Wegen der Handrolle ist dann noch

8) $$P = \left(1 + \frac{2\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) \cdot T^{(h-1)} \quad \text{(genähert)}.$$

Die Gleichungen (6. 7. u. 8.) enthalten nun die vollständige Lösung des Problems für h lose Rollen.

Die Ausdrücke für p und q aus (7.) lassen übrigens erkennen, daß, wenn z. B. $\mu = \frac{1}{5}$, $\nu = \frac{1}{8}$ also $n = 1{,}02$, demnach $\frac{1}{2}n = 0{,}51$ ist, die Werthe von p und q, selbst für h unendlich groß kaum die Einheit übersteigen, für $h = 3, 4, 5, 6$ dagegen immer noch unter 1 sind, so daß, wenn man

9) $$T^{(h-1)} = (\tfrac{1}{2}n)^h \cdot W$$

nimmt, und dann noch um das Gewicht einer einzigen Rolle nebst Gabel vermehrt, dann die Spannung $T^{(h-1)}$ einen hinreichenden Grad von Genauigkeit hat. Nimmt man dann ...

10) $$P = \left(1 + \frac{2\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) \cdot (\tfrac{1}{2}n)^k \cdot W,$$

wo

$$n = 1 + \frac{\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

ist, und vermehrt man diesen Werth von P ebenfalls noch um das Gewicht einer einzigen Rolle nebst Gabel, so hat man auch P mit einem hinreichenden Grad von Genauigkeit bestimmt.

Wird endlich die Reibung außer Acht gelassen, d. h. wird $\mu = 0$ gesetzt, so findet sich, wenn das Gewicht G+R ebenfalls außer Acht gelassen wird,

11) $$P = \frac{1}{2^k} \cdot W,$$

welcher Werth von P jedoch bedeutend zu klein seyn kann, nämlich erstlich um den ganzen Einfluß der Reibung und dann noch überdieß um das Gewicht einer Rolle nebst Gabel.

Anmerk. Setzt man in allen diesen Untersuchungen statt $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$ d. h. statt $\mu - \frac{1}{2}\mu^3 + \frac{3}{8}\mu^5 - \cdots$ bloß das erste Glied μ dieser Reihe, so ist der Unterschied in der Regel nur sehr gering, weshalb solches in den meisten Fällen erlaubt ist.

§. 107.

Von den Flaschenzügen.

Befinden sich mehrere Rollen in einer gemeinschaftlichen Hülse (neben oder über einander), so heißt eine solche Verbindung der Rollen ein Kloben oder eine Flasche (Rechamus. *Mouffle*). Die Verbindung zweier Flaschen mittelst Seile heißt ein Flaschenzug (Polyspastus); und man unterscheidet noch die bewegliche Flasche von der unbeweglichen, gerade wie bei den Rollen die bewegliche Gabel von der unbeweglichen unterschieden wird.

Die Flaschenzüge können auf mancherlei Art angeordnet werden, wie die Figg. (44. 45. 46. und 47.) zeigen, während die Anordnung der (Fig. 44.) die gewöhnlichste ist. Auch können die Flaschen noch mehr Rollen enthalten. Endlich können die Rollen statt über einander, auch neben einander liegen.

Es werde der Flaschenzug (Fig. 44.) angewandt, um das Gewicht W (einschließlich des Gewichts der ganzen untern Flasche ohne die Rollen) als Last, mittelst der Kraft P in die Höhe zu heben. Man soll P finden, unter der Voraussetzung, daß P bereits die Reibung mit überwindet und mit W an der Grenze des Gleichgewichts steht, so daß augenblicklich die beabsichtigte Bewegung entsteht, sobald P um noch so wenig größer genommen wird.

Es sey R das Gewicht der Rolle, und $\nu = \frac{\varrho}{r}$ das Verhältniß der Halbmesser von Bolzen und Rolle bei jeder der beiden kleinern Rollen; dagegen R′ und $\nu' = \frac{\varrho'}{r'}$ bezüglich dasselbe in Bezug auf jede der beiden größern Rollen. Die Bolzen der obern Rollen werden als absolut fest angesehen, und die Seile alle mit einander parallel gedacht. Der Reibungs-Koeffizient μ soll bei allen Rollen ein und derselbe seyn.

Im Gleichgewicht erleidet jede der untern, losen Rollen einen Druck an einer unbekannten Stelle. Dieser Druck, bezüglich x und x′, wird in der entgegengesetzten Richtung gedacht, so daß seine Richtung mit einer horizontalen Axe OX bezüglich den Winkel ψ und ψ' bildet; außerdem werden noch die Reibungen, bezüglich μx und $\mu x'$, angebracht. Bezeichnet man nun noch die Spannungen der Seile, wie sie in der (Fig. 44.) zu sehen sind, mit T, T′, T″ und T‴, so muß jede der vier Rollen für sich im Gleichgewicht seyn, und die untere Flasche (ohne die Rollen) ebenfalls für sich in's Gleichgewicht gebracht werden.

Für das Gleichgewicht der Rolle (A.) liefern nun die Gleichungen (§. 104. Anmerk. 1. Nr. 1. 2. und 3.) sogleich

1) $\cot g\,\psi = \mu$, also $\cos\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$;

2) $T' = \frac{1}{2}(\sqrt{1+\mu^2}+\mu\nu)\cdot x + \frac{1}{2}R$;

3) $T = \frac{1}{2}(\sqrt{1+\mu^2}-\mu\nu)\cdot x + \frac{1}{2}R$.

Für das Gleichgewicht der Rolle (C.) geben dieselben Nummern noch

4) $\cot g\,\psi' = \mu$, also $\psi' = \psi$;

5) $T''' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\mu^2}+\mu\nu'\right)\cdot x' + \frac{1}{2}R'$;

6) $T'''' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\mu^2}-\mu\nu'\right)\cdot x' + \frac{1}{2}R'$.

Für das Gleichgewicht der Rolle (B.) hat man nach (§. 105. Nr. 1. und Anmerk. 2.)

7) $T'' = \frac{\sqrt{1+\mu^2}+\mu\nu}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu\nu}\cdot T'$ (genähert).

Für das Gleichgewicht der Rolle (D.) endlich hat man nach derselben Nummer,

8) $P = \frac{\sqrt{1+\mu^2}+\mu\nu'}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu\nu'}\cdot T'''$ (genähert.).

Was endlich das Gleichgewicht an der untern Flasche betrifft, so hält W am Schwer-Punkt der Last angebracht, das Gleichgewicht mit den beiden Drucken x, x', und den Reibungen μx und $\mu x'$, die Drucke und Reibungen in Richtungen gedacht, welche denen an den Rollen wirkenden und in der (Fig. 44.) zu sehenden, genau entgegengesetzt sind. Dies giebt drei Gleichungen, von denen die erste, nämlich

$$(x+x')\cdot\cos\psi - \mu(x+x')\cdot\sin\psi = 0$$

mit der (1.) zusammenfällt, die andere

$$(x+x')\cdot\sin\psi + (\mu x+\mu x')\cdot\cos\psi - W = 0$$

in diese

9) $(x+x')\cdot\sqrt{1+\mu^2} = W$ *)

übergeht, während die dritte (Momenten-Gleichung) die Lage der

*) Gewöhnlich wird vorausgesetzt, daß $x+x' = W$ sey, d. h. daß sich die Last W auf beide Rollen vertheile. Dann betrachtet man jede untere Rolle als eine lose Rolle, für welche man die End-Gleichungen zwischen Kraft und Last und zwischen Kraft und Spannung nehmen dürfe. Dem Allen ist aber, wie die obige Entwikkelung zeigt, nicht so, und man kann daher die gewöhnlichen Resultate nur als genäherte ansehen, welche jedoch in den Ziffern-Werthen von den hier erhaltenen nur wenig abweichen.

der Flasche gegen den Horizont bestimmt und hier nicht weiter beachtet zu werden braucht.

Diese neun Gleichungen bilden nun den Ansatz der Aufgabe. Sie dienen zur Bestimmung der neun Unbekannten ψ, ψ', x, x', T, T', T'', T''' und P. Eliminirt man die übrigen acht Unbekannten, außer P, so erhält man die einzige, gesuchte Gleichung zwischen P und W.

Um die Rechnungen bequemer durchführen zu können, mag man aus den Gleichungen (2. 3. 5. und 6.) die Theile $\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{2}R'$ ganz weglassen (wie dies in den Gleichungen 7. und 8. bereits geschehen ist), weil diese halben Gewichte der bloßen Rollen (ohne Gabeln) gegen die bei den Anwendungen des Flaschenzuges entstehenden Spannungen in der Regel ganz unbedeutend sind. Ferner denke man sich $\nu' = \nu$. Führt man dann noch statt μ lieber $cotg\,\psi$ ein, so daß

$$\sqrt{1+\mu^2} = cosec\,\psi = \frac{1}{\sin\psi},\quad \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \cos\psi$$

gesetzt werden kann, so werden die Gleichungen (3. 2. 6. 7. 5. 8. u. 9.) jetzt so

10) $$T = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{\sin\psi}\cdot x;$$

11) $$T' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1+\nu\cdot\cos\psi}{\sin\psi}\cdot x;$$

12) $$T'' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{\sin\psi}\cdot x';$$

auch

13) $$T'' = \frac{1+\nu\cdot\cos\psi}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot T';$$

14) $$T''' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1+\nu\cdot\cos\psi}{\sin\psi}\cdot x';$$

15) $$P = \frac{1+\nu\cdot\cos\psi}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot T''';$$

16) $$x+x' = W\cdot\sin\psi.$$

Findet man nun aus (11.) den Werth für x, aus (14.) den Werth für x', und substituirt man diese Werthe in (16.), so erhält man

17) $$T'+T''' = \tfrac{1}{2}\cdot(1+\nu\cdot\cos\psi)\cdot W.$$

Addirt man nachgehends die (13. u. 15.), so ergiebt sich

$$P+T'' = \frac{1+\nu\cdot\cos\psi}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot(T'+T'''),$$

oder vermöge der (17.)

18) $$P+T'' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1+\nu\cdot\cos\psi)^2}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot W.$$

Eliminirt man nun aus (12. 14. und 15.) sowohl x', als auch T''', so erhält man

19) $$T'' = \left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^2\cdot P;$$

und wird zuletzt dieser Werth von T'' in die (18.) substituirt, so ergiebt sich augenblicklich

$$\left[1+\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^2\right]\cdot P = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1+\nu\cdot\cos\psi)^2}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot W.$$

oder

20) $$P = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{(1+\nu\cdot\cos\psi)^4}{(1-\nu\cdot\cos\psi)(1+\nu^2\cdot\cos\psi^2)}\cdot W.$$

Entwikkelt man diesen Ausdruck rechts in eine nach Potenzen des sehr kleinen $\nu\cdot\cos\psi$ fortlaufende Reihe, und läßt man die zweiten und höhern Potenzen von $\nu\cdot\cos\psi$ außer Acht, so erhält man

21) $$P = \tfrac{1}{4}\cdot(1+5\nu\cdot\cos\psi)\cdot W.$$

Diese Ausdrücke für P nähern sich aber dem Werthe $\frac{1}{4}\cdot W$ desto mehr, je kleiner μ und ν sind, d. h. je kleiner der Einfluß der Reibung gemacht wird. Für $\mu = 0$ wird

$$P = \tfrac{1}{4}\cdot W\ *).$$

Anmerk. I. Denken wir uns einen ähnlichen Flaschenzug, der aber oben und unten drei Paar Rollen hat, und setzen wir alles eben so voraus, wie im (§.), so erhält man zuletzt diese End-Gleichung zwischen Kraft und Last

1) $$\left[1+\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^2+\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^4\right]\cdot P = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1+\nu\cdot\cos\psi)^2}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot W;$$

oder, wenn man wiederum den Koefficienten in dem Ausdruck für P in Reihen entwikkelt, die nach Potenzen von $\nu\cdot\cos\psi$ fortlaufen, und die zweiten und höheren Potenzen von $\nu\cdot\cos\psi$ außer Acht läßt,

2) $$P = \tfrac{1}{6}\cdot(1+7\nu\cdot\cos\psi)\cdot W.$$

Bei vier Paar Rollen oben und unten erhält man als Gleichung zwischen Kraft P und Last W

3) $$\left[1+\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^2+\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^4+\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^6\right]\cdot P = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1+\nu\cdot\cos\psi)^2}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot W,$$

*) Die gewöhnlichen Lehrbücher der Physik bringen dieses Resultat sogleich heraus. Sie sagen: Das Gewicht W wird von den vier, von unten nach oben gehenden Seilen gehalten; diese vier Seile sind gleich st

oder, wenn man P in Reihen entwikkelt, die nach Potenzen von $\nu \cdot \cos\psi$ fortlaufen und die zweiten und höheren Potenzen außer Acht läßt,

4) $$P = \tfrac{1}{8}\cdot(1+9\nu\cdot\cos\psi)\cdot W.$$

Allgemein: hat der Flaschenzug h Rollen unten und eben so viele oben, so findet sich als Gleichung zwischen Kraft und Last

$$(\odot)\cdots \left\{\frac{1-\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^{2h}}{1-\left(\frac{1-\nu\cdot\cos\psi}{1+\nu\cdot\cos\psi}\right)^{2}}\cdot\right\} P = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1+\nu\cdot\cos\psi)^2}{1-\nu\cdot\cos\psi}\cdot W,$$

woraus der genäherte Werth

$$(\mathbb{C})\cdots \quad P = \frac{1}{2h}\cdot\big(1+(2h+1)\nu\cdot\cos\psi\big)\cdot W$$

hervorgeht.

In allen diesen Formeln ist aber

$$\cos\psi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

und desto kleiner, je kleiner der Reibungs-Koefficient μ gemacht werden kann. Fast überall endlich kann man statt $\cos\psi$ oder $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, auch bloß μ setzen.

Ist $\mu = 0$, so wird

$$P = \frac{1}{2h}\cdot W\ *).$$

---

spannt; also trägt jedes den vierten Theil des Gewichts W. Die Kraft P ist endlich der Spannung der Seile gleich. — Die Spannungen an den Seilen sind aber in der That, wegen der Reibung, einander ungleich.

*) Dies Resultat sieht man häufig auch dadurch hervorgebracht, daß man sagt: bei h Rollen sind 2h Seile, welche die Last W tragen; also kommt auf jedes $\frac{1}{2h}\cdot W$. Die Kraft P muß aber der letzten Spannung das Gleichgewicht halten; also ist $P = \frac{1}{2h}\cdot W$.

Der Anfänger wird aber ausdrücklich bemerken, daß die Spannung an jedem folgenden Seilstück (der Reibung wegen) größer ist, als an dem vorhergehenden, daß also auch P größer wird.

Zweite Abtheilung.

Vom materiellen Hebel; vom Rad an der Welle; von den Winden (Göpeln) und Haspeln.

§. 108.

Vom materiellen Hebel.

Es sey ACB (Fig. 48.) ein materieller Hebel, der sich um den absolut festen Zapfen drehen kann, dessen Radius $CN = \varrho$ ist. Durch C seyen zwei auf einander senkrechte Axen CX und CY gelegt, und die Richtung der Last W, in B angebracht, mache mit der CX den Winkel β, die Kraft P mache mit CX den Winkel α, das Gewicht des Hebels sey $= G$ und an dessen Schwer-Punkt S angebracht, und mit der Richtung von G parallel (also vertikal) liege CY (so daß CX horizontal liegt). Der Mittel-Punkt C des Zapfens stehe senkrecht von den Richtungen der Kräfte P, W und G bezüglich um R, r und q ab. Alle Winkel α, β, ꝛc. werden von CX nach CY hin von 0 bis 360° gezählt. — Man soll die Gleichung zwischen P und W finden an der Grenze des Gleichgewichts, so daß P bereits die Reibung mit überwindet.

Es sey N die Stelle des Druckes, dessen Gegen-Druck x in der Richtung CN wirkt, und diese Richtung CN mache mit CX den Winkel ψ; die Reibung μx wirkt senkrecht darauf. Da (§. 36.) giebt nun sogleich die drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

$$\text{I.}\quad P\cdot\cos\alpha + W\cdot\cos\beta + x\cdot\cos\psi + \mu x\cdot\sin\psi\ ^{*}) = 0;$$

$$\text{II.}\quad P\cdot\sin\alpha + W\cdot\sin\beta + x\cdot\sin\psi - \mu x\cdot\cos\psi + G = 0;$$

$$\text{III.}\quad P\cdot R + G\cdot q - W\cdot r - \mu x\cdot\varrho = 0.$$

---

*) Der Figur nach ist der Winkel ψ im dritten Quadranten gedacht. Wo er wirklich liegt kann aber erst die End-Rechnung geben. Die Reibung μx macht mit der Axe CX den Winkel $\psi - 90°$.

Diese drei Gleichungen bilden nun den Ansatz der Aufgabe und ihre algebraische Auflösung giebt ψ, x und P.

Um diese Gleichungen aufzulösen, finde man zuerst aus den beiden Gleichungen (I. u. II.) die beiden Unbekannten $x \cdot \sin\psi$ und $x \cdot \cos\psi$. Dies giebt

1) $-x \cdot \sin\psi \cdot (1+\mu^2) = P \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) + W \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta) + G,$

2) $-x \cdot \cos\psi \cdot (1+\mu^2) = P \cdot (\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha) + W \cdot (\cos\beta - \mu \cdot \sin\beta) - \mu G.$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so kann man links und rechts durch $1+\mu^2$ wegdividiren, und man erhält

3) $(1+\mu^2) \cdot x^2 = P^2 + W^2 + 2PW \cdot \cos(\beta-\alpha) + 2GP \cdot \sin\alpha + 2GW \cdot \sin\beta + G^2.$

Findet man nun aus (III.)

4) $$x = \frac{P \cdot R + G \cdot q - W \cdot r}{\mu \cdot \varrho},$$

und substituirt man diesen Werth in die (3.), so hat man, wenn $\frac{\mu^2}{1+\mu^2} = k^2$ gesetzt wird

5) $(R^2 - k^2 \cdot \varrho^2) \cdot P^2 - 2 \cdot [(Rr + k^2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos(\beta-\alpha)) \cdot W - (Rq - k^2 \cdot \varrho^2 \cdot \sin\alpha) \cdot G] \cdot P$
$= -(r^2 - k^2 \cdot \varrho^2) \cdot W^2 - (q^2 - k^2 \cdot \varrho^2) \cdot G^2 + 2(qr + k^2 \cdot \varrho^2 \cdot \sin\beta) \cdot WG.$

Diese Gleichung, wenn man sie auflöst, giebt für P zwei Werthe, von denen der größere der gesuchte ist, während der kleinere jener anderen Aufgabe angehört, wo das Gleichgewicht an der andern Grenze gesucht wird, nämlich so, daß sogleich eine Bewegung im Sinne der Last W erfolgt, sobald P um noch so wenig kleiner genommen wird *).

Setzt man in dieser Gleichung (5.) $\frac{G}{W} = \zeta$, $\frac{P}{W} = m$, $R = r$ und auch noch $q = 0$, so muß sie in die Gleichung (5. des §. 105.) für die feste Rolle übergehen, weil in der That jene Aufgabe des (§. 105.) dieser besondere Fall der hiesigen Aufgabe ist.

Anmerk. Läßt man das Gewicht G des Hebels außer

*) Der Grund davon ist der, daß für diese zweite Aufgabe dieselben Gleichungen (I. — III.) als Ansatz der Aufgabe, sich ergeben, nur daß $-\mu$ statt μ zu stehen kommt. Weil aber k^2, wenn $-\mu$ statt μ gesetzt wird, seinen Werth nicht ändert, so wird man in beiden Aufgaben zu derselben Gleichung (5.) geführt. Die Gleichung (5.) muß also die Auflösung beider enthalten.

Acht, was jedoch nur dann geschehen kann, wenn die Last W sehr bedeutend ist, so geht die hiesige Gleichung (5.) in

$$P^2\cdot(R^2-k^2\cdot\varrho^2)-2P\cdot W\cdot(Rr+k^2\cdot\varrho^2\cdot\cos(\beta-\alpha))+W^2(r^2-k^2\varrho^2)=0$$

über und giebt

$$P=\frac{Rr+k^2\varrho^2\cdot\cos(\beta-\alpha)\pm\sqrt{(Rr+k^2\varrho^2\cdot\cos(\beta-\alpha))^2-(R^2-k^2\varrho^2)(r^2-k^2\varrho^2)}}{R^2-k^2\varrho^2}\cdot W.$$

Ist dabei zu gleicher Zeit noch $\beta=\alpha$, so geht diese Gleichung über in

$$P=\frac{Rr+k^2\varrho^2\pm(R+r)\cdot k\varrho}{R^2-k^2\varrho^2}\cdot W=\frac{r\pm x\varrho}{R\mp x\varrho}\cdot W\ *),$$

wo jedesmal das obere (+) Zeichen genommen werden muß, im Falle unserer hiesigen Aufgabe, wo aber das untere (—) Zeichen für den Fall der andern kurz vorher erwähnten Aufgabe, wo die Reibung zu Gunsten der Kraft gerechnet wird, zu nehmen ist.

Wir wollen jetzt noch einige besondere Gattungen des Hebels betrachten.

§. 109.

Vom Rade an der Welle.

An einem Cylinder AB (Fig. 49.), welcher eine Welle (Axis) genannt wird, ist eine kreisförmige Scheibe DE, welche Rad (Peritrochium, *Roue*) heißt, dergestalt befestigt, daß die Axe der Welle auf der Fläche des Rades senkrecht steht. An den Enden der Welle bei F und G sind Zapfen (*Tourillons*) in der verlängerten Well-Axe angebracht, welche auf Zapfenlagern oder Pfannen (*Sous-bandes*) fest liegen, und sich in denselben leicht umdrehen können. Diese Einrichtung heißt ein Rad an der Welle (Axis in peritrochio, *Axe dans une roue*). Gewöhnlich wirkt am Umfange des Rades nach der

*) Dieses Resultat geht in die (6. des §. 105.) über, sobald hier R = r und dort $\beta=\alpha$ gesetzt wird; wie solches seyn muß. Dasselbe Resultat geht auch unmittelbar in das Resultat der (Nr. 1. Anmerk. 2. §. 105.) über, wie sich solches von selbst versteht, sobald R = r gesetzt wird.

Richtung der Tangente eine Kraft P, die einer Laſt W das Gleichgewicht halten ſoll, welche an dem Umfange der Welle (oder auch an einem zweiten mit der Welle eben ſo in Verbindung ſtehenden Rade) ebenfalls in der Richtung der Tangente wirkt. —

Liegt die Welle horizontal, ſo wird dieſes Rad an der Welle in's beſondere Haspel (Sucula, *Treuil*, *Tour*) genannt. Steht aber die Welle vertikal, ſo hat man eine Winde oder ein Göpel (Ergata, *Cabestan*).

§. 110.

Vom Haspel.

Soll nun die Gleichgewichts-Gleichung zwiſchen Kraft P und Laſt W geſucht werden, an einem Haspel (d. h. an dem Rad an der Welle (Fig. 49.), deſſen Welle horizontal liegt), und will man dabei vorausſetzen, daß ſtatt der beiden Zapfen ein Bolzen in der Mitte des Rades gedacht werden könne, ſo iſt dies wiederum genau die Aufgabe des (§. 108.), nur mit dem Unterſchiede, daß hier G das Gewicht des Rades an der Welle, q dagegen der Null gleich iſt, weil der Schwer-Punkt des Hebels jetzt mit dem Mittel-Punkt der Drehung zuſammenfällt. Wenn daher R der Halbmeſſer des Rades, r der der Welle und ϱ der des Zapfens iſt, wenn ferner

$$\frac{\mu^2}{1+\mu^2} = k^2$$

geſetzt wird, ſo wird die Gleichung zwiſchen P und W jetzt nach (§. 108. Nr. 5.) folgende:

1) $$P^2 - 2P \cdot \frac{RrW + k^2\varrho^2 \cdot [W \cdot \cos(\beta - \alpha) + G \cdot \sin\alpha]}{R^2 - k^2\varrho^2} + \frac{r^2W^2 - k^2\varrho^2(W^2 + G^2 + 2WG \cdot \sin\beta)}{R^2 - k^2\varrho^2} = 0,$$

wenn α und β die Winkel ſind, welche P und W mit einer horizontalen Koordinaten-Axe, wie wir ſolche uns im (§. 108.) gedacht haben, machen. Der Winkel $\beta - \alpha$ iſt dann derjenige, welchen die Richtungen von Kraft und Laſt unter ſich machen.

Von den zwei Werthen, welche diese Gleichung für P liefert, gehört der größere zu unserer Aufgabe, während der kleinere die nöthige Kraft an der andern Grenze des Gleichgewichts ausdrückt (wo die Reibung der Kraft zu Gunsten gerechnet wird *).

Setzt man

$$\frac{r}{R} = \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\varrho}{R} = \nu,$$

wo $\varepsilon < 1$, dagegen ν in der Regel schon sehr klein ist, so wird dieselbe Gleichung auch so geschrieben werden können,

$$2)\ P^2 - 2P\cdot\frac{\varepsilon\cdot W + k^2\nu^2\cdot[W\cdot\cos(\beta-\alpha) + G\cdot\sin\alpha]}{1-k^2\nu^2} + \frac{\varepsilon^2\cdot W^2 - k^2\nu^2\cdot(W^2+G^2+2WG\cdot\sin\beta)}{1-k^2\nu^2} = 0,$$

welcher Gleichung man sogleich ansieht, daß die Nenner $1-k^2\nu^2$, welche von 1 so sehr wenig verschieden sind, ganz weggelassen werden können.

Anmerk. 1. I. Wirkt die Last W vertikal nach unten, so ist $\beta = 90°$, $\sin\beta = 1$, $\cos(\beta-\alpha) = \sin\alpha$.

Ist dann zu gleicher Zeit die Kraft P vertikal nach oben gerichtet, so ist $\alpha = 270°$, $\sin\alpha = -1$, und man findet dann

$$1)\ P = \frac{r\cdot W \pm k\varrho(W+G)}{R \pm k\varrho} = \frac{\varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot(W+G)}{1\pm k\nu},$$

Entwikkelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von ν, und läßt man die zweiten und höheren Potenzen außer Acht, so wird

$$2)\quad P = \varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot[(1-\varepsilon)W+G] \quad \text{(genähert)},$$

wo

---

*) Dieser Werth von P, wie er der hiesigen Aufgabe entspricht, wird unter übrigens gleichen Umständen der kleinste, wenn $\cos(\beta-\alpha) = -1$, d. h. wenn $\beta-\alpha = 180°$ ist, d. h. wenn die Kraft mit der Last parallel aber genau entgegen wirkt. — Dagegen erhält dasselbe P seinen größten Werth, wenn $\beta-\alpha = 0$, d. h. wenn Kraft mit Last parallel und in einerlei Sinne wirkt.

$$\varepsilon = \frac{r}{R}, \quad \nu = \frac{\varrho}{R} \text{ und } k = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

ist, so daß man, ohne viel zu fehlen, auch bloß μ statt k schreiben kann.

II. Sind aber Kraft und Last vertikal nach unten gerichtet, so ist $\beta = \alpha = 90^0$, $\sin\beta = \sin\alpha = 1$ und $\cos(\beta-\alpha) = 1$, und man hat dann

$$1)\ P = \frac{r\cdot W \pm k\varrho\cdot(W+G)}{R \mp k\varrho} = \frac{\varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot(W+G)}{1 \mp k\nu},$$

oder, wenn man wieder nach Potenzen von ν entwikkelt,

$$2)\ P = \varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot[(1+\varepsilon)W+G] \text{ (genähert).}$$

III. Ist die Last W noch immer vertikal nach unten gerichtet, dagegen die Kraft P horizontal, so ist $\sin\alpha = 0$, und es wird dann, wenn man $k^4\nu^4$ außer Acht läßt,

$$P = \frac{\varepsilon\cdot W + k\nu\cdot\sqrt{(W+G)^2+\varepsilon^2\cdot W^2}}{1-k^2\nu^2},$$

wo man auch $k^2\nu^2$ im Nenner gegen $k\nu$ außer Acht lassen kann, so daß der Nenner ganz wegfällt.

Anmerk. 2. I. Ist die Last W vertikal nach oben gerichtet, so ist $\beta = 270^0$, also $\cos(\beta-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\sin\beta = -1$.

Ist nun zu gleicher Zeit die Kraft P vertikal nach oben gerichtet, so hat man noch $\alpha = 270^0$, $\sin\alpha = -1$, und man erhält:

$$1)\ P = \frac{r\cdot W \pm k\varrho\cdot(W-G)}{R \mp k\varrho} = \frac{\varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot(W-G)}{1 \mp k\nu},$$

oder

$$2)\ P = \varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot[(1+\varepsilon)W-G] \text{ (genähert).}$$

II. Wirkt die Last W noch immer vertikal nach oben, aber die Kraft P vertikal nach unten, so hat man $\alpha = 90^0$, $\sin\alpha = 1$, und es wird

$$1)\ P = \frac{r\cdot W \pm k\varrho\cdot(W-G)}{R \pm k\varrho} = \frac{\varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot(W-G)}{1 \pm k\nu}$$

und

$$2)\ P = \varepsilon\cdot W \pm k\nu\cdot[(1-\varepsilon)W-G] \text{ (genähert).}$$

III. Ist endlich noch immer die Last W vertikal nach oben gerichtet, aber die Kraft P horizontal, so ist $\sin\alpha = 0$ und, wenn man $k^4\nu^4$ außer Acht läßt,

$$P = \frac{\varepsilon \cdot W + k\nu \cdot \sqrt{(W-G)^2 + \varepsilon^2 \cdot W^2}}{1 - k^2\nu^2},$$

wo man wiederum den Nenner $1 - k^2\nu^2$ ganz weglassen kann.

§. 111.

Von der Winde (Göpel).

I. Denkt man sich nun dasselbe Rad an der Welle (Fig. 49.) so gestellt, daß seine Axe vertikal steht, so tritt zu den übrigen Kräften noch die Reibung der untern kreisförmigen und horizontalen Fläche des Zapfens auf der horizontalen Unterlage hinzu, und die Kraft hat diese Reibung noch mit zu überwinden.

II. Wir wollen zu dem Ende das statische Moment dieser Reibung in Bezug auf den Mittel-Punkt der Drehung, als Centrum des Momentes gedacht, bestimmen. Zu dem Ende denken wir uns das Gewicht G des Rades an der Welle auf der Grundfläche $\varrho^2\pi$ des Zapfens gleichmäßig vertheilt, so daß auf ein Polar-Element, dessen Fläche $r \cdot dr \cdot dv$ ist, (unter r und v auf einen Augenblick die Polar-Koordinaten eines unendlich-kleinen Flächen-Elementes dieses Kreises verstanden) der Druck

$$\frac{r \cdot dr \cdot dv \times G}{\varrho^2\pi}$$

kommt. Die Reibung ist das μfache dieses Druckes, und das statische Moment der Reibung ist daher das μ-fache dieses Druckes, d. h.

$$= \frac{\mu G}{\varrho^2\pi} \cdot r^2 \cdot dr \cdot dv.$$

Integrirt man nun nach v zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhält man

$$\frac{2\mu \cdot G}{\varrho^2} \cdot r^2 \cdot dr$$

für die Summe der statischen Momente der Reibungen eines

concentrischen Kreisringes, dessen Radien r und r+dr sind. Integrirt man diesen Ausdruck noch einmal nach r zwischen den Grenzen 0 und ϱ, so erhält man

(⊙)··· $\frac{2}{3}\mu G\cdot\varrho$, oder $\mu G\cdot\frac{2}{3}\varrho$

für die Summe der statischen Momente aller Reibungen auf der ganzen Grundfläche des Zapfens.

Das statische Moment der Reibung der kreisförmigen Grundfläche des Zapfens in Bezug auf den Mittel-Punkt der Drehung als Centrum der Momente genommen, ist daher gerade so, wie wenn die Reibung μG an einer einzigen Stelle wirksam wäre, die um $\frac{2}{3}\varrho$ vom Mittel-Punkt der Drehung entfernt liegt.

III. Behandeln wir nun unsere Aufgabe, wie dies seyn muß, als eine solche, wo mehrere Kräfte im Raume wirken (deren Richtungen nicht alle in einer und derselben Ebene liegen). Wir denken uns zu dem Ende die Axe FG (Fig. 49.) vertikal gestellt, so daß F unten, G oben liegt, und mit ihr die dritte Koordinaten-Axe FZ zusammenfallend; wir legen durch den Mittel-Punkt F des untern Zapfen-Endes noch zwei Koordinaten-Axen FX und FY horizontal, so daß die Kraft P und die Last W mit der FX die Winkel α und β machen, dabei aber α spitz und $\beta > \alpha$ wird. Im Zustande des Gleichgewichts wird jeder Zapfen an sein Zapfenlager seiner ganzen Länge nach gedrückt. Diesen Druck kann man in der Mitte des Zapfens an seiner Oberfläche vereint denken; und wir bringen einen eben so großen Gegen-Druck an, der nach FZ hin, auf die Oberfläche des Zapfens normal wirkt. Sind x und x' diese beiden Gegen-Drucke an dem untern und obern Zapfen, und sind ψ und ψ' bezüglich die Winkel, welche ihre Richtungen mit der FX machen (alle Winkel von der FX nach FY hin von 0 bis 360° gezählt), so sind μx und $\mu x'$ die Reibungen, deren Richtungen mit FX bezüglich die Winkel $\psi - 90°$ und $\psi' - 90°$ machen. Bringt man nun noch an F einen, dem vertikalen Druck nach unten gleichen Gegen-Druck z nach

oben an, so müssen sich die Kräfte x, x', μx, $\mu x'$, z, G, P und W einander das Gleichgewicht halten, wo unter G wiederum das Gewicht der Winde verstanden wird. Die sechs Gleichungen des Gleichgewichts, welche die (§§. 26. u. 29.) liefern, dienen nun zur Bestimmung der unbekannten Drucke x und x', ihrer Richtungen ψ und ψ', des Druckes z und der Kraft P.

Um aber diese sechs Gleichgewichts-Gleichungen schreiben zu können, sey noch l die Länge eines jeden der Zapfen, h die Höhe der Winde (ohne Zapfen), H die Höhe derselben mit den Zapfen, und b und a die Abstände der Angriffs-Punkte von Last W und Kraft P von dem Horizont XFY (so daß nach der Zeichnung $a > b$ ist). Die Koordinaten-Werthe der Angriffs-Punkte der Kräfte

$$x \text{ und } \mu x; \qquad x' \text{ und } \mu x'; \qquad P$$

sind daher bezüglich

$$-\varrho\cdot\cos\psi,\ -\varrho\cdot\sin\psi,\ \tfrac{1}{2}l; \qquad -\varrho\cdot\cos\psi',\ -\varrho\cdot\sin\psi',\ h+\tfrac{1}{2}l;$$
$$-R\cdot\sin\alpha,\ +R\cdot\cos\alpha,\ a;$$

die der Last W sind dagegen $+r\cdot\sin\beta$, $-r\cdot\cos\beta$, b.

Nimmt man nun zuerst die Summe der Kräfte nach den drei Axen der Null gleich, so erhält man, weil die nach den Axen zerlegten Reibungen auf der horizontalen Kreisfläche des Zapfens rings herum statt finden, also sich paarweise in den Richtungen der Axen FX und FY aufheben,

1) $P\cdot\cos\alpha + W\cdot\cos\beta + x\cdot(\cos\psi + \mu\cdot\sin\psi) + x'\cdot(\cos\psi' + \mu\cdot\sin\psi') = 0;$

2) $P\cdot\sin\alpha + W\cdot\sin\beta + x\cdot(\sin\psi - \mu\cdot\cos\psi) + x'\cdot(\sin\psi' - \mu\cdot\cos\psi') = 0;$

3) $z - W = 0.$

Die drei Momenten-Gleichungen bezüglich um die Axen FZ, FY und FX werden dagegen

4) $P\cdot R - W\cdot r - \mu(x + x')\cdot\varrho - \tfrac{2}{3}\mu G\cdot\varrho = 0,$

in so ferne das Reibungs-Moment an der Grundfläche des Zapfens nach (II.) genommen wird; ferner

5) $P\cdot a\cdot\cos\alpha + W\cdot b\cdot\cos\beta + \tfrac{1}{2}l\cdot x\cdot(\cos\psi + \mu\cdot\sin\psi) + (h+\tfrac{3}{2}l)\cdot x'\cdot(\cos\psi' + \mu\cdot\sin\psi') = 0;$

6) $P\cdot a\cdot\sin\alpha + W\cdot b\cdot\sin\beta + \frac{1}{2}lx\cdot(\sin\psi - \mu\cdot\cos\psi) + (h+\frac{3}{2}l)\cdot x'\cdot(\sin\psi' - \mu\cdot\cos\psi') = 0.$

Dieſe ſechs Gleichungen bilden nun den Anſatz der Aufgabe. Sie liefern die ſechs Unbekannten x, x', ψ, ψ', z und P.

Die Auflöſung dieſer ſechs Gleichungen macht ſich am bequemſten, wenn man aus (1. 2. 5. und 6.) die vier unbekannten Ausdrücke

$$x\cdot(\cos\psi + \mu\cdot\sin\psi),\quad x\cdot(\sin\psi - \mu\cdot\cos\psi),\quad x'\cdot(\cos\psi' + \mu\cdot\sin\psi'),\quad x'\cdot(\sin\psi' - \mu\cdot\cos\psi')$$

auf algebraiſchem Wege findet, dann die beiden erſtern derſelben quadrirt und addirt, wodurch man x^2, alſo x erhält; eben ſo die beiden letztern quadrirt und addirt, wodurch x'^2, alſo auch x' gefunden wird (alles in P und W ausgedrückt); zuletzt aber dieſe Werthe für x und x' in die Gleichung (4.) ſubſtituirt. Dieſe End-Gleichung zwiſchen P und W giebt dann P in W ausgedrückt.

Man findet auf dieſem Wege

7) $x\cdot(\cos\psi + \mu\cdot\sin\psi) = -\dfrac{P\cdot(h+\frac{3}{2}l-a)\cdot\cos\alpha + W\cdot(h+\frac{3}{2}l-b)\cdot\cos\beta}{h+l}$;

8) $x\cdot(\sin\psi - \mu\cdot\cos\psi) = -\dfrac{P\cdot(h+\frac{3}{2}l-a)\cdot\sin\alpha + W\cdot(h+\frac{3}{2}l-b)\cdot\sin\beta}{h+l}$;

9) $x'\cdot(\cos\psi' + \mu\cdot\sin\psi') = -\dfrac{P\cdot(a-\frac{1}{2}l)\cdot\cos\alpha + W\cdot(b-\frac{1}{2}l)\cdot\cos\beta}{h+l}$;

10) $x'\cdot(\sin\psi' - \mu\cdot\cos\psi') = -\dfrac{P\cdot(a-\frac{1}{2}l)\cdot\sin\alpha + W\cdot(b-\frac{1}{2}l)\cdot\sin\beta}{h+l}$;

11) $(h+l)^2(1+\mu^2)\cdot x^2 = P^2\cdot(h+\frac{3}{2}l-a)^2 + W^2\cdot(h+\frac{3}{2}l-b)^2 + 2PW\cdot(h+\frac{3}{2}l-a)\cdot(h+\frac{3}{2}l-b)\cdot\cos(\beta-\alpha)$;

12) $(h+l)^2(1+\mu^2)\cdot x'^2 = P^2\cdot(a-\frac{1}{2}l)^2 + W^2\cdot(b-\frac{1}{2}l)^2 + 2PW\cdot(a-\frac{1}{2}l)\cdot(b-\frac{1}{2}l)\cdot\cos(\beta-\alpha)$.

Weil aber nun aus (11. u. 12.) ſowohl für x als auch für x' Wurzel-Ausdrücke gefunden werden, ſo wird die Gleichung (4.), wenn man dieſe Werthe ſtatt x und x' ſubſtituirt, ſehr verwikkelt, und, wenn man beide Wurzeln wegſchafft, nach P vom vierten Grade.

Statt daher die allgemeine Auflöſung der Aufgabe weiter zu verfolgen, wollen wir lieber noch einige ſpecielle Fälle derſelben näher betrachten, nämlich die Fälle: 1) wenn ſich aus (11. u. 12.) ſowohl x als x' rational zeigen, und 2) wenn x und x' einander gleich werden.

Man ſetze zu dem Ende

1) zuerſt $\cos(\beta-\alpha) = \pm 1$,

d. h. $\beta-\alpha = 0$, oder $\beta-\alpha = 180°$

voraus, d. h. man ſetze voraus, daß Kraft und Laſt mit einan-

der parallel und entweder in demſelben Sinne ($\beta = \alpha$), oder in genau entgegengeſetztem Sinne ($\beta - \alpha = 180°$) wirken. Für $\beta = \alpha$ geben die Gleichungen (11. u. 12.) ſogleich

$$x = \frac{P\cdot(h+\frac{3}{2}l-a)+W\cdot(h+\frac{3}{2}l-b)}{(h+l)\cdot\sqrt{1+\mu^2}},$$

$$x' = \frac{P\cdot(a-\frac{1}{2}l)+W\cdot(b-\frac{1}{2}l)}{(h+l)\cdot\sqrt{1+\mu^2}},$$

alſo

$$x+x' = \frac{P+W}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Die Gleichung (4.) wird nun

$$P\cdot R - W\cdot r - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdot\varrho\cdot(P+W) - \tfrac{2}{3}\mu\varrho\cdot G = 0,$$

und dieſe giebt, wenn wiederum

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = k, \quad \frac{r}{R} = \varepsilon \text{ und } \frac{\varrho}{R} = \nu$$

geſetzt wird,

$$P = \frac{(\varepsilon+k\nu)\cdot W+\frac{2}{3}\mu\nu\cdot G}{1-k\nu}.$$

Dies iſt alſo das Reſultat für den Fall, daß Kraft und Laſt mit einander parallel und in einem und demſelben Sinne wirken.

2) Wird aber $\beta - \alpha = 180°$, folglich $\cos(\beta-\alpha) = -1$ geſetzt, ſo findet ſich

$$x = \frac{-P\cdot(h+\frac{3}{2}l-a)+W\cdot(h+\frac{3}{2}l-b)}{(h+l)\cdot\sqrt{1+\mu^2}},$$

$$x' = \frac{-P\cdot(a-\frac{1}{2}l)+W\cdot(b-\frac{1}{2}l)}{(h+l)\cdot\sqrt{1+\mu^2}},$$

folglich

$$x+x' = \frac{-P+W}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

und die Gleichung (4.) giebt alſo dasmal

$$P\cdot R - W\cdot r + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdot\varrho\cdot P - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdot\varrho\cdot W - \tfrac{2}{3}\mu\varrho\cdot G = 0,$$

oder

$$P = \frac{(\varepsilon + k\nu)\cdot W + \frac{2}{3}\mu\nu\cdot G}{1 + k\nu},$$

wo

$$k = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \varepsilon = \frac{r}{R} \text{ und } \nu = \frac{\varrho}{R}$$

ist.

3) Suchen wir endlich den Fall noch auf, wo die beiden Drucke x und x' einander gleich werden. Er hat den Gleichungen (11. u. 12.) zu Folge statt, so oft

$$h + \tfrac{3}{2}l - a = a - \tfrac{1}{2}l \text{ und } h + \tfrac{3}{2}l - b = b - \tfrac{1}{2}l,$$

d. h. $$a = b = l + \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}H$$

ist, also so oft Kraft und Last genau in der Mitte der Welle angebracht sind. — Die Gleichungen (11. u. 12.) geben dann

$$x = x' = \frac{1}{2\sqrt{1+\mu^2}}\cdot\sqrt{P^2 + W^2 + 2PW\cdot\cos(\beta - \alpha)},$$

und die Gleichung (4.) wird nun, wenn $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = k$ gesetzt wird,

$$k\varrho\cdot\sqrt{P^2 + W^2 + 2PW\cdot\cos(\beta-\alpha)} = P\cdot R - W\cdot r - \tfrac{2}{3}\mu\varrho\cdot G,$$

oder, wenn man solche nach P ordnet, auch

$$\frac{r}{R} = \varepsilon \text{ und } \frac{\varrho}{R} = \nu$$

setzt,

$$P^2 - 2P\cdot\frac{[\varepsilon + k^2\nu^2\cdot\cos(\beta-\alpha)]\cdot W + \frac{2}{3}\mu\nu\cdot G}{1 - k^2\nu^2} + \frac{(\varepsilon^2 - k^2\nu^2)\cdot W^2 + \frac{4}{3}\mu\nu\varepsilon\cdot GW + \frac{4}{9}\mu^2\nu^2\cdot G^2}{1 - k^2\nu^2} = 0,$$

in welcher Gleichung der Nenner $1 - k^2\nu^2$, weil er so sehr nahe $= 1$ ist, ganz weggelassen werden kann.

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (§. 110. Nr. 2., welche wir unter derselben Voraussetzung, daß die Drucke x und x' auf beide Zapfen gleich sind, daß daher der Gesammt-Druck auf einen einzigen fingirten Zapfen in der Mitte vereint gedacht werden kann, für den Haspel erhalten haben) nur in

ſo ferne, als der Theil der Reibung, welcher von dem Gewichte G der Maſchine abhängt, hier etwas anders eingehen mußte. Die jetzige Rechnung zeigt daher, wie der Haspel hätte eigentlich behandelt werden müſſen, zeigt aber zu gleicher Zeit, daß die dort, der Erleichterung der Rechnung wegen gemachte Vorausſetzung wenigſtens dann gerechtfertigt iſt, wenn man Kraft und Laſt möglichſt in der Mitte des Haspels anbringt.

Anmerk. Wir bemerken nur noch, daß das Rad an der Welle, alſo der Haspel und die Winde, nach den verſchiedenen Weiſen ihrer Anwendung auch noch verſchiedene Namen haben. Namentlich unterſcheidet man bei den Haspeln

das Seilrad, wenn die Kraft an einem Seile wirkt, welches ſich an dem Umfange des Rades befindet;

den Kreuzhaspel (sucula), wenn ſtatt des Rades mittelſt kreuzweis durchgeſteckter Arme (Scytalae; *Barres*) die Welle umgedreht wird;

das Spillrad (Roue de carrière), wo am Umfange des Rades Sproſſen, parallel mit der Well-Axe angebracht ſind;

das Hornrad, wo dieſe Sproſſen in der verlängerten Richtung der Halbmeſſer des Rades angebracht werden;

den Hornhaspel, bei welchem ſtatt des Rades am Ende der Welle, wo ſich die Zapfen befinden, Handgriffe oder Kurbeln (Haspelhörner, Manubria, *Manivelles*) angebracht ſind;

das Laufrad, welches aus einem hohlen Rade oder einer Trommel (*Tambour*) beſteht, innerhalb deſſen Umfang Menſchen oder Thiere durch ihr Gewicht eine Umdrehung bewirken.

Bei den Winden oder Göpeln unterſcheidet man

die Erdwinde, welche von Menſchen mittelſt Stangen oder Arme, die durch die Welle geſteckt ſind, umgedreht werden, von den

Pferdegöpeln, bei welchen lange Arme oder Zugbäume an der Welle befeſtigt ſind, die man aber durch Pferde in Bewegung ſetzt.

Hat die Welle eine ſchiefe Stellung, und beſteht das Rad aus einer Scheibe, auf welcher ſich Menſchen oder Thiere ſchreitend

tend bewegen, um dadurch eine Umdrehung zu bewirken, so heißt diese Einrichtung eine Tretscheibe, diese wollen wir bei Gelegenheit der schiefen Ebene etwas näher noch untersuchen.

Dritte Abtheilung.

Von der schiefen Ebene; vom Keile; von der Tretscheibe und von der Schraube.

§. 112.

Von der schiefen Ebene.

Eine schiefe Ebene ist eine feste Ebene, welche gegen den Horizont einen Neigungs-Winkel BAC $= \alpha$ (Fig. 50.) bildet. Der Schenkel AB dieses Neigungs-Winkels heißt die Länge, die vertikale BC dagegen die Höhe und AC die Grundlinie der schiefen Ebene.

Auf der schiefen Ebene AB liege ein Gewicht W als Last; am Schwer-Punkt S dieses Körpers W wirke eine Kraft P, deren Richtung mit dem Horizont AH den Winkel β bildet. Man soll die Bedingungen des Gleichgewichts finden, so daß die Reibung bereits mit überwunden ist, also sogleich eine Bewegung nach oben erfolgt, sobald P um noch so wenig vermehrt wird.

Nach (§. 78.) erleidet im Gleichgewicht die schiefe Ebene an einem unbekannten Punkte F einen unbekannten Normal-Druck, dem wir sogleich in der genau entgegengesetzten Richtung FE einen eben so großen Gegen-Druck z entgegensetzen. Senkrecht auf diesen Normal-Druck, also längs der schiefen Ebene FA, wirkt die Reibung μz. Diese Kräfte P, W, z und μz müssen nun in's Gleichgewicht gebracht werden. — Zu dem Ende lege man durch den Schwer-Punkt S die Linie OY senkrecht auf die schiefe Ebene und nehme solche zur Ordinaten-Axe, während OBX die Abscissen-Axe seyn soll. Mit letzterer machen nun die Kräfte

P, W, z und μz

bezüglich die Winkel

$$\alpha-\beta,\quad 90^0+\alpha,\quad 270^0 \text{ und } 180^0,$$

welche wir von OX nach der verlängerten OY hin zählen. Wird nun OD und OK bezüglich auf die Richtungen der Kraft P und der Last W senkrecht gezogen, und OS=s gesetzt, so ist W. DOS=$\alpha-\beta$, also $OD = s\cdot\cos(\alpha-\beta)$, während $OK = s\cdot\sin\alpha$ ist. Und ist zuletzt noch x der Abscissen-Werth des Punktes F, so erhält man aus (§. 36.) die drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich

$$\text{I.}\quad P\cdot\cos(\alpha-\beta)-W\cdot\sin\alpha-\mu z = 0,$$

$$\text{II.}\quad P\cdot\sin(\alpha-\beta)+W\cdot\cos\alpha-z = 0,$$

$$\text{III.}\quad P\cdot s\cdot\cos(\alpha-\beta)-W\cdot s\cdot\sin\alpha-z\cdot x = 0.$$

Dies ist der Ansatz der Aufgabe. Die beiden erstern Gleichungen geben die Kraft P und den Druck z (auf die schiefe Ebene); die dritte giebt x, d. h. die Stelle F, wo dieser Druck z wirkt.

Um diese Gleichungen aufzulösen, multiplicire man die (II.) mit μ und subtrahire sie von der (I.); man erhält dann

$$1)\qquad P = \frac{\sin\alpha+\mu\cdot\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)-\mu\cdot\sin(\alpha-\beta)}\cdot W,$$

und dazu aus der (II.)

$$2)\qquad z = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\mu\cdot\sin(\alpha-\beta)}\cdot W;$$

während dann die (III.) dazu liefert

$$3)\qquad x = \mu\cdot s.$$

Zeigt sich dieses x so groß, daß F über die Grundfläche der Last W hinaus fällt, so ist das Gleichgewicht deshalb nicht möglich, weil dann die Last auf der schiefen Ebene umkantet.

Sucht man zuerst einen Winkel δ aus der Gleichung

$$4)\qquad tg\,\delta = \mu,$$

so geht die (1.) über in

$$5)\qquad P = \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\cos(\alpha-\beta+\delta)}\cdot W,$$

welches für die Rechnung mit Logarithmen bequem ist.

Anmerk. 1. Man kann nun mehrere besondere Richtungen der Kraft P voraussetzen.

I. Läuft z. B. die Richtung der Kraft P mit der schiefen

Ebene parallel, so ist $\beta = \alpha$, und die Gleichungen zwischen P und W werden nun

$$P = (\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)\cdot W, \text{ oder } P = \frac{\sin(\alpha+\delta)}{\cos\delta}\cdot W.$$

II. Läuft dagegen die Richtung der Kraft P horizontal, so ist $\beta = 0$ und die Gleichungen zwischen P und W werden nun

$$P = \frac{\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha}, \text{ oder } P = tg(\alpha+\delta)\cdot W.$$

Anmerk. 2. Man kann auch nach dem Winkel α fragen, für welchen die Kraft P unter übrigens gleichen Umständen ein Maximum oder Minimum wird. Man muß zu dem Ende $\partial P_\alpha = 0$ setzen, und für diesen Werth von α untersuchen, ob $\partial^2 P_\alpha$ negativ oder positiv wird, aber auch $\partial P_\alpha = \frac{1}{0}$ setzen und auch diesen Werth von α noch prüfen, ob er wirklich P zum Maximum oder Minimum macht, nach (I. Th. Analys. §. 56.).

I. Geschieht dies in dem Falle (I. der Anmerk. 1.), in welchem die Kraft mit der schiefen Ebene parallel läuft, so erhält man

$$\begin{cases} \partial P_\alpha = (\cos\alpha - \mu\cdot\sin\alpha)\cdot W = 0, \text{ also } cotg\,\alpha = \mu, \\ \text{oder} \\ \partial P_\alpha = \dfrac{\cos(\alpha+\delta)}{\cos\delta}\cdot W = 0, \text{ also } \cos(\alpha+\delta) = 0, \text{ d. h. } \alpha = 90-\delta. \end{cases}$$

während $\partial^2 P_\alpha$ negativ wird. Wird also in diesem Falle der Neigungs-Winkel α so groß genommen, daß er den Reibungs-Winkel δ zu 90° ergänzt, so ist die (parallel mit der schiefen Ebene wirkende) Kraft P die größte. Jede andere Lage der schiefen Ebene ist daher dann der Kraft günstiger.

II. In dem Falle (II. Anmerk. 1.), wo die Kraft P horizontal wirkt, wird dagegen

$$\partial P_\alpha = \frac{1}{\cos(\alpha+\delta)^2}\cdot W.$$

Die Gleichung $\partial P_\alpha = \frac{1}{0}$ giebt daher dasmal

$$\cos(\alpha+\delta) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = 90^0 - \delta.$$

Untersucht man aber für diesen Werth von α den Werth von P, endlich auch den Werth von $P_{\alpha\pm h}$, wo h unendlich-klein ge-

dacht wird, so findet man zunächst $P_\alpha = \frac{1}{0}$, und dies ist ein Beweis, daß bei diesem Winkel $\alpha = 90^0 - \delta$ eine horizontale Kraft das in Rede stehende Gleichgewicht gar nicht mehr erhalten kann. Ferner zeigt sich

$$P_{\alpha+h} = tg(90^0 + h) \cdot W = -cotg\, h \cdot W,$$

und dieser negative Werth von P zeigt an, daß für einen noch größern Werth von α, dasselbe Gleichgewicht eben so wenig möglich ist.

Eine horizontal wirkende Kraft P erhält also die Last W nebst der Reibung nur dann noch im Gleichgewicht, so lange $\alpha < 90^0 - \delta$ ist; und diese Kraft ist dabei immer größer, je größer α selbst (zwischen 0 und $90^0 - \delta$) wird.

III. Betrachten wir noch den allgemeinen Fall des (§.) selbst, und suchen wir den Werth von α, für welchen P ein Maximum oder Minimum wird, so muß man bei dem Differenziiren nach α zwei Fälle wohl unterscheiden, nämlich

A) wenn β von α ganz unabhängig gedacht ist, d. h. wenn die Kraft bloß mit dem Horizont einen bestimmten Winkel macht, und ihre Richtung mit der Lage der schiefen Ebene nicht ändert (wie in II., wo $\beta = 0$ war), oder

B) wenn β noch eine gegebene Funktion von α ist, d. h. wenn die Richtung der Kraft P mit der Lage der schiefen Ebene zugleich sich ändert (wie in I., wo $\beta = \alpha$ gewesen ist).

Im Falle (A.) erhält man

$$\partial P_\alpha = \frac{cos\,\beta}{cos(\alpha - \beta + \delta)^2} \cdot W;$$

und während die Gleichung $\partial P_\alpha = 0$ einen Widerspruch enthält, führt die Gleichung

$$\partial P_\alpha = \frac{1}{0} \quad \text{zu} \quad cos(\alpha - \beta + \delta) = 0,$$

d. h. zu $$\alpha = 90^0 - (\delta - \beta),$$

welcher Werth von α aber $P = \frac{1}{0}$ giebt, daher die Unmöglichkeit des Gleichgewichts anzeigt.

Im Falle (2.) dagegen wird

$$\partial P_\alpha = \frac{cos\,\beta - sin(\alpha + \delta) \cdot sin(\alpha - \beta + \delta) \cdot \partial\beta_\alpha}{cos(\alpha - \beta + \delta)^2} \cdot W;$$

und die Gleichung $\partial P_\alpha = 0$ bestimmt dasmal den Winkel α; für $\beta = \alpha - \varepsilon$, d. h. $\alpha - \beta = \varepsilon$ z. B. wird $\partial\beta_\alpha = 1$, und die Gleichung $\partial P_\alpha = 0$ wird daher jetzt

$$\cos(\alpha - \varepsilon) - \sin(\alpha + \delta)\cdot\sin(\varepsilon + \delta) = 0,$$

oder $$\tfrac{1}{2}\cos(\alpha - \varepsilon) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + \varepsilon + 2\delta) = 0,$$

oder $$\cos(\varepsilon + \delta)\cdot\cos(\alpha + \delta) = 0,$$

d. h. $$\alpha + \delta = 90^\circ.$$

Macht also die Kraft P mit der schiefen Ebene einen konstanten Winkel ε, so ist sie, wie in dem Falle, wo sie mit der schiefen Ebene parallel läuft, allemal die größeste, so oft α den Reibungs-Winkel δ zu 90° ergänzt.

Anmerk. 3. Man kann auch α gegeben sich denken, und nach dem Winkel β fragen, für welchen die Kraft P ein Minimum ist. Man muß dann aus dem Werthe von P im (§. Nr. 1.)

$$\partial P_\beta = \frac{-\sin(\alpha - \beta) - \mu\cdot\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \mu\cdot\sin(\alpha - \beta)}\cdot P$$

finden, und solches $= 0$ setzen; und man erhält

$$tg(\alpha - \beta) = -\mu = -tg\,\delta,$$

also $$\alpha - \beta = -\delta, \text{ oder } \beta = \alpha + \delta.$$

Wenn also die Kraft nach oben zu wirkt, und so daß sie mit der schiefen Ebene den Reibungs-Winkel δ bildet, so ist sie unter übrigens gleichen Umständen am kleinsten.

Anmerk. 4. Wollte man die Last W langsam heruntergleiten lassen, und zu dem Ende die Kraft P suchen, welche mit Hülfe der Reibung die Last W gerade noch erhielte, so müßte man in dem Ansatze (I. — III.) die Glieder, welche die Reibung enthalten, mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen, d. h. $-\mu$ statt μ schreiben, wenn man den Ansatz der jetzigen Aufgabe haben wollte. Aber eben deshalb erhält man auch die Auflösung der jetzigen Aufgabe, wenn man in den vorstehenden Resultaten überall $-\mu$ statt μ, oder $-\delta$ statt δ schreibt.

Die Untersuchungen über die größten und kleinsten Werthe der Kraft P werden für die jetzige Aufgabe freilich etwas anders ausfallen; da z. B. in dem Falle der (I. Anmerk. 2.) für die

jetzige Aufgabe $\alpha = 90 + \delta$, d. h. stumpf werden müßte, wenn der Bedingung $\partial P_\alpha = 0$ genügt werden sollte. In diesem Falle, wo die Kraft P mit der schiefen Ebene parallel gedacht wird, wächst also von $\alpha = \delta$ an, wo $P = 0$ wird, bis zu $\alpha = 90°$ hin, wo $P = W$ wird, die Kraft P fortwährend, ohne irgend dazwischen ein Maximum oder ein Minimum zu erleiden.

Es ist leicht, die übrigen Fälle auch für die jetzige Aufgabe in Betrachtung zu ziehen. Die Frage der (Anmerk. 3.) beantwortet sich für die jetzige Aufgabe dadurch, daß man $\beta = \alpha - \delta$ findet.

Anmerk. 5. Wir haben in der Aufgabe des (§.) vorausgesetzt, daß die Kraft P gerade den Schwer-Punkt von W angreift, oder daß die Richtung der Kraft P durch diesen Schwer-Punkt hindurchgeht. Setzten wir dieses nicht mehr voraus, so würden die beiden Gleichungen (I. u. II.), also die aus ihnen gefolgerten Werthe des Normal-Druckes z und der Kraft P, genau und unverändert dieselben bleiben, und nur die dritte Gleichung (III.) würde sich in etwas ändern, also auch der Abscissen-Werth x, welcher den Punkt angiebt, in welchem der Normal-Druck z vereinigt gedacht werden kann. Deshalb wollen wir diese Betrachtung hier nicht weiter verfolgen, in so fern sie durchaus nichts Neues darbietet, um so weniger, als wir in (§.) schon bemerkt haben, daß die durch die Abscisse x bestimmte Stelle, wo der Normal-Druck wirkt, nicht außerhalb der Grundfläche des Körpers W, mit welcher er auf der schiefen Ebene aufliegt, fallen darf, wenn nicht statt des gesuchten Gleichgewichts ein Umkanten des Körpers W statt finden soll.

§. 113.

Vom Keile.

Ein prismatischer Körper, dessen Querschnitt ein Dreieck ABC (Fig. 51.) ist, wird Keil (Cuneus, *Coin*) genannt. Ist $AC = BC$, so heißt AB der Rücken; CD senkrecht auf AB heißt dann die Länge des Keils, und AC und BC werden seine Seiten genannt.

Es sind EK, EK zwei feste, gegen den Horizont HEH unter dem Winkel β geneigte schiefe Ebenen. Auf beiden liegen zwei gleiche und gleich schwere Parallelepipeda, deren Gewicht W, W als Last betrachtet wird, und deren Dimensionen FG=b und GK=a sind. Zwischen beiden Ecken F, F steckt ein Keil ABC, dessen Länge DC vertikal ist, und verlängert, durch den Punkt E hindurchgeht. Auf den Rücken AB des Keils in D, in der vertikalen Richtung DCE wirkt eine Kraft P; es sey ferner der Winkel $DCA = DCB = \alpha$, so daß der Winkel ACB des Keils $= 2\alpha$ ist. Man soll die Bedingungen des Gleichgewichts angeben, doch so, daß, wenn die Kraft P um noch so wenig größer wird, die Reibung der Bewegung der Kraft in ihrem Sinne kein Hinderniß mehr entgegenstellt.

Man hat hier drei einzelne lose mit einander verbundene Körper in's Gleichgewicht zu bringen. Weil aber die Gleichgewichts-Gleichungen für die beiden parallelepipedalischen Klötze genau dieselben werden müssen, so wollen wir nur einen dieser Klötze betrachten.

An dem Keile ABC wirken in F, F die beiden auf die Seiten AC und BC normalen Drucke N, N in den Richtungen FL, FL; ferner noch die beiden Reibungen μx, μx in den Richtungen FA, FB, endlich noch in D oder L oder C die Kraft P in der Richtung DCE. Damit diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten, hat man nach (§. 36.) drei Gleichungen, nämlich

$$\text{I.} \qquad P - 2N \cdot \sin\alpha - 2\mu N \cdot \cos\alpha = 0,$$

und die beiden andern werden identisch $0 = 0$.

Am Klotze zur Rechten wirkt an einer unbekannten Stelle U, der unbekannte auf EK normale Gegen-Druck M und die Reibung $\mu' M$ in der Richtung KE; ferner an F in der Richtung LF der Druck N, und noch die Reibung μN in der Richtung FC; endlich in der vertikalen Richtung ST das Gewicht W, am Schwer-Punkt S des Klotzes, den wir uns in der Mitte desselben denken wollen. Diese fünf Kräfte M, $\mu' M$, N, μN und W müssen nun einander das Gleichgewicht halten. Nimmt

man daher wiederum EH und ED zu Koordinaten-Axen, so hat man noch, wenn EU = x und EG = c gesetzt wird,

II. $M\cdot\cos\beta-\mu'M\cdot\sin\beta-N\cdot\sin\alpha-\mu N\cdot\cos\alpha-W=0$,

III. $-M\cdot\sin\beta-\mu'M\cdot\cos\beta+N\cdot\cos\alpha-\mu N\cdot\sin\alpha=0$,

IV. $N\cdot c\cdot\sin(\alpha+\beta)+N\cdot b\cdot\cos(\alpha+\beta)-M\cdot x+W\cdot(c+\frac{1}{2}a)\cdot\cos\beta-W\cdot\frac{1}{2}b\cdot\sin\beta=0$ *).

Diese vier Gleichungen (I.—IV.) bilden nun den Ansatz der Aufgabe, und dienen zur Bestimmung der vier Unbekannten P, N, M und x.

Um diese Gleichungen am bequemsten zu lösen, muß man aus den Gleichungen (II. u. III.), welche sich auch so schreiben lassen:

II. $(\cos\beta-\mu'\cdot\sin\beta)\cdot M-(\sin\alpha+\mu\cdot\cos\alpha)\cdot N=W$,

III. $-(\sin\beta+\mu'\cdot\cos\beta)\cdot M+(\cos\alpha-\mu\cdot\sin\alpha)\cdot N=0$,

zuerst M und N finden. Dann liefert die (I.) die Kraft P dazu, und die (IV.) giebt dann die Entfernung x oder EU des Punktes U, wo der Druck M auf die Unterlage concentrirt gedacht werden kann. Die Gleichungen (II. und III.) liefern aber

$$N=\frac{\sin\beta+\mu'\cdot\cos\beta}{(1-\mu\mu')\cdot\cos(\alpha+\beta)-(\mu+\mu')\cdot\sin(\alpha+\beta)}\cdot W,$$

$$M=\frac{\cos\alpha-\mu\cdot\sin\alpha}{(1-\mu\mu')\cdot\cos(\alpha+\beta)-(\mu+\mu')\cdot\sin(\alpha+\beta)}\cdot W,$$

während die Gleichung (I.) dann sogleich

$$P=2\cdot\frac{(\sin\alpha+\mu\cdot\cos\alpha)\cdot(\sin\beta+\mu'\cdot\cos\beta)}{(1-\mu\mu')\cdot\cos(\alpha+\beta)-(\mu+\mu')\cdot\sin(\alpha+\beta)}\cdot W$$

dazu liefert.

Anmerk. 1. Ist $\beta=0$, d. h. liegen die Klötze auf horizontalen Unterlagen, so wird

$$N=\frac{\mu'}{(1-\mu\mu')\cdot\cos\alpha-(\mu+\mu')\cdot\sin\alpha}\cdot W,$$

$$M=\frac{\cos\alpha-\mu\cdot\sin\alpha}{(1-\mu\mu')\cdot\cos\alpha-(\mu+\mu')\cdot\sin\alpha}\cdot W$$

und

$$P=2\cdot\frac{\mu'\cdot(\sin\alpha+\mu\cdot\cos\alpha)}{(1-\mu\mu')\cdot\cos\alpha-(\mu+\mu')\cdot\sin\alpha}\cdot W.$$

*) Um diese Momenten-Gleichung am bequemsten zu bekommen, hat man sich N und W nach den Kanten GK und GF zerlegt gedacht, und statt N und W diese vier Seiten-Kräfte substituirt. Es waren dann die Momenten-Arme in Bezug auf den Punkt E als Centrum der Momente viel leichter zu bestimmen.

Anmerk. 2. Wird der Keil zum Spalten gebraucht, so kann man sich die beiden Klötze in einen einzigen festen Körper vereint denken. Die Gleichungen (II. III. u. IV.) werden dann ganz überflüssig, und es bleibt bloß die Gleichung (I.) allein, welche

$$P = 2\cdot(\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)\cdot N,$$

oder

$$N = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{P}{\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha}$$

liefert, je nachdem P oder N gesucht seyn sollte.

Diese Auflösung stimmt mit der sogenannten Regel des Borelli überein. Mersenne nahm an, daß der Gegen-Druck N nicht senkrecht auf der Seite BC, sondern senkrecht auf die Länge CD des Keils wirke; und de la Hire nahm an, daß dieser Gegen-Druck senkrecht auf der Fläche des Spaltes stehe. Beide letzteren Voraussetzungen widersprechen aber dem im (§. 78.) Gesagten; weshalb die Regel des Mersenne und Regel des de la Hire als unrichtig bezeichnet werden müssen.

§. 114.

Von der Tretscheibe.

Die Scheibe (das Rad) eines Rades an der Welle (Fig. 52.) mache mit der Horizontal-Ebene den Winkel $\gamma = \text{W. BCD}$, wo CD vertikal gedacht wird. Die Ebene GCD sey die Ebene des Neigungs-Winkels γ der Scheibe mit dem Horizont. Am Umfange der Scheibe in dem durch den Winkel $GCE = \alpha$ gegebenen Punkte E wirkt das Gewicht P eines Menschen oder Thieres vertikal, also parallel mit CD. Am Umfange der Welle in N wirkt tangentiell die Last W, welche mit der CG den Winkel β macht. Das Gewicht der ganzen Tretscheibe sey $= G$ und C der Schwer-Punkt derselben, der Radius der Scheibe sey $= R$, der Radius der Welle $= r$, und der Radius der Zapfen $= \varrho$. Man soll die Gleichung zwischen der Kraft P und der Last W finden, im Falle des Gleichgewichts, jedoch unter der Voraussetzung, daß die Reibung

von der Kraft P bereits überwunden ist. — Wir werden die Aufgabe so behandeln, wie dies (§. 111.) für die Winde geschehen ist. Man nehme die Axe CB zur dritten Koordinaten-Axe, und in der Ebene der Scheibe die beiden andern Koordinaten-Axen, und zwar CG, und senkrecht darauf CH. Dem Druck bei B auf die Unterlage setze man den normalen Gegendruck z entgegen in der Richtung BC, so ist das Reibungs-Moment um die Axe BC nach (§. 111. II.) $= \frac{2}{3}\mu\varrho z$. Die beiden Zapfen B und A drücken die Lager in der Mitte ihrer Länge l an den Stellen, deren Radien mit CG die unbekannten Winkel $180^0-\psi$ und $180^0-\psi'$ machen, welchen unbekannten Drucken man die eben so großen Gegendrucke x und x' entgegensetzt. Die Reibungen an diesen Stellen sind μx und $\mu x'$ und machen mit der CG die Winkel $\psi-90^0$ und $\psi'-90^0$. Alle diese Kräfte nun müssen einander das Gleichgewicht halten; daher hat man nach (§§. 26. und 29.)

A) die Summe aller nach den drei Axen zerlegten Kräfte $= 0$, d. h.

$$\text{I. } (P+G)\cdot\sin\gamma+W\cdot\cos\beta+x\cdot\cos\psi+\mu x\cdot\sin\psi+x'\cdot\cos\psi'+\mu x'\cdot\sin\psi' = 0,$$

$$\text{II. } W\cdot\sin\beta+x\cdot\sin\psi-\mu x\cdot\cos\psi+x'\cdot\sin\psi'-\mu x'\cdot\cos\psi' = 0,$$

$$\text{III. } (P+G)\cdot\cos\gamma-z = 0;$$

und noch

B) die Summe der statischen Momente in den drei Koordinaten-Ebenen oder um die drei Koordinaten-Axen, der Null gleich, nämlich

$$\text{IV. } PR\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma-W\cdot r-\mu\varrho\cdot(x+x')-\tfrac{2}{3}\mu\varrho\cdot z = 0,$$

und noch die beiden andern Gleichungen, welche sich auf die Ebene GCB und HCB beziehen, und welche in Verbindung mit (I. und II.) die vier Unbekannten x, x', ψ und ψ' zu liefern haben, während dann die (IV.) die Kraft P dazu zu liefern hat. —

Weil aber die Rechnungen durch diese Art die Aufgabe zu

behandeln allzu weitläufig werden, so thut man gut, $\psi = \psi'$ vorauszusetzen. Die Gleichung (III.) giebt ohnedies

$$z = (P+G)\cdot\cos\gamma;$$

daher werden die Gleichungen (I. II. und IV.), wenn $x+x'$ durch N bezeichnet wird, so daß N den Gesammt-Druck auf die Wände der Zapfen vorstellt,

1) $(P+G)\cdot\sin\gamma+W\cdot\cos\beta+N\cdot\cos\psi+\mu N\cdot\sin\psi = 0,$

2) $W\cdot\sin\beta+N\cdot\sin\psi-\mu N\cdot\cos\psi = 0,$

3) $PR\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma-W\cdot r-\mu\varrho\cdot N-\frac{2}{3}\mu\varrho\cdot(P+G)\cdot\cos\gamma = 0;$

wovon die beiden erstern den Druck N und den Winkel ψ geben, die dritte aber dann P dazu liefert. Die Ausrechnung ist nun so wie (§. 110.) bei dem Haspel zu führen, oder wie (§. 111.) bei der Winde; und man erhält zuerst

$$4)\quad N = \frac{\sqrt{(P+G)^2\cdot\sin\gamma^2+W^2+2(P+G)\cdot W\cdot\sin\gamma\cdot\cos\beta}}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

dann aber, wenn wieder

$$5)\quad \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = k,\quad \frac{\varrho}{R} = \nu \text{ und } \frac{r}{R} = \varepsilon$$

gesetzt werden,

$$6)\quad (\sin\alpha^2\cdot\sin\gamma^2-\tfrac{4}{3}\mu\nu\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma+\tfrac{4}{9}\mu^2\nu^2\cdot\cos\gamma^2-k^2\nu^2\cdot\sin\gamma^2)\cdot P^2,$$

$$-2\left\{\begin{matrix}\varepsilon\cdot W\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\frac{2}{3}\mu\nu G\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma-\frac{2}{3}\mu\varepsilon\nu W\cdot\cos\gamma\\ -\frac{4}{9}\mu^2\nu^2 G\cdot\cos\gamma^2+k^2\nu^2\cdot G\cdot\sin\gamma^2+k^2\nu^2 W\cdot\sin\gamma\cdot\cos\beta\end{matrix}\right\}\cdot P,$$

$$+\left\{\begin{matrix}\varepsilon^2W^2+\frac{4}{3}\mu\varepsilon\nu WG\cdot\cos\gamma+\frac{4}{9}\mu^2\nu^2G^2\cdot\cos\gamma^2\\ -k^2\nu^2(W^2+G^2\cdot\sin\gamma^2+2WG\cdot\sin\gamma\cdot\cos\beta)\end{matrix}\right\} = 0.$$

Ist alles in Ziffern gegeben, so wird diese quadratische Gleichung leicht aufgelöst, und der größere der beiden Werthe für P ist der hier gesuchte.

§. 115.

Von der Schraube.

I. Wird ein rechtwinkliches Dreieck ABC (Fig. 53.), welches den Winkel $CAB = \alpha$ hat, um einen senkrechten Cylinder

dergestalt herumgewikkelt, daß die Kathete BC stets parallel bleibt mit der Axe PQ des Cylinders, so bildet die AB auf dem Cylinder-Mantel eine Schrauben-Linie. Der Winkel α heißt die Neigung der Schrauben-Linie. Nimmt man von A aus ein Stück AD ab, welches dem Umfange $2r\pi$ der Grundfläche des Cylinders gleich ist, so ist die zugehörige Kathete $DE = 2r\pi \cdot tg\,\alpha$ die Höhe des Schraubenganges (*Pas de la vis*), während der Theil der Schrauben-Linie, welcher gerade durch das Stück AE der Hypothenuse gebildet wird, der Schraubengang (Helix, *Filet de la vis*) heißt. Wird auf dem Cylinder in der Richtung der Schrauben-Linie eine Erhöhung angebracht, so heißt der Cylinder eine Schrauben-Spindel (Cochlea mas), und seine Hervorragungen das Schrauben-Gewinde. Die Querschnitte dieser Schrauben-Gewinde durch Ebenen, welche durch die Axe der Spindel gehen, sind manchmal Dreiecke (scharfe Schrauben), manchmal Vierecke (stumpfe Schrauben). Die Schrauben-Spindel hat einen äußern und einen innern Halbmesser, welche beide um die Dicke des Schrauben-Gewindes verschieden sind. Wenn schlechtweg vom Halbmesser der Spindel gesprochen wird, so wird immer der mittlere (das arithmetische Mittel) zwischen diesen beiden verstanden.

Eine Schrauben-Mutter (Cochlea femina. *Écrou*) ist ein ausgehöhlter Cylinder mit Schrauben-Gängen, in welche die Schrauben-Spindel mit ihren Schrauben-Gängen genau paßt. Spindel und Mutter zusammen bilden die Schraube (Cochlea. *Vis*).

II. Ist h die Höhe eines Schrauben-Ganges, so ist für jede in dem Schrauben-Gewinde vom kleinsten bis zum größten Halbmesser der Spindel liegende Schrauben-Linie ihre Neigung α immer anders und anders. Es ist nämlich

$$1) \qquad tg\,\alpha = \frac{h}{2r'\pi},$$

wenn r' die Entfernung der Schrauben-Linie von der Axe der

Schrauben-Spindel vorstellt. Gewöhnlich nimmt man als Mittelwerth

$$2) \qquad tg\,\alpha = \frac{h}{2r\pi},$$

und versteht unter r den mittlern Halbmesser der Spindel.

III. Eine Schrauben-Spindel (Fig. 54.) QKC geht in einer unbeweglichen Schrauben-Mutter DFEG, ihre Axe CK stehe vertikal. Unten in C hänge eine Last, welche mit Inbegriff des Gewichtes der Spindel = W seyn mag. Oben bei Q steckt ein horizontaler Hebel-Arm AQ von der Länge R, an dessen Ende eine Kraft P in einer auf ihm senkrechten und horizontalen Richtung wirken mag. Der mittlere Halbmesser der Spindel sey = r. Wie ist die Gleichung zwischen Kraft P und Last W im Falle des Gleichgewichts, jedoch unter der Voraussetzung, daß die Reibung von der Kraft P bereits mit überwunden ist.

Es finden hier offenbar zwei Reibungen statt; eine auf den Flächen, die andere an den Rändern der Schrauben-Gewinde. Die letztere hängt von dem Druck ab, den die horizontal wirkenden Kräfte hervorbringen, und welcher auf dem Cylinder-Mantel der Schrauben-Spindel senkrecht steht; diese Reibung ist, da in der Regel P gegen W nur klein ist, gegen die andere Reibung ganz gering, und um die Rechnungen recht einfach zu machen, so läßt man sie gewöhnlich ganz außer Acht. Die Reibung an den Flächen der Schrauben-Gewinde hängt dagegen von dem normalen Druck dieser Flächen gegen einander ab, also von P und W, ist daher viel bedeutender und sorgfältig in Rechnung zu bringen. Man kann sich den Druck N der Schrauben-Gewinde auf einander, auf einen einzigen Gang gleichmäßig vertheilt denken, so daß auch die Reibung μN gleichmäßig vertheilt gedacht ist. Denkt man sich nun drei Koordinaten-Axen, nämlich QA, auf ihr senkrecht und ebenfalls horizontal QY, und noch QC, und ist das Schrauben-Gewinde ein stumpfes, so heben sich diese Reibungen nach den beiden horizontalen Axen zerlegt und summirt, einander auf; nach der vertikalen Axe QC zerlegt und summirt, erhält man aber aus dieser Reibung

1) $\mu N \cdot \sin\alpha$, wo $tg\,\alpha = \frac{h}{2r\pi}$

ist, wenn α der Neigungs-Winkel der mittlern Schrauben-Linie, wenn ferner h die Höhe des Schrauben-Ganges und r den mittlern Halbmesser der Schrauben-Spindel vorstellt, und wenn man sich Druck und Reibung in der mittleren Schrauben-Linie vereinigt denkt. In der Richtung der Tangente des mit r beschriebenen Kreises zerlegt, giebt die Reibung die Kraft

2) $\mu N \cdot \cos\alpha$

und das statische Moment der Reibung um CQ herum wird

3) $= \mu r N \cdot \cos\alpha$.

Der Druck N, zerlegt, giebt

4) $N \cdot \cos\alpha$ nach der Richtung QC

und

5) $N \cdot \sin\alpha$

nach der Tangente des mit r beschriebenen Kreises, so daß das statische Moment dieser letztern um QC herum, $= r \cdot N \cdot \sin\alpha$ wird. Nimmt man nun von den sechs Gleichungen des Gleichgewichts, welche zwischen dem Gegendruck N, der Reibung μN, der Kraft P und Last W statt finden, nur die beiden, welche die Axe QC betreffen, nämlich: die Summe aller Kräfte nach QC der Null gleich, d. h.

I. $W - N \cdot \cos\alpha + \mu N \cdot \sin\alpha = 0$,

und dann noch die Summe der statischen Momente um QC herum der Null gleich, d. h.

II. $P \cdot R - N \cdot r \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = 0$,

so kann man N und P finden.

Die algebraische Auflösung dieser Gleichungen giebt

$$N = \frac{W}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha}$$

und

$$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha} W,$$

oder

$$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{h + 2\mu r\pi}{2r\pi - \mu h} \cdot W.$$

Anmerk. 1. Rechnet man die Reibung zu Gunsten der Kraft, d. h. will man die Bedingungen des Gleichgewichts an

der andern Grenze haben, so daß sogleich die Last W herabgeht, so oft solche, um noch so wenig größer gedacht wird, so muß in diesen Resultaten $-\mu$ statt μ gesetzt werden.

Anmerk. 2. Eigentlich muß das Moment der Reibung um die Axe QC durch eine Integration gefunden werden, welche derjenigen ganz analog ist, die wir im (§. 111. II.) für das Moment der Reibung der untern Fläche des Zapfens einer Winde haben eintreten lassen. Bei dieser Integration muß aber dann auch (nach II.) der Winkel α als eine Funktion der Koordinaten der reibenden Stelle angesehen werden, und dadurch wird solche hier viel verwikkelter als dort.

Wollte man auch die Reibung an den Rändern der Schraubengewinde noch in Rechnung bringen, so müßte man sie sich an zwei unbekannten Stellen im untersten und im obersten Schrauben-Gange vereinigt denken. Die vier übrigen Gleichungen des Gleichgewichts müßten dann die Winkel ψ und ψ' liefern, durch welche diese Stellen der Reibung bestimmt werden, und noch die Drucke, welche die Mutter an diesen Stellen (senkrecht auf den Mantel der Cylinder-Aushöhlung) erleidet.

Und wird endlich das Gewinde nicht stumpf, sondern scharf gedacht, so zerlegen sich Druck und Reibung auf den Flächen der Gewinde, nach den drei Koordinaten-Axen noch etwas anders, worauf in diesem Falle ebenfalls Rücksicht genommen werden müßte.

Vierte Abtheilung.

Von der Reibung eines um einen Cylinder geschlagenen Seiles und von der Steifigkeit der Seile.

§. 116.

Von der Reibung eines um einen Cylinder geschlagenen Seiles.

Um einen ganz unbeweglichen Cylinder, wovon der Kreis ADBM (Fig. 62.) ein Querschnitt ist, legt von A bis B ein

Seil. Es ſey CAX horizontal und CY vertikal. An A hänge ein Gewicht W, an B wirke in der Richtung der Tangente BE eine Kraft P. Der Winkel ACB ſey $= \varphi'$ aber im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt, ſo daß der von CX nach CY von 0 bis 2π gezählte Winkel, den die Kraft P mit CX macht, $= \frac{1}{2}\pi + \varphi'$ ſeyn wird. Der Radius $CA = CB$ ſey $= r$. Man ſoll die Gleichung finden zwiſchen Kraft und Laſt im Falle des Gleichgewichts an der Grenze der Reibung, ſo daß augenblicklich eine Bewegung im Sinne der Kraft erfolgt, ſobald letztere um noch ſo wenig größer genommen wird.

Man denke ſich den Bogen von A bis B in unendlich viele unendlich-kleine Bogen zertheilt, deren jeder die Länge $r \cdot d\varphi$ hat. Es ſey $ACM = \varphi$, und bei M einer dieſer unendlich-kleinen Theilbogen $r \cdot d\varphi$. Alle dieſe unendlich-kleinen Elemente $r \cdot d\varphi$ erleiden nun im Falle des gedachten Gleichgewichts einen unendlich-kleinen ſenkrechten Druck, den wir bei M durch $N_\varphi \cdot d\varphi$ ausdrücken wollen; und an jeder ſolchen Stelle M, von A bis B hin, entſteht dadurch eine Reibung $= \mu \cdot N_\varphi \cdot d\varphi$. Der Gegendruck $N_\varphi \cdot d\varphi$ macht mit der Axe CX den Winkel φ; die Reibung $\mu \cdot N_\varphi \cdot d\varphi$ macht dagegen mit derſelben Axe CX den Winkel $\varphi - 90^0$ oder richtiger $\varphi - \frac{1}{2}\pi$.

Man kann nun die Unterſuchung wie immer in ſolchen Fällen aus zwei verſchiedenen Geſichts-Punkten weiter fortführen. Einmal kann man nämlich das Syſtem als das anſehen, was es iſt, nämlich als ein *loſes* Syſtem, welches aus unendlich vielen einzelnen Theilen beſteht, nämlich den einzelnen unendlich-kleinen Bogen $r \cdot d\varphi$, deren jeder von den beiden Spannungen am Anfange und Ende dieſer Bogen, von dem Druck $N_\varphi \cdot d\varphi$ und von der Reibung $\mu \cdot N_\varphi \cdot d\varphi$ angegriffen wird, und dabei im Gleichgewichte ſich befinden muß. Dies giebt unendlich viele Syſteme von Gleichgewichts-Gleichungen, welche jedoch alle durch ein einziges repräſentirt ſind, in ſo ferne alle aus dieſem einzigen dadurch hervorgehen, daß man ſtatt φ nach und nach alle Werthe von 0 bis φ' ſubſtituirt. Aus dieſen un-

unendlich vielen Gleichungen muß man dann durch das geeignete Verfahren die unbekannten Spannungen eliminiren oder finden, um zuletzt die Gleichungen zwischen Kraft und Last zu erhalten.

Die zweite Ansicht ist die, daß man nach (Anmerk. 2. zu §. 79.) sagt: Ist das ganze System im Gleichgewicht, so bleibt es auch noch im Gleichgewicht, wenn man das Lose im System fest geworden sich denkt. Man betrachtet dann das Ganze oder einen Theil des Ganzen als einen festen Körper und bekommt aus diesem Gesichtspunkte Gleichungen des Gleichgewichts, welche aus jenen kurz vorher besprochenen Gleichungen ebenfalls abgeleitet werden können, welche sich aber hier unmittelbar ergeben. Reichen diese letzteren Gleichungen aus, um das Unbekannte finden zu lassen, so bedarf man nichts weiteres. Reichen sie aber nicht aus, so muß man sich die fehlenden Gleichungen aus dem losen System noch ferner herholen.

Um auf dem erstern Wege zu den Gleichgewichts-Gleichungen zu gelangen, sey T_φ die Spannung des Seiles am Anfange M des unendlich-kleinen Bogens $MN = r \cdot d\varphi$, so ist $T_{\varphi+d\varphi}$, oder $T_\varphi + \partial T_\varphi \cdot d\varphi$ die Spannung am andern Ende N desselben. Die Spannung T_φ an M macht mit der CX den Winkel $\varphi - \frac{1}{2}\pi$; die Spannung $T_{\varphi+d\varphi}$, oder $T_\varphi + \partial T_\varphi \cdot d\varphi$ an N macht mit der Axe CX den Winkel $\pi - [\frac{1}{2}\pi - (\varphi + d\varphi)]$, d. h. den Winkel $\frac{1}{2}\pi + (\varphi + d\varphi)$. — Denkt man sich nun alle vier Kräfte $N_\varphi \cdot d\varphi$, $\mu \cdot N_\varphi \cdot d\varphi$, T_φ und $T_\varphi + \partial T_\varphi \cdot d\varphi$, weil das Element MN unendlich-klein ist, einen und denselben Punkt angreifend, so erhält man nach (I. Th. Mech. §. 21.) die beiden Gleichungen des Gleichgewichts *)

*) Wollte man annehmen, daß die Kräfte verschiedene Punkte angreifen, so würde man drei Gleichungen statt zweier erhalten, welche sich jedoch auf zwei von einander verschiedene zurückführen ließen. Diese dritte (Momenten-) Gleichung würde namentlich werden

$$r \cdot T_\varphi + r \cdot \mu N_\varphi \cdot d\varphi - r \cdot (T_\varphi + \partial T_\varphi \cdot d\varphi) = 0,$$

d. h.

$$\mu \cdot N_\varphi = \partial T_\varphi.$$

$$T_\varphi \cdot \sin\varphi + N_\varphi \cdot d\varphi \cdot \cos\varphi + \mu \cdot N_\varphi \cdot d\varphi \cdot \sin\varphi - (T_\varphi + \partial T_\varphi \cdot d\varphi) \cdot \sin(\varphi + d\varphi) = 0,$$

$$-T_\varphi \cdot \cos\varphi + N_\varphi \cdot d\varphi \cdot \sin\varphi - \mu N_\varphi \cdot d\varphi \cdot \cos\varphi + (T_\varphi + \partial T_\varphi \cdot d\varphi) \cdot \cos(\varphi + d\varphi) = 0.$$

Weil jedoch

$$\sin(\varphi + d\varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi \cdot d\varphi$$

und

$$\cos(\varphi + d\varphi) = \cos\varphi - \sin\varphi \cdot d\varphi$$

ist, so reduziren sich diese beiden Gleichungen, wenn man noch die mit $d\varphi^2$ afficirten Glieder nach (§. 20. Analys. I. Th.) wegläßt, auf

I. $N_\varphi \cdot \cos\varphi + \mu N_\varphi \cdot \sin\varphi - T_\varphi \cdot \cos\varphi - \partial T_\varphi \cdot \sin\varphi = 0,$

II. $N_\varphi \cdot \sin\varphi - \mu N_\varphi \cdot \cos\varphi - T_\varphi \cdot \sin\varphi + \partial T_\varphi \cdot \cos\varphi = 0.$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen den Ausdruck ∂T_φ, so erhält man

III. $$N_\varphi = T_\varphi.$$

Eliminirt man aber T_φ aus (I. und II.), so ergiebt sich

IV. $$\mu \cdot N_\varphi = \partial T_\varphi.$$

Diese beiden Gleichungen (III. und IV.) geben noch, wenn man N_φ eliminirt,

V. $$\mu = \frac{\partial T_\varphi}{T_\varphi},$$

also wenn man integrirt,

Dies ist aber genau die im Texte folgende Gleichung (IV.), so daß es bequemer ist, diese dritte Gleichung des Gleichgewichts zuzuziehen, als nur die beiden zu nehmen, die im Texte genommen worden sind.

Ferner mag der Anfänger noch folgendes beachten: Da man zwei verschiedene Spannungen in Rechnung bringt, zu Anfang und zu Ende des unendlich-kleinen Bogens MN, so könnte man in Ungewißheit gerathen, ob man Druck und Reibung zu Anfang oder zu Ende von MN annehmen soll. Weil aber beide zu Anfang und zu Ende von MN nur um Unendlich-Kleine der zweiten Ordnung von einander verschieden sind, so würde, da man nach (§. 20. Analys. I. Th.) die Unendlich-Kleinen der zweiten Ordnung gegen die der ersten Ordnung weglassen muß, die eine oder die andere Annahme zu demselben Endresultat führen.

VI. $\log T_\varphi = \mu\varphi + c$ und $T_\varphi = A \cdot e^{\mu\varphi}$,

wo A an der Stelle von c eine noch unbestimmte Konstante ist. Weil aber T_φ, wenn $\varphi = 0$ ist, in das Gewicht W übergehen muß, so hat man aus (VI.)

VII. $W = A$, also $T_\varphi = W \cdot e^{\mu\varphi}$.

Weil endlich T_φ in das gesuchte P übergehen muß, so oft $\varphi = \varphi'$ genommen wird, so folgt noch aus (VII.)

VIII. $P = W \cdot e^{\mu\varphi'}$.

Dies ist also die gesuchte Gleichung zwischen der Kraft P und der Last W.

Will man nun dieselbe Aufgabe auf dem andern Wege lösen, nach welchem man sich das ganze System als ein festes System denkt, so giebt der (§. 36.) in Verbindung mit dem Satze (§. 35. Analyf. I. Th.) augenblicklich folgende drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

1) $$-P \cdot \sin\varphi' + \int_{\varphi'\div 0} N_\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi + \mu \cdot \int_{\varphi'\div 0} N_\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = 0,$$

2) $$-W + P \cdot \cos\varphi' + \int_{\varphi'\div 0} N_\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi - \mu \cdot \int_{\varphi'\div 0} N_\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 0,$$

3) $$W + \mu \cdot \int_{\varphi'\div 0} N_\varphi \cdot d\varphi - P = 0.$$

Weil aber N_φ eine unbekannte Funktion ist, die aus diesen Gleichungen auch nicht gefunden werden kann, in so ferne in ihnen nur bestimmte Integrale vorkommen, also der Veränderliche φ selbst ganz verschwunden ist, so sieht man sich gezwungen, den Ansatz der Aufgabe etwas und zwar so abzuändern, daß der unbestimmte (veränderliche) Winkel φ selbst noch erscheint.

Um aber diesen Zweck zu erreichen, darf man nur die eine Grenze φ' sich unbestimmt denken, also φ statt φ' setzen, und die tangentiell an dieser Grenze φ wirkende Kraft P_φ statt P substituiren. Man hat dann den Ansatz der Aufgabe so:

I. 1) $$-P_\varphi \cdot \sin\varphi + \int_{\varphi \div 0} N_\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi + \mu \cdot \int_{\varphi \div 0} N_\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = 0,$$

II. 2) $$-W + P_\varphi \cdot \cos\varphi + \int_{\varphi \div 0} N_\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi - \mu \cdot \int_{\varphi \div 0} N_\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 0,$$

III. 3) $$W + \mu \cdot \int_{\varphi \div 0} N_\varphi \cdot d\varphi - P_\varphi = 0.$$

Um aus diesen Gleichungen das Gesuchte zu finden, differenzire man die (I. 1.) und die (III. 3.), und man erhält

IV. 4) $$-P_\varphi \cdot \cos\varphi - \partial P_\varphi \cdot \sin\varphi + N_\varphi \cdot \cos\varphi + \mu N_\varphi \cdot \sin\varphi = 0,$$

V. 5) $$\mu N_\varphi = \partial P_\varphi.$$

Wird nun aus diesen beiden Gleichungen noch N eliminirt, so erhält man

VI. 6) $$\partial P_\varphi = \mu \cdot P_\varphi;$$

und diese Gleichung integrirt giebt

VII. 7) $$P_\varphi = A \cdot e^{\mu\varphi},$$

wo A eine willkührliche und noch zu bestimmende Konstante ist. Die Gleichung (V. 5.) giebt nun noch

VIII. 8) $$N_\varphi = P_\varphi = A \cdot e^{\mu\varphi};$$

und substituirt man diese Werthe von N_φ und P_φ in die Gleichung (II. 2.), so ergiebt sich aus ihr noch der Werth der Konstante A, nämlich $A = W$ *); so daß man hat

IX. 9) $$P_\varphi = W \cdot e^{\mu\varphi}.$$

Setzt man zuletzt in (IX. 9.) φ' statt φ und P statt P_φ, so hat man noch

X. 10) $$P = W \cdot e^{\mu\varphi'}$$

als die gesuchte Gleichung zwischen Kraft und Last.

---

*) Es bedarf wohl keiner besondern Erwähnung, daß man aus (VIII. 8.) die Konstante A viel bequemer dadurch bestimmt, daß man in (VIII. 8.) $\varphi = 0$ setzt, weil dann offenbar $P_\varphi = W$ werden muß; dies giebt augenblicklich $A = W$. Man hätte dann untersuchen müssen, ob die Gleichung (II.) keinen Widerspruch enthält, und hätte solche identisch gefunden.

Anmerk. Dieses Resultat zeigt uns, daß die Kraft P im geometrischen Verhältnisse wächst, während der Bogen φ' im arithmetischen Verhältniß zunimmt. — Wikkelt man das Seil n mal um den Cylinder ganz herum und noch um ein Stück α weiter, so daß

$$\varphi' = 2n\pi r + \alpha$$

wird, so giebt die Gleichung (X. 10.)

$$P = W \cdot e^{\mu(2n\pi r + \alpha)} = W \cdot e^{\mu\alpha} \cdot e^{2\mu n\pi r},$$

so daß P nach einigen Umwikkelungen schon ungemein groß werden muß, wenn das Gleichgewicht an der äußersten Grenze gerade statt finden soll.

Für $\alpha = 0$, $\mu = \frac{1}{3}$, $r = 1$ und
$n = 0;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 4;\ 6;$
z. B. wird die Kraft P bezüglich das
1; 1,688; 2,85; 8,121; 65,944; 4348¼; 286789
fache der Last W.

§. 117.

Von der Steifigkeit der Seile.

Die Gewalt mit welcher ein Seil (welches um eine Rolle oder Walze gebogen werden soll) dem Biegen widersteht, nennt man seine Steifigkeit. Diese Steifigkeit vermehrt die Last, wenn sich solche so bewegen soll, daß dabei ein Aufwikkeln des Seiles, an welchem die Last hängt, also ein Biegen desselben statt findet. Die ersten Versuche der Steifigkeit der Seile sind von Amonton angestellt und in den Mémoires de l'Académie de Paris année 1699 beschrieben. Später hat Coulomb dieselben Versuche mit derselben Vorrichtung im Großen wiederholt und seine Resultate in den Mémoires de math. et phys. présentées à l'académie. T. X. Paris 1785. beschrieben. Wir geben hier nur ganz kurz die Resultate. Zuerst die hier vorkommenden Begriffe und Bezeichnungen.

Wir denken uns ein Seil über eine Rolle mit unbeweglichem Bolzen geschlagen, deren Halbmesser $= r$ ist. Die Dicke des Seiles, d. h. den Durchmesser eines Querschnittes desselben,

nennen wir δ. An beiden Seiten denken wir uns ein Gewicht Q hängend, welches die Spannung des Seiles heißt. Das Gewicht F, welches nun auf der einen Seite zu Q noch hinzugelegt werden muß, damit die Steifigkeit des Seiles auf der andern Seite gerade überwunden werde, bestimmt die relative Größe der Steifigkeit. Dieser Ausdruck F wurde nun, weil er mit δ und Q offenbar wachsen, dagegen, wenn r wächst, abnehmen muß, der Form nach so angenommen, nämlich

$$(\odot)\cdots \qquad F = (A + B \cdot Q^t) \cdot \frac{\delta^n}{r^m},$$

und durch Versuche wurden dann die unbestimmten Exponenten m, n, t und die unbestimmten Koeffizienten A und B vollends dazu gefunden.

Um z. B. t zu finden, nimmt man drei für dasselbe Seil und dieselbe Rolle, aber für verschiedene Spannungen gefundene Versuchszahlen F, Q; F', Q'; F'', Q''; substituirt solche in die Gleichung ($\odot$) und hat dann drei Gleichungen, aus denen die beiden Koeffizienten $A \cdot \frac{\delta^n}{r^m}$ und $B \cdot \frac{\delta^n}{r^m}$ eliminirt werden können, so daß zuletzt eine Gleichung $\frac{F'' - F}{F' - F} = \frac{Q''^t - Q^t}{Q'^t - Q^t}$ bleibt, welche t liefert. Eine große Reihe solcher Versuche hat $t = 1$ gegeben, also daß man

$$1) \qquad F = (A + B \cdot Q) \cdot \frac{\delta^n}{r^m}$$

hat.

Um den Exponenten m von r^m zu finden, muß man Versuche anstellen, bei einerlei Spannung Q und einerlei Dicke δ des Seiles, dagegen mit verschiedenen größern und kleinern Rollen. Sind F, r; F', r' zwei solche zusammengehörige Versuchszahlen, und substituirt man diese in die Gleichung (1.), so erhält man zwei Gleichungen, aus denen $(A + BQ) \cdot \delta^n$ eliminirt werden kann, so daß eine Gleichung zur Bestimmung von m bleibt, nämlich

$$m = \frac{\log F' - \log F}{\log r - \log r'}.$$

Eine größere Reihe solcher Versuche giebt als Mittelwerth

$$m = 1{,}2.$$

Also hat man

$$2) \qquad F = (A + B \cdot Q) \cdot \frac{\delta^n}{r^{1,2}}.$$

Um den Exponenten n von δ^n zu finden, stellt man Versuche an mit Seilen von verschiedener Dicke, aber mit derselben Rolle und mit derselben Spannung. Sind dann hier F, δ; F', δ'; zwei zusammengehörige Versuchszahlen; substituirt man solche in die Gleichung (2.), so erhält man zwei Gleichungen, aus denen (A + BQ) eliminirt und n gefunden werden kann, nämlich

$$n = \frac{\log F' - \log F}{\log \delta' - \log \delta}.$$

Bei einer größern Reihe von Versuchen und daher entnommenen Werthen von F, δ, erhält man aber sehr abweichende Werthe von n. — Eben so abweichende Werthe ergeben sich zuletzt für A und B. — Ungefähr konnte man $n = 2$ nehmen.

Diese letzt erwähnten Resultate scheinen zu beweisen, daß die Form von F in (⊙) keine gut gewählte ist, und daß man sich nach einer den Umständen mehr sich schmiegenden Form des Ausdrucks für F umsehen müsse, wenn man übereinstimmende Werthe der Koeffizienten und Exponenten haben wollte. Namentlich ist gewiß noch der Umstand in die Form des Ausdrucks für F mit aufzunehmen, daß das Seil auf der Rolle mehr oder minder platt gedrückt wird, und daß bei dem Aufwikkeln die nächst folgenden Stellen des Seiles immer wieder erst platt gedrückt werden, so daß das Seil, indem es sich an der Rolle aufwikkelt, gleichsam in dem Zustande eines Fuhrwerks sich befindet, welches eine Anhöhe hinauf fahren soll.

Bis dergleichen genauere Untersuchungen noch angestellt werden, begnügt man sich

3) $$F = k \cdot \frac{\delta^2}{r} \cdot Q$$

zu nehmen, wo k eine Versuchszahl ist.

Was nun die Versuchszahl k betrifft, so nimmt Eytelwein in seiner Statik „unter der Voraussetzung, daß r der „Halbmesser der Rolle in preußischem Fußmaße, daß aber „δ die Dicke des Seiles in preußischen Linien ist,"

(C)... $$F = \frac{1}{3500} \cdot \frac{\delta^2}{r} \cdot Q.$$

Anmerk. 1. Um diese Größe F muß man also in allen vorhergegangenen Untersuchungen über feste und lose Rollen, über Rollen- und Flaschen-Züge, die Spannung Q eines jeden Seiles vermehren, welches sich bei der beabsichtigten Bewegung aufzuwikkeln hat, wenn man im End-Resultate die Kraft haben will, welche um noch so wenig vermehrt werden muß, wenn trotz der Steifigkeit der Seile doch augenblicklich die beabsichtigte Bewegung eintreten soll. Die von uns für die feste und lose Rolle, für die Rollen- und Flaschen-Züge gegebenen End-Resultate ändern sich danach alle in etwas ab; wir unterlassen es aber, diese nun geänderten Formeln noch herzusetzen, da sie nach den vorliegenden Mustern selbst von jedem Anfänger leicht gefunden werden können, und dabei in ihnen doch noch sehr viel Unbestimmtes liegt, so daß der Praktiker sich ihrer nur mit sehr problematischem Erfolge bedienen könnte, wenn seine Anwendungen hinsichtlich der Größe der Spannungen, des Materials, der Formation, dem Alter und der Dicke des Seiles, endlich hinsichtlich der Größe der gebrauchten Rollen, nicht zufällig denen nahe kommen, die bei denjenigen Versuchen gebraucht worden sind, welche diese Gleichung (C) gegeben haben.

Anmerk. 2. Genauere Untersuchungen über die Steifigkeit der Seile müssen daher noch gewünscht werden. Wir beschreiben hier nur noch in der Kürze die Vorrichtung, welche Amonton und nach ihm Coulomb zu ihren Versuchen benutzt haben.

Eine große Wageschale DD (Fig. 63.) mit einer Belastung

R, hängt an zwei gleich dicken Seilen DBA, DBA, welche beide einmal um einen Cylinder CC gewikkelt und in A, A aufgehangen sind. In der Mitte G des Cylinders ist ein sehr biegsamer Faden herumgelegt und daran eine kleine Wagschale H gehängt. Das Gewicht in dieser kleinen Schale H (nebst dem Gewicht dieser Schale selber), welches nöthig ist, um den Cylinder zum Drehen, also zum Heruntersinken zu bringen, ist nun gleich der Summe der Steifigkeit der beiden Seile; die Hälfte dieses Gewichtes ist also die Steifigkeit F selbst. Die Hälfte des Gewichtes der großen Wageschale DD nebst der Belastung R darin ist dagegen das, was in Vorstehendem durch Q bezeichnet worden ist.

Amonton's Versuche waren nur im Kleinen, mit Seilen von 1—3 Linien dick, und mit einer Belastung, die im Maximum nur 30 Pfund auf das Seil betrug, angestellt. Coulomb's Versuche sind dagegen so eingerichtet gewesen, daß die Resultate für die gewöhnlichen Anwendungen in der Technik mit größerer Sicherheit gebraucht werden können.

Außer den Versuchen mit neuen trokkenen Seilen hat Coulomb auch noch andere mit nassen und mit getheerten Seilen angestellt. Er fand, daß die Feuchtigkeit bei dünnen Seilen die Biegsamkeit vermehrt, daß aber nasse und dicke Seile, besonders wenn sie von wenig Kraft gespannt werden, unbiegsamer sind, als trokkene Seile bei übrigens gleichen Umständen. Dagegen war bei dünnen getheerten Seilen die Steifigkeit, in Vergleich mit trokkenen Seilen von eben den Abmessungen, nur wenig vermehrt, und nur bei dicken getheerten Seilen wurde die Steifigkeit um etwa $\frac{1}{6}$ größer, als bei trokkenen Seilen.

Die Statik fester Körper.

Dreizehntes Kapitel.

Einiges über die Stabilität der Körper.

§. 118.

Begriff des stabilen Gleichgewichts.

Ist ein angegriffener übrigens freier Körper im Gleichgewicht, so muß die geringste Kraft, welche noch hinzutritt, das Gleichgewicht stören. Hängt dagegen ein angegriffener Körper mit einem absolut festen (d. h. unbeweglichen) lose zusammen, so kann der Zusammenhang ein solcher seyn, daß ebenfalls jede noch so kleine neu hinzutretende Kraft das Gleichgewicht augenblicklich stört und für immer vernichtet, und dann sagt man „das Gleichgewicht sey nicht stabil;" es kann aber auch der Zusammenhang des angegriffenen und im Gleichgewicht sich befindenden Körpers mit dem unbeweglichen so seyn, daß entweder eine bedeutendere Kraft hinzutreten müßte, um das Gleichgewicht zu stören, oder daß das durch die kleinste Kraft gestörte Gleichgewicht sich von selbst, vermöge der übrigen auf den Körper noch wirkenden Kräfte wieder herzustellen strebt, und dann heißt das Gleichgewicht ein stabiles.

Liegt z. B. ein Körper mit einer einzigen seiner Ecken z. B. A auf einer unbeweglichen und festen horizontalen Ebene dergestalt auf, daß dieser Unterstützungs-Punkt A gerade vertikal unter dem Schwer-Punkt S

des Körpers liegt, so ist nothwendig Gleichgewicht; aber dieses Gleichgewicht ist nicht stabil, weil die geringste Kraft, die noch hinzutritt, solches augenblicklich stören und auf immer vernichten wird. Ein solches Gleichgewicht ist daher bei einem physischen Körper gar nicht sichtbar zu machen.

Wird derselbe Körper mit zweien seiner Ecken auf die feste horizontale Unterlage gestellt, so ist das Gleichgewicht, wenn überhaupt ein solches vorhanden, immer noch nicht stabil.

Wird aber derselbe Körper mit dreien oder mit mehreren seiner Ecken auf die feste horizontale Unterlage gestellt, so daß diese Ecken auf dem Horizont, indem man solche durch gerade Linien verbindet, eine Grundfläche bilden, und fällt die Projektion S_1 des Schwer-Punktes S des Körpers innerhalb dieser Grunfläche, so ist das Gleichgewicht ein stabiles, und desto stabiler für denselben Körper, je weiter S_1 von jeder Seite der Grundfläche absteht.

Hängt man den Körper mit einem Faden an die Decke eines Zimmers, so ist er, wenn er überhaupt im Gleichgewicht sich befinden sollte, ebenfalls im stabilen Gleichgewicht. Denn obgleich eine geringe Kraft sein Gleichgewicht stören wird, so werden doch seine Schwere, die Reibung, der Widerstand der Luft, ꝛc. sich vereinigen, um das Gleichgewicht bald möglichst wieder herzustellen.

§. 119.

Begriff der Stabilität eines schweren Körpers, der auf einer festen horizontalen Ebene ruht.

In der Baukunst werden Mauern (mit oder ohne Plinten, mit oder ohne Strebepfeiler ꝛc. ꝛc.), ferner Gewölbe und dgl. als feste Körper gedacht, welche mit ihrer horizontalen Grundfläche auf dem horizontalen und festen, unbeweglichen Fußboden lose aufsitzen. Tische, Stühle, eine Menge verschiedener Maschinen sitzen auf dieselbe Weise auf horizontaler fester, unbeweglicher Unterlage lose auf. Obgleich auf diese Körper ihre Schwere wirkt, so sind sie doch im stabilen Gleichgewicht. Ist nun K irgend ein solcher Körper; ist AB eine der Kanten seiner Grundfläche (mit welcher er auf dem Horizont aufsitzt), ist S_1 die Projektion seines Schwer-Punktes S auf diese Grundfläche; ist ferner p die senkrechte Entfernung CS_1 der Projektion S_1 von der Kante AB, und ist endlich G sein Gewicht, so ist

$p \cdot G$ das statische Moment des Gewichtes G in Bezug auf den Punkt C als Centrum der Momente gedacht, oder das

statische Moment des Gewichtes G in Bezug auf AB als Momenten-Axe.

Je größer nun dieses statische Moment p·G ist, desto mehr Hinderniß findet nach der Theorie des Hebels (§§. 82. 83.) jede Kraft, welche das Bestreben hat, den Körper K um diese Kante AB umzukanten, weil sie dies nur dann bewirkt, wenn ihr statisches Moment um diese Kante, dem statischen Momente p·G gleich ist, d. h. wenn das statische Moment ihrer Projektion auf die Ebene SS_1C in Bezug auf dasselbe Centrum C, größer als p·G ist.

Weil daher die Sicherheit vor dem Umkanten um die Grundkante AB desto größer ist, je größer das Produkt p·G gefunden wird, so nennt man dieses Produkt p·G die Größe der Stabilität des Körpers K in Bezug auf diese Kante AB, auch schlechtweg die Stabilität in Bezug auf AB.

§. 120.

Folgerungen.

1) Ein und derselbe Körper K hat sonach in Bezug auf verschiedene seiner Grundkanten auch eine verschiedene Stabilität. Von der Stabilität schlechtweg, ohne bestimmte Angabe der Grundkante, in Bezug auf welche sie gefunden werden soll, kann daher nur bei solchen Körpern die Rede seyn, deren Grundkanten alle von der Projektion S_1 des Schwer-Punktes S gleich weit abliegen.

2) Die Stabilität eines und desselben Körpers ist in Bezug auf diejenige seiner Grund-Kanten die größeste, welche von der Projektion S_1 des Schwer-Punktes S am weitesten abliegt. Die Stabilität ist dagegen für diejenige Kante die kleinste, welche dem Punkte S_1 am nächsten liegt.

3) Von zwei Körpern, die gleiches Gewicht haben, und deren Stabilität in Bezug auf eine, in jeder der beiden Grundflächen gegebene Kante mit einander verglichen werden sollen, hat derjenige die größere Stabilität, bei welchem die fragliche

Grundkante von der Projektion des Schwer-Punktes am weitesten absteht.

Haben daher zwei Mauern dieselbe Länge, dieselbe Höhe, auch dieselbe Menge des Materials, so hat unter allen übrigen gleichen Umständen diejenige nach jeder Seite hin die größere Stabilität, welche unten bis zu einer gewissen Höhe hin dicker, oben aber um so viel dünner gemacht wird (d. h. welche eine Plinte hat), während die andere von unten bis oben hin gleich dick ist.

Eben so wird nach einer Seite hin eine größere Stabilität erreicht, wenn man nach dieser Seite zu Strebepfeiler anbaut, dagegen die Dicke der Mauer um so viel vermindert.

Endlich wird die Stabilität der Mauer nach jeder der beiden Seiten hin vergrößert, wenn man die Grundkanten dadurch von der Projektion S_1 des Schwer-Punktes weiter entfernt, daß man der Mauer selbst in nicht zu großen Entfernungen Pfeiler giebt, deren Grundflächen auf beiden Seiten der Mauer über die Grundflächen der letztern heraustreten.

4) Da es einerlei ist, ob man das Gewicht G eines Körpers in seinem Schwer-Punkt S angebracht sich denkt, oder ob die Gewichte G', G'', G''', ꝛc. ꝛc. seiner einzelnen Theile in ihren Schwer-Punkten S', S'', S''', ꝛc. ꝛc. angebracht gedacht werden; und da das statische Moment irgend einer Kraft G in Bezug auf eine feste Dreh-Axe AB, gleich ist der Summe der statischen Momente ihrer einzelnen gleich geltenden Kräfte um dieselbe Dreh-Axe, — so wird die Stabilität eines Körpers in Bezug auf eine seiner Grundkanten auch noch dadurch gefunden, daß man die Stabilität aller einzelnen seiner Theile in Bezug auf dieselbe Grundkante findet, und letztere alle zu einander addirt.

Dies Verfahren ist in vielen Fällen, z. B. bei Bestimmung der Stabilität der Mauern mit Strebepfeilern, Plinten und dergl. besonders zu empfehlen.

5) Sollen die Stabilitäten zweier homogenen Körper (z. B. zweier aus demselben Material zu fertigenden Mauern) bloß mit einander verglichen werden, so kann man statt der Gewichte ihre Raum-Inhalte setzen. Und haben übrigens die beiden Körper prismatische Form von einerlei Länge, so kann man häufig bloß die Stabilität zweier Theile derselben, welche die Länge $= 1$

haben (oder wie man sich ausdrückt, die Stabilität zweier Querschnitte) mit einander vergleichen.

§. 121.

Bestimmung der Stabilität eines Gewölbes als Beispiel.

Es sey (Fig. 55.) DdDd der Querschnitt eines Gewölbes mit seinen Widerlagern DdHGE. In selbigem seyen DAAD und daad zwei mit den Halbmessern R und r aus dem Mittelpunkte C beschriebene Kreisbogen. Von diesem Gewölbe betrachten wir ein durch zwei solche, um die Längen-Einheit von einander entfernte Querschnitte gebildetes Stück. Die Linie SC sey vertikal; der durch den Winkel $ACS = \alpha$ gegebene Theil AaaA sitze in den Fugen Aa, Aa (deren Verlängerung durch den Mittel-Punkt C der Kreisbogen hindurchgeht) nur lose auf; die übrigen Theile des Gewölbes werden als mit ihren Widerlagern fest zusammenhängend gedacht, und so daß die letzteren auf einer gemeinschaftlichen horizontalen und unbeweglichen Unterlage GHd_1G aufliegen. Auf dem ganzen Gewölbe liegt noch eine Last, welche sich so vertheilt, daß auf das Stück AaaA das Gewicht P davon kommt, welches gemeinschaftlich mit dem Gewicht W des Stücks AaaA in dessen Schwer-Punkt wirkt. Man soll die Breite $GH = x$ der Widerlager finden, so daß die Stabilität der Seiten-Theile dem Seiten-Druck des eingekeilten Stücks gerade noch das Gleichgewicht hält. Würde dann dieser letztere Druck um noch so wenig größer, so würde sogleich ein Umkanten der Widerlager mit den an ihnen festen Gewölbstücken um die Kante bei G statt finden.

Man bezeichne durch W' und W'' die Gewichte des Bogenstücks AaDd und des Widerlagers dDEGH; es seyen alle Längen in Fußen ausgedrückt und ein Kubikfuß des Materials wiege Γ Pfunde; es sey ferner Winkel $DCS = \beta$, so daß Winkel $DCA = \beta - \alpha$ ist, alles im Bogen-Maaß für den Radius 1, so ist

$$W = (R^2 - r^2) \cdot \alpha \cdot \Gamma$$

und

$$W' = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2) \cdot (\beta - \alpha) \cdot \Gamma.$$

Wird ferner der Querschnitt des Widerlagers als ein Rechteck angesehen, dessen Breite x und Höhe EG = h ist, so hat man noch

$$W'' = h \cdot x \cdot \Gamma.$$

Diese Gewichte P, W, W' und W'' sind nun die hier als wirkend gedachten Kräfte. Suchen wir jetzt noch ihre Angriffs-Punkte, d. h. die Schwer-Punkte dieser drei Theile des Gewölbes. Zu dem Ende denke man sich, daß der in (Fig. 55.) sichtbare Querschnitt derjenige sey, welcher durch alle diese gesuchten Schwer-Punkte hindurchgeht. Der Schwer-Punkt des Ringstückes AadD sey F, und CF = z''; die Entfernungen der Schwer-Punkte der Sektoren ACD und acd seyen aber bezüglich z und z', so ist nach der Theorie vom Schwer-Punkt (§§. 55. und 58.)

$$z = \tfrac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}; \qquad z' = \tfrac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)};$$

und z'' gegeben durch die Gleichung

$$ACD \cdot z = aCd \cdot z' + AaDd \cdot z'',$$

während CF den Winkel ACD oder $\beta - \alpha$ halbirt. — Dabei ist noch

$$ACD = \tfrac{1}{2} R^2 \cdot (\beta - \alpha), \qquad aCd = \tfrac{1}{2} r^2 \cdot (\beta - \alpha)$$

und

$$AadD = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2) \cdot (\beta - \alpha);$$

so daß CF oder

$$z'' = \tfrac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}$$

wird.

Den Schwer-Punkt K des Widerlagers kann man sich in der Mitte des Rechtecks denken, so daß

$$GK_1 = \tfrac{1}{2} x \quad \text{und} \quad K_1 K = \tfrac{1}{2} h$$

seyn muß.

Der Theil AaaA wirkt genau wie ein Keil, bringt also normal auf die Fuge Aa nach (§. 113.) einen Druck N hervor, so daß

$$N = \frac{\tfrac{1}{2}(W + P)}{\sin \alpha}$$

ist, wie man findet, wenn der Keil für sich in's Gleichgewicht gebracht wird (§. 79.); und dieser Druck wird, um bequemere Momenten-Arme zu bekommen, sogleich zerlegt

in den horizontalen, $= N \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}(W+P) \cdot \cot g\,\alpha$,

und in den vertikalen, $= N \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(W+P)$.

Die Stelle, an welcher dieser Druck N wirkt, bleibt unbestimmt, weil die beiden andern Gleichgewichts-Gleichungen des Keils AaaA identisch $0 = 0$ werden. Der Druck vertheilt sich also auf die ganze Fugen-Fläche; man kann ihn in der Mitte derselben vereinigt denken; wir aber nehmen an, daß er in a wirke, theils weil bei der verhältnißmäßig geringen Dicke des Gewölbes der Unterschied nicht groß ist, theils auch, weil der Druck sich in a wirklich einfindet, wenn das Widerlager bei G umzukanten beginnt.

Um nun die Momenten-Arme der Kräfte zu finden, zieht man die Vertikalen aa_1, FF_1, dd_1, DD_1, CC_1 und die Horizontale CBJLU, und man hat

$$DU = R \cdot \cos\beta, \qquad CU = R \cdot \sin\beta,$$
$$dL = r \cdot \cos\beta, \qquad CL = r \cdot \sin\beta,$$
$$aB = r \cdot \cos\alpha, \qquad CB = r \cdot \sin\alpha,$$
$$FJ = z'' \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha); \qquad CJ = z'' \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha).$$

Und weil noch

$$C_1G = x + CL = x + r \cdot \sin\beta,$$

so wie $C_1C = h - DU = h - R \cdot \cos\beta$

ist, so findet sich

$$Ga_1 = x + r \cdot (\sin\beta - \sin\alpha),$$
$$GF_1 = x + r \cdot \sin\beta - z'' \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)$$

und $aa_1 = h - R \cdot \cos\beta + r \cdot \cos\alpha$.

Das von dem Druck N herrührende statische Moment in Bezug auf das Centrum G ist aber

$$N \cdot \cos\alpha \times aa_1 - N \cdot \sin\alpha \times Ga_1;$$

die gegenwirkende Stabilität des festen Seitentheils ADEGd,da ist dagegen

$$W' \times GF_1 + W'' \times GK_1.$$

Im Gleichgewicht müssen nun nach (§§. 82. 83.) diese beiden Mo-

Momente einander gleich seyn; also hat man, wenn statt W, W′, W″, N, z″ ꝛc. ihre Werthe gesetzt werden, wenn man ferner mit 2 multiplizirt, durch Γ dividirt und dabei

$$\frac{P}{\Gamma} = m$$

setzt,

$$[(R^2 - r^2)\cdot\alpha + m]\cdot cotg\,\alpha\cdot(h - R\cdot cos\,\beta + r\cdot cos\,\alpha) - [(R^2 - r^2)\cdot\alpha + m]\cdot(x + r\cdot sin\,\beta - r\cdot sin\,\alpha)$$
$$= (R^2 - r^2)\cdot(\beta - \alpha)\cdot\left(x + r\cdot sin\,\beta - \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\cdot\frac{sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}\cdot sin\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)\right) + h\cdot x^2.$$

Dies ist daher die Gleichung, aus welcher die Breite x der Widerlager gefunden werden muß, so daß, wenn selbige um noch so wenig breiter genommen werden, unter den vorausgesetzten Umständen kein Umkanten der Widerlager zu fürchten ist.

Betrachtet man diese Gleichung aufmerksamer, so findet man:

1) Je kleiner α gedacht ist, desto größer ergiebt sich x.

2) Für $\alpha = \beta$ wird sie

$$hx^2 + [(R^2 - r^2)\cdot\beta + m]\cdot x - [(R^2 - r^2)\cdot\beta + m]\cdot[h - (R - r)cos\beta]\cdot cotg\beta = 0.$$

3) Für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$ findet sich daher $x = 0$.

Anmerk. Es ist klar, daß man in den Anwendungen auf den Gewölbbau, jeden einzelnen Gewölbstein, vom untersten (dem Kämpfer) an bis zu dem obersten AaaA (dem Schlußstein), für sich in's Gleichgewicht stellen kann und, genau genommen, auch muß, um zuletzt aus diesem Gesichts-Punkte die bloßen Widerlager Ddd$_1$GE durch schickliche Bestimmung der Breite x derselben, vor dem Umkanten um G bewahren zu können.

Wir verweilen hierbei nicht länger, sondern verweisen den Praktiker, welcher diese Art der Anwendung der Statik näher kennen lernen will, auf „Eytelwein's Statik fester Körper, II. Band 2. Auflage.“

Die Statik feſter Körper.

Vierzehntes Kapitel.

Von den Wagen.

§. 122.

Eine Wage (Libra, *Balance*) iſt jedes Mittel, durch welches die Gewichte gegebener Körper beſtimmt werden. Man hat Federwagen, wo die Kraft einer Feder dem Gewicht das Gleichgewicht hält; Seilwagen oder Fadenwagen, wo bloße Seile in ihrer Verbindung den Zweck erreichen; und Hebelwagen, welche nichts weiter, als gewöhnliche Hebel ſind, zweckmäßig eingerichtet.

Zu dieſen letztern gehört namentlich die gleicharmige oder gemeine Wage, welche dem Weſen nach ein gleicharmiger Winkelhebel iſt, und die Schnellwage (Statera romana, *Peson*), welche ein ungleicharmiger Hebel iſt. Kann man bei der letztern den Anhänge-Punkt des Gewichtes verſchieben, ſo iſt ſie die römiſche im eigentlichſten Sinn; kann aber der Unterſtützungs-Punkt verſchoben werden, ſo wird ſie die ſchwediſche genannt. Zu den Hebelwagen gehört auch noch die Brükkenwage, auf welcher ganze Laſtwagen auffahren und gewogen werden können.

§. 123.

Bei der gemeinen Wage unterſcheidet man den Wagebalken (Jugum, *Fléau*), an deſſen Enden die Wageſchalen

(Lances, *Bassins*) hängen, die Zunge (Lingula, Examen, *Aiguille*), welche senkrecht auf dem Wagebalken befestigt ist, und die in der Mitte des Wagebalkens befindlichen Zapfen, welche in den Pfannen der Scheren (Agitæ, *Chasse*) ruhen. Gleiche Gewichte in beide Wageschalen gelegt müssen bewirken, daß die Zunge mit den Armen der Scheren in einerlei Vertikal-Ebene fällt, d. h. daß der Wagebalken horizontal liegt. Ein kleiner in die eine Wageschale gelegter Ueberschuß an Gewicht muß einen Ausschlag geben, d. h. veranlassen, daß der Balken eine schiefe Lage annimmt. Dann bildet die Zunge mit den vertikalen Scheer-Armen einen Winkel, durch welchen der Ausschlag gemessen wird, welcher daher selbst der Ausschlag genannt wird. Eine Wage ist empfindlicher als eine andere, wenn sie bei gleicher Belastung und gleichem Uebergewicht einen größern Ausschlag giebt.

Derjenige Punkt, wo der Zapfen des Wagebalkens mit seiner untern, wenig abgerundeten Schärfe in den Pfannen der Schere ruht, heißt der Dreh-Punkt der Wage.

Liegt der Schwer-Punkt des Ganzen gerade im Dreh-Punkt, und liegen die Aufhänge-Punkte der Wagschalen mit dem Dreh-Punkte in einer und derselben Geraden, so bleibt die Wage, bei jeder Lage des Wagebalkens im Gleichgewicht, wenn sie in irgend einer Lage desselben im Gleichgewicht ist. Liegt der Schwer-Punkt des Ganzen über dem Dreh-Punkt, so wird die Wage, wenn sie sich auch im Gleichgewicht befinden sollte, bei der geringsten Bewegung umschlagen. In beiden Fällen wird daher die Wage ihrem Zwecke schlecht entsprechen, weil es die erste Bedingung der Konstruktion einer gemeinen Wage ist, daß, wie viel oder wie wenig sie immer belastet seyn mag, solche doch immer im stabilen Gleichgewicht sich befinde, so daß sie, gestört, in die alte Lage zurück zu kehren trachte.

§. 124.

Es seyen A und B (Fig. 56.) die Aufhänge-Punkte der Wageschalen; die Gerade AB sey in G halbirt, so daß G der Mittel-Punkt des auf beiden Seiten in jeder Beziehung völlig symmetrischen Wagebalkens ist. Der Dreh-Punkt C und der Schwer-Punkt g des Balkens liegen mit G in einer auf AB senkrechten Geraden. Das Gewicht des Wagebalkens sey

$= W$, das einer jeden der Wageschalen $= S$, und in jeder der Wageschaalen liege noch ein Gewicht P; außerdem aber befinde sich in der bei B noch eine Uiberwucht Q. Man soll die Größe des Ausschlags $GCF = DCE = \varphi$ finden, wenn die Gerade DCF die vertikale Richtung der Scheren-Arme vorstellt.

Die Wage befindet sich um den absolut festen Punkt C im Gleichgewicht. Also muß die Summe der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf das Centrum C, der Null gleich seyn. Nun wirkt in g vertikal das Gewicht W des Balkens; in A ebenfalls vertikal das Gewicht $P+S$, in B dagegen vertikal das Gewicht $P+S+Q$. Ist nun $CG = b$, $Cg = c$ (so daß $Gg = c - b$ wird), und zieht man HCK horizontal, und GL, gl vertikal, so hat man

$$CL = b \cdot \sin\varphi \quad \text{und} \quad Cl = c \cdot \sin\varphi.$$

Wird ferner $AG = BG = \frac{1}{2}AB = a$

gesetzt, so ist weiter

$$LB = LK = a \cdot \cos\varphi;$$

und die Momenten-Gleichgewichts-Gleichung wird

$$\text{I.} \quad (P+S)\cdot(a\cdot\cos\varphi + b\cdot\sin\varphi) + W\cdot c\cdot\sin\varphi - (P+S+Q)\cdot(a\cdot\cos\varphi - b\cdot\sin\varphi) = 0.$$

Dies ist daher die verlangte Gleichung zwischen Q und φ.

Löst man sie nach φ auf, so erhält man

$$\text{II.} \quad tg\,\varphi = \frac{a\cdot Q}{b(2P+2S+Q)+c\cdot W}.$$

Diese Gleichung läßt sehen:

1) Unter übrigens gleichen Umständen giebt die Wage einen größern Ausschlag, je größer a, d. h. je länger der Balken ist.

2) Je näher der Dreh-Punkt C am Mittel-Punkt G des Balkens liegt (d. h. je kleiner b ist), desto größer wird unter übrigens gleichen Umständen der Ausschlag, d. h. desto empfindlicher ist die Wage.

3) Wenn die Gewichte P und S gegen das Gewicht W des Balkens klein sind, so hängt die Empfindlichkeit der Wage auch von c ab, und sie ist desto empfindlicher, je näher der Punkt g an den Mittel-Punkt G des Balkens rückt.

4) Im Allgemeinen ist daher die Wage desto empfindlicher bei einerlei Ueberwucht Q, je kleiner b, c, W, P und S sind. — Und da auch

$$tg\varphi = \frac{a}{b} - a \cdot \frac{b \cdot (2P + 2S) + c \cdot W}{b \cdot [b(2P + 2S + Q) + c \cdot W]}$$

geschrieben werden kann, so sieht man auch, daß der Ausschlag φ zugleich mit dem Uebergewicht Q wächst oder abnimmt.

Anmerk. Man kann an die Zunge ein angeschraubtes Gewicht anbringen, welches höher hinauf und weiter herunter geschraubt werden kann. Dadurch kann man den Schwer-Punkt g des Balkens nach Belieben höher bringen, so daß sogar $c = 0$, ja selbst c negativ werden kann. Dadurch kann die Wage immer empfindlicher gemacht werden, was besonders dann wünschenswerth wird, wenn bei sehr großer Belastung der Wage die Empfindlichkeit zu sehr abgenommen haben sollte.

§. 125.

Haben bei einer richtigen gemeinen Wage die Wageschalen gleiche Belastung, so ist die Wage in Ruhe, wenn die Zunge einspielt, d. h. wenn AB horizontal liegt. Je rascher der Balken, wenn er aus dieser Lage gebracht wird, eine rückwärtsgehende Bewegung macht, um nach und nach in die horizontale Lage wieder zurück zu kehren, desto rascher wird die Wage genannt.

Denken wir uns daher einmal gleiche Gewichte P in den Schalen, und den Balken in die Lage AB (Fig. 56.) gebracht, so daß er mit dem Horizont HK den Winkel $\varphi = DCE$ bildet, so wird der Balken sogleich in die horizontale Lage zurückkehren, wenn nicht in B eine Kraft hinzutritt, welche ihn in dieser schiefen Lage erhält. Diese Kraft ist das Uebergewicht Q, welches mit φ durch die Gleichung (I. §. 124.) zusammenhängt; man kann aber auch statt Q eine Kraft R senkrecht auf BC anbringen, welche dasselbe leistet, und man kann nun die Gleichung suchen, welche zwischen φ und R statt findet. Das

Verfahren des (§. 124.), wiederholt, giebt aber sogleich, weil $CB = \sqrt{a^2+b^2}$ ist,

I. $(P+S)\cdot(a\cdot\cos\varphi + b\cdot\sin\varphi) + W\cdot c\cdot\sin\varphi -$
$(P+S)\cdot(a\cdot\cos\varphi - b\cdot\sin\varphi) - R\cdot\sqrt{a^2+b^2} = 0,$

woraus

II. $\dfrac{2b(P+S)+c\cdot W}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\varphi = R$

hervorgeht.

Die Gleichung (I. §. 123.), wenn sie nach dem Ausschlag Q aufgelöst wird, giebt

III. $\dfrac{2b\cdot(P+S)+c\cdot W}{a\cdot\cos\varphi - b\cdot\sin\varphi}\cdot\sin\varphi = Q,$

woraus, wenn man (II. und III.) mit einander vergleicht,

IV. $Q\cdot(a\cdot\cos\varphi - b\cdot\sin\varphi) = R\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

hervorgeht, wie man auch a priori einsehen könnte, da die statischen Momente von Q und R um das Centrum C einander gleich seyn müssen, wenn R das leisten soll, was sonst das Uebergewicht Q leistet.

Die Gleichung (II.) läßt erkennen: je empfindlicher die Wage ist (d. h. je kleiner b und c und je größer a sind), desto kleiner ist auch, unter übrigens gleichen Umständen, die Kraft R, d. h. desto weniger rasch ist die Wage.

Anmerk. 1. Will man einen Gegenstand K wiegen, wenn auch die gemeine Wage, deren man sich dazu bedienen muß, nicht ganz genau ist, so bringe man K in die eine Schale und das nöthige Gewicht P in die andere, damit die Wage ihre horizontale Lage hat, d. h. die Zunge einspielt. Dann nimmt man K heraus und legt dafür soviel Gewicht Q hinein, bis dasselbe Einspielen der Zunge erfolgt. Dann ist nothwendig

$$K = Q.$$

Dies Verfahren nennt man die Tarirung.

Anmerk. 2. Sind die Arme einer gemeinen Wage ungleich, so findet man für denselben Körper K zwei verschiedene Gewichte P und R, je nachdem man den Körper K in die eine oder in die andere Wageschale bringt. Ist nun x die Länge

des einen Arms und z die Länge des andern, so hat man bei dem ersten Wiegen

$$P \cdot x = K \cdot z;$$

bei dem zweiten Wiegen dagegen ist

$$R \cdot z = K \cdot x.$$

Multiplizirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$P \cdot R = K^2, \quad \text{also} \quad K = \sqrt{P \cdot R};$$

so daß man auf diesem Wege doch wieder das Gewicht K des Körpers finden kann, auch wenn die Wage nicht genau ist. — Das Verfahren der (Anmk. 1.) ist jedoch jedenfalls das sicherste, um das Gewicht eines Körpers möglichst genau zu finden.

§. 126.

Die gewöhnliche oder römische Schnellwage ist im Wesentlichen gerade so eingerichtet, wie die gemeine Wage, nur daß sie bedeutend ungleiche Arme, und nur an dem kürzeren Arm eine Wagschaale hat; an dem andern viel längern Arm befindet sich ein konstantes Gegengewicht (*Contre-poids*), welches mit einem Haken, der nach unten eine scharfe Kante hat, in größerer oder geringerer Entfernung vom Dreh-Punkte beliebig angehängt werden kann.

Liegt der Schwer-Punkt des ganzen Balkens nebst Schale (aber ohne Gegengewicht) auf der Seite des kürzern Arms; bringt man dann am längern Arm das Gegengewicht so an, daß die Zunge einspielt, und bezeichnet man diese Stelle am Arm, wo das Gegengewicht hängt mit 0 (Null), so werden, wenn man in die Wageschale nach und nach die Gewichte W, 2W, 3W, ··· nW legt, und das Gegengewicht jedesmal um so viel vom Dreh-Punkt oder vom Null-Punkt entfernt, als nöthig ist, um die Zunge immer wieder einspielen zu machen, diese Entfernungen vom Null-Punkt, wenn die erstere b ist, nach und nach bezüglich b; 2b, 3b, ··· nb seyn.

Denn es sey g der Abstand des Dreh-Punktes von der durch den Schwer-Punkt gehenden vertikalen Richtung der Kraft

N, welche das Gewicht des Balkens nebſt Schale vorſtellt; a die Länge des kürzern Arms, oder vielmehr der ſenkrechte Abſtand des Dreh-Punktes von der Richtung der am Ende des kürzern Arms hängenden Gewichte W, 2W, 3W, ··· nW; ferner ſey x der Abſtand des Dreh-Punktes von der vertikalen Richtung des als Kraft wirkenden Gegengewichts P, ſo hat man die Gleichung, wenn in der Wageſchale die Laſt Q liegt,

1) $$a \cdot Q + g \cdot N = x \cdot P.$$

Setzt man nun in dieſer Gleichung $Q = 0$ und x_0 ſtatt x, ſo erhält man

2) $$gN = x_0 \cdot P,$$

wo x_0 die Entfernung des Dreh-Punktes von dem Null-Punkte des Balkens iſt; und wenn man dieſe Gleichung von der vorigen ſubtrahirt, ſo bleibt

3) $$a \cdot Q = (x - x_0) \cdot P,$$

wo $x - x_0$ der Abſtand des Gegengewichts P vom Null-Punkte iſt. Dieſer Abſtand findet ſich daher

4) $$x - x_0 = \frac{a}{P} \cdot Q,$$

und wird deshalb das nfache, ſo oft Q das nfache wird. — Aus der Gleichung (3.) folgt auch noch

5) $$a \cdot W = b \cdot P,$$

woraus ſich noch b finden läßt, wenn W gegeben.

Liegt aber der Schwer-Punkt vom Balken nebſt Schale nicht im kürzern Arm, ſo muß man erſt ein Gewicht A in die Schale legen, groß genug, daß der Schwer-Punkt des Ganzen wieder in den kürzern Arm zu liegen kommt. Dann bleibt alles genau ſo wie vorher. Der erſte Strich auf dem längern Arm iſt aber dann der, welcher (nicht mehr Null-Punkt genannt werden kann, ſondern welcher) dem Gewichte A entſpricht; die übrigen von ihm um b, 2b, 3b, ··· nb entfernten Striche bezeichnen dann das Daſeyn von

$$A + W, \quad A + 2W, \quad A + 3W, \quad \cdots \quad A + nW$$

Pfunden, Centnern, Lothen ꝛc. ꝛc., je nachdem man die Einheit genommen hat.

Anmerk. Hat man eine Schnellwage für ein bestimmtes Gegengewicht P eingetheilt, hat solche einen Null-Punkt, und bringt man nun an diesen Null-Punkt ein größeres Gegengewicht P', so muß man in die Schale ein Gewicht R legen, damit die Zunge wieder einspielt. Dieses Gewicht R muß so seyn, daß man

1) $$a \cdot R + g \cdot N = x_0 \cdot P'$$

hat. Bringt man nun an den Theilstrich, der vom vormaligen Null-Punkte um nb entfernt ist, und der also bei dem alten Gegengewicht P das Daseyn des Gewichts nW anzeigt, jetzt auch dieses größere Gegengewicht P' an, so hat man nicht bloß

2) $$a \cdot nW = nb \cdot P, \text{ oder } a \cdot W = b \cdot P,$$

sondern auch noch, wenn wir das jetzt durch P' angezeigte Gewicht durch $R + n \cdot W'$ bezeichnen,

3) $$a \cdot (R + n \cdot W') + g \cdot N = (x_0 + nb) \cdot P',$$

oder, wenn man die (1.) von der (3.) subtrahirt,

4) $$a \cdot nW' = nb \cdot P', \text{ d. h. } a \cdot W' = b \cdot P'.$$

Dividirt man zuletzt die (4.) durch die (2.), so ergiebt sich noch

5) $$\frac{W'}{W} = \frac{P'}{P}, \text{ oder } W' : W = P' : P.$$

Will man daher, daß das neue Gewicht P', um jeden Theilstrich weiter gehängt, ein Mehrgewicht W' anzeige, welches das mfache von dem Mehrgewichte W ist, das das alte, um einen Theilstrich weiter gehängte Gegengewicht P anzeigt, so darf man nur $P' = mP$ nehmen. Ist dies geschehen, so zeigt das auf den nten Theilstrich (vom Null-Punkte an) hängende alte Gegengewicht P, das Daseyn eines Gewichtes nW an, während das an dieselbe Stelle gehängte neue mfache Gegengewicht P' das Daseyn eines Gewichtes anzeigt, welches

$$= R + m \cdot (n \cdot W)$$

ist, während R selbst aus der Gleichung (1.) für $P' = mP$ gefunden werden kann, in der Praxis aber dadurch gefunden wird, daß man P' an dem ehemaligen Null-Punkt hängt, und nun in die Schaale ein Gewicht legt, welches die Zunge einspielen macht.

Auf dieſe Weiſe kann man eine eingetheilte Wage benutzen, um größere Laſten darauf zu wiegen, als dies mit dem alten Gegengewicht möglich geweſen wäre.

Anmerk. 2. Weil ſich aber größere Gegengewichte ſchwerer hin und her ſchieben laſſen, ſo pflegt man lieber, wenn größere Laſten gewogen werden ſollen, als das urſprüngliche Gegengewicht zu wiegen verſtattet, ſich der Vorhänge-Gewichte zu bedienen, welche an dem äußerſten Theil des längern Arms der Wage aufgehängt werden.

Soll z. B. die Wage, außer der Laſt nW, welche ſie am nten Theilſtrich angiebt, noch eine Laſt Q dazu, alſo die Laſt Q+nW angeben, ſo darf man nur, wenn in der Entfernung l vom Dreh-Punkte ein Vorhänge-Gewicht V angebracht wird,

$$a \cdot Q = l \cdot V$$

nehmen, ſo daß, wenn V zuerſt angehängt wird, dieſe Gleichung Q dazu liefert, oder, wenn die Laſt Q zuerſt gegeben ſeyn ſollte, aus dieſer Gleichung das Vorhänge-Gewicht V dazu gefunden werden kann. In der Praxis wird man das Verhältniß von V und Q durch einen Verſuch ausmitteln.

§. 127.

Von der Brückenwage des Quintenz.

Wir wollen noch kurz die Brückenwage des Quintenz betrachten, auf welcher beladene Wagen auffahren und gewogen werden können. Sie beſteht im Weſentlichen aus dem Wagebalken HKL (Fig. 64.), welcher ſich um D drehen kann, ganz ſo wie bei der römiſchen Schnellwage. In H hängt eine Wageſchale, in welche die Gewichte gelegt werden. An den beſtimmten Punkten K und L hängen, wenn der Wagebalken in der horizontalen Lage gedacht wird, an vertikalen Stangen KM und LN, welche ſich in K, M, L und N ohne merkliche Reibung drehen, horizontale feſte Unterlagen MR und NS, ſo daß die letztere ſich um den abſolut feſten Punkt S, die erſtere aber um einen Punkt R drehen kann, deſſen Projektion auf NS durch R_1 vorgeſtellt ſeyn mag. Auf der obern Unterlage MR iſt nun

die Pritsche UV befestigt, auf welche die zu wiegende Waare (der Lastwagen) aufgelegt (aufgefahren) wird. Die Theorie dieser Wage anzugeben, unter der Voraussetzung, daß, wie bei den übrigen Wagen, die Reibung nicht berücksichtigt werde.

Es sey T der Schwer-Punkt der Waare Q, und T_1 seine Projektion auf die Horizontale MR. Man setze HD = a, DK = b, KL = c, $MT_1 = y$, $RT_1 = x$, $NR_1 = d$, $SR_1 = e$; so erleidet, im Falle der Wagebalken sich in seiner horizontalen Lage befindet, der Punkt R_1 einen unbekannten Druck z, der Punkt N einen unbekannten Druck w, der Punkt T_1 den Druck Q und der Punkt M den unbekannten Druck u. Dabei ist aber nach der Theorie des Hebels

$$u = \frac{x}{x+y}\cdot Q; \qquad z = \frac{y}{x+y}\cdot Q,$$

und

$$w = \frac{e}{d+e}\cdot z = \frac{e}{d+e}\cdot\frac{y}{x+y}\cdot Q.$$

Ferner ist noch

$$P\cdot a = u\cdot b + w\cdot(b+c),$$

oder, wenn man statt u und w ihre Werthe in Q substituirt:

$$1) \quad P\cdot a = \left(\frac{bx}{x+y} + \frac{(b+c)\cdot e}{d+e}\cdot\frac{y}{x+y}\right)\cdot Q$$
$$= \frac{be(x+y)+bdx+cey}{(x+y)\cdot(d+e)}\cdot Q.$$

Damit nun in dieser Gleichung zwischen Kraft P und Last Q, die unbekannten Entfernungen x und y, welche bei jedem neuen Wagen, der aufgefahren wird, anders seyn werden, gar nicht mehr vorkommen, gehört es zum Wesen der Einrichtung dieser Brückenwage, daß

$$(\odot) \cdots \qquad b\cdot d = c\cdot e$$

gemacht werde. Die Gleichung (1.) wird dann

$$2) \qquad P\cdot a = \frac{be+bd}{d+e}\cdot Q = Q\cdot b.$$

Ist also z. B. a = mb, so ist auch Q = mP.

Anmerk. 1. In dieſer Rechnung iſt jedoch, genau genommen, Q das Gewicht der Waare nebſt Pritſche. Ferner iſt in den übrigen Gleichungen auf das Gewicht der einzelnen Theile der Wage ebenfalls keine Rückſicht genommen worden. Dieſe Gewichte ſind aber bedeutend genug, um, wenn die Theorie gründlicher werden ſoll, gehörig in Rechnung gebracht werden zu müſſen.

Anmerk. 2. Wegen der Fadenwage ſehe man den (§. 132.). — Die Theorie der Federwagen gründet ſich endlich auf Unterſuchungen, zu welchen das ſechszehnte Kapitel dieſes zweiten Theiles die Einleitung giebt.

Die Statik feſter Körper.

Fünfzehntes Kapitel.

Von den Seil-Maſchinen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Seil-Polygonen.

§. 128.

Die Verbindung mehrerer Seile oder Fäden unter einander, mittelſt Knoten, wird Seil-Maſchine genannt, ſo oft Kräfte (Kraft und Laſt) an ſelbiger angebracht werden ſollen. Unter Knoten (*Noeud*) verſteht man aber jeden Punkt, in welchem mehrere Seile zuſammenlaufen, und der Knoten heißt feſt (*fixe*), wenn die Seile in dieſem Vereinigungs-Punkte nicht verſchoben werden können; beweglich (*coulant*), wenn ein oder mehrere Seile mittelſt eines verſchiebbaren Ringes mit den übrigen Seilen verbunden ſind.

In den folgenden Unterſuchungen denken wir uns zunächſt immer Seile, welche vollkommen biegſam, unausdehnbar und ohne Schwere ſind.

Hat man ein Seil von beliebiger Länge, und ſind an mehreren Punkten deſſelben, ſo wie an deſſen Enden, Kräfte angebracht (mittelſt Seile oder ohne dieſelben), ſo bildet im Gleichgewicht das ganze Seil eine gebrochene Linie, welche zuweilen

in einer und derselben Ebene liegen kann, aber in der Regel nicht in einer und derselben Ebene liegen wird. Eine solche Vorrichtung nennt man insbesondere ein Seil-Polygon.

§. 129.

Ist an einer Seil-Maschine irgend wo das Ende eines Seiles absolut fest gemacht (d. h. an einen unbeweglichen Punkt fest geknüpft), so wird im Gleichgewicht dieses absolut feste Punkt in der Richtung des Seil-Endes gezogen (gedrückt) und ein eben so großer aber unbekannter Gegendruck ist daher dann die Kraft, welche als Spannung dieses Seil-Endes in die Rechnung gebracht werden muß, nach (§. 78.) Bei einer Seil-Maschine im Gleichgewicht wirkt also an jedem Seil-Ende, es mag solches absolut fest gemacht seyn oder nicht, eine Kraft in der Richtung dieses Seil-Endes, nur daß diese Kraft bald bekannt, bald unbekannt seyn kann.

§. 130.

Betrachten wir nun den einfachsten Fall zuerst, wo ein Seil AB (Fig. 57.) in M einen einzigen festen oder beweglichen Knoten hat und dabei in den Enden A und B absolut fest gemacht ist, oder sonst von Kräften P, Q gehalten wird.

Es mag aber der Knoten bei M fest oder beweglich seyn, so ist doch zuvörderst klar:

1) Diese Seil-Maschine kann nicht im Gleichgewicht seyn, wenn nicht die Richtungen der drei Kräfte P, Q, R, welche an ihr wirken, in einer und derselben Ebene liegen, nach (§. 8.).

2) Im Gleichgewicht ist allemal nach (I. Th. Mech. §. 13.)

$$\frac{P}{\sin CMB} = \frac{Q}{\sin CMA} = \frac{R}{\sin AMB},$$

und diese Gleichungen bestimmen zwei Stücke, z. B. die Winkel, wenn die Kräfte P, Q, R gegeben sind, oder die Spannungen P und Q an den Aufhänge-Punkten A und B, im Falle die Seile in A und B absolut fest gemacht, und die Winkel gegeben seyn sollten.

3) Ist W. AMB = 180°, so ist das Gleichgewicht nicht mehr möglich, wie klein auch die Kraft R seyn mag; — und je näher der Winkel AMB an 180° hin rückt, desto größer (und jede gegebene Größe übersteigend) werden die Spannungen P und Q, wenn auch R noch so klein seyn sollte.

4) Sollte der Knoten M beweglich seyn, so könnte noch überdies nicht Gleichgewicht statt finden, wenn nicht auch noch die Kraft R senkrecht stünde auf der Kurve, welche der Knoten beschreiben kann; nach (I. Th. Mech. §. 23.). Diese Kurve ist aber nach (I. Th. Geom. §. 8. IX.) eine Ellipse, von welcher A und B die Brenn-Punkte sind, und da in der Ellipse die Normale in M allemal den Winkel AMB halbirt, so ist also im Falle eines beweglichen Knotens (Ringes) bei M, nur dann das Gleichgewicht möglich, wenn die Richtung CM der Kraft R den Winkel AMB halbirt.

5) Sind also z. B. A und B absolut feste Punkte, und ist die Länge des Seiles AMB = l gegeben; ist ferner R ein Gewicht, so wird solches an dem beweglichen Knoten oder Ringe M so lange herunter rutschen, bis die Vertikale MC den Winkel AMB halbirt. Die Lage des Punktes M, so wie die Längen der Theile AM und BM sind danach geometrisch oder trigonometrisch sehr leicht zu finden, und ganz unabhängig von der Größe des Gewichtes R.

Geometrisch. Man ziehe BE vertikal, schlage von A aus mit der Länge l des Seiles einen Kreisbogen, so daß AE = l wird, halbire die BE in F, und ziehe FM horizontal, wo solche der AE (in M) begegnet, da liegt der Knoten M.

Rechnend. Ist ADX horizontal, so kann man AD und BD als die rechtwinklichen Koordinaten des End-Punktes B und als gegeben ansehen. Es sey AD = a, BD = b. Da nun AE = l ist, so ist $DE = \sqrt{l^2 - a^2}$, also $EF = FB = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - a^2} - \frac{1}{2}b$. Nun ist aber

$$EM : EF = EA : ED,$$

folglich

$$EM = BM = \frac{\frac{1}{2}l \cdot (\sqrt{l^2 - a^2} - b)}{\sqrt{l^2 - a^2}};$$

und nun noch

$$AM = l - BM = \frac{\frac{1}{2}l\cdot(\sqrt{l^2-a^2}+b)}{\sqrt{l^2-a^2}};$$

wodurch die Längen der Seilstücke AM und BM ausgewerthet sind.

Will man noch die rechtwinklichen Koordinaten AH und HM des Punktes M berechnen, so nimmt man die Proportionen

$$AH : AM = AD : AE$$

und $$MH : AM = DE : AE;$$

woraus hervorgeht,

$$AH = \frac{\frac{1}{2}a\cdot(\sqrt{l^2-a^2}+b)}{\sqrt{l^2-a^2}}$$

und $$MH = \frac{1}{2}(\sqrt{l^2-a^2}+b).$$

Aber eben so leicht berechnen sich nun alle Winkel. Namentlich ist:

$$\sin AMH = \frac{AH}{AM} = \frac{AD}{AE} = \frac{a}{l} = \sin AMC = \sin BMC,$$

$$\cos AMH = \frac{\sqrt{l^2-a^2}}{l};$$

also $$\sin 2AMH = \sin AMB = \frac{2a\cdot\sqrt{l^2-a^2}}{l^2}.$$

Hieraus und aus den Gleichungen der (Nr. 2.) findet sich dann sogleich

$$P = \frac{l}{2\sqrt{l^2-a^2}}\cdot R = Q;$$

d. h. man findet, daß die beiden Spannungen der Seilstücke AM und BM einander gleich und das $\frac{l}{2\sqrt{l^2-a^2}}$ fache des angehängten Gewichtes R sind *).

Aus diesen Resultaten zieht man leicht noch die Folgerungen:

α) Daß die Spannungen P und Q, wenn l und a dieselben bleiben, ebenfalls immer dieselben bleiben, wo auch B seyn mag, also auch noch wenn B in D selbst rücken sollte;

β) daß diese Spannungen P und Q desto größer werden,

je

*) Man nimmt oft diese Wahrheit als sich von selbst verstehend an, weil, wenn der Knoten beweglich ist, beide Seilstücke nur ein einziges Seilstück bilden.

Verfährt man aber nach dieser letztern Ansicht, so zieht man auch hieraus leicht die Folgerung, daß die Richtung MC den Winkel AMB halbiren müsse, wenn Gleichgewicht seyn soll.

je näher a dem l ist, und alle Größe übersteigen, wenn a = l werden sollte. Man kann daher das Seil mit keiner Kraft, so groß sie auch genommen werden möge, horizontal gerade ausspannen, sobald nur das geringste Gewicht daran angebracht ist.

Anmerk. 1. Brustriemen, Tragriemen und Zugseil eines ziehenden Pferdes bilden eine solche Seilmaschine mit festem Knoten. Die Spannung am Zugseil soll der zu ziehenden Last (nebst der bereits als überwunden gedachten Reibung) das Gleichgewicht halten. Es muß also der Wagen oder Schlitten für sich und dann die gedachte Seil-Maschine für sich in's Gleichgewicht gestellt werden (nach §. 79.), und dann bekommt man die Pressungen, mit welchen das Pferd durch den Brustriemen sowohl, als auch durch den Tragriemen gedrückt wird.

§. 131.

Wir wollen jetzt ein Seil AB betrachten, welches zwei Knoten M und M_1 hat, an welchen bezüglich die Kräfte R und R_1 wirken (Fig. 58.). An A und B wirken die Kräfte P und Q, entweder wirklich, oder in so ferne das Seil in A und B befestigt ist (nach §. 129.) als Spannungen. Man soll die Bedingungen des Gleichgewichts angeben.

Zwischen M und M_1 wirkt eine Spannung S, wie immer, (nach §§. 78. 85.) doppelt, nämlich einmal von M nach M_1, und dann wieder von M_1 nach M hin. Um M herum müssen daher die drei Kräfte P, R und S in der Richtung MM_1 einander das Gleichgewicht halten; um M_1 herum halten sich dann noch die Kräfte Q, R_1 und S in der Richtung M_1M einander das Gleichgewicht (nach §. 79.). Deshalb müssen AM, CM und MM_1 in einer und derselben Ebene liegen, und wiederum MM_1, DM_1 und BM_1 in einer und derselben Ebene sich finden; während dabei diese letztere Ebene mit der erstern zusammenfallen, aber auch von ihr verschieden seyn kann, je nachdem die Richtungen MC und M_1D der Kräfte R und R_1 in einer und derselben Ebene liegen oder nicht.

Für das erstere Gleichgewicht hat man nun (nach §. 130. Nr. 2.)

1) $$\frac{P}{\sin CMM_1} = \frac{S}{\sin CMA} = \frac{R}{\sin AMM_1};$$

und im Falle der Knoten bei M beweglich seyn sollte, noch

2) $$\text{W. } CMA = \text{W. } CMM_1 \text{ *).}$$

Für das letztere Gleichgewicht ist dagegen

3) $$\frac{Q}{\sin DM_1M} = \frac{S}{\sin BM_1D} = \frac{R_1}{\sin BM_1M};$$

und im Falle der Knoten bei M_1 beweglich seyn sollte, auch noch

4) $$\text{W. } BM_1D = \text{W. } MM_1D.$$

Aus diesen vier Gleichungen (1. und 3.), wenn beide Knoten fest sind, oder aus den fünf Gleichungen (1. 3. und 2. oder 4.), wenn einer der Knoten beweglich ist, oder aus den sechs Gleichungen (1. 3. 2. und 4.), wenn beide Knoten beweglich sind, kann nun die Spannung S und was gesucht ist, vollends berechnet werden.

Sind beide Knoten beweglich, so findet sich aus der Rechnung:

$$P = Q = S;$$

ein Resultat, welches so einleuchtend ist, daß man solches geradezu voraussetzen kann.

§. 132.

Theorie der Fadenwage.

Denken wir beide Enden A und B befestigt, beide Knoten M und M_1 fest, und beide Kräfte R und R_1 als Gewichte, welche vertikal (also unter sich parallel und in einer und derselben Ebene) wirken. Bezeichnen wir die Winkel AMM_1 und MM_1B bezüglich durch α und β; verlängern wir AM und BM_1

*) Ist die Maschine im Gleichgewicht, so hat jeder Knoten seine völlig bestimmte Lage, er mag sonst zu den festen oder zu den beweglichen Knoten gehören. Daher kann man sich M_1 absolut fest denken, wenn man M betrachtet, und M wieder absolut fest sich denken, wenn M_1 betrachtet wird.

bis sie den Geraden M_1D und MC in D und C begegnen, und setzen wir

$$\text{W. } MCM_1 = \gamma \quad \text{und} \quad \text{W. } MDM_1 = \delta,$$

so ist noch, weil MC und M_1D mit einander parallel laufen,

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta = 180, \quad \text{W. } CMD = \delta, \quad \text{W. } DM_1C = \gamma.$$

Die Gleichungen (1. und 3.), die dasmal allein statt finden, werden jetzt folgende:

1) $P:R = \sin(\beta-\gamma):\sin\alpha,$

2) $S:R = \sin\delta:\sin\alpha,$

3) $Q:R_1 = \sin(\alpha-\delta):\sin\beta,$

4) $S:R_1 = \sin\gamma:\sin\beta.$

Eliminirt man nun aus (2. und 4.) die Spannung S, so erhält man

5) $R_1:R = \sin\beta\cdot\sin\delta:\sin\alpha\cdot\sin\gamma,$

oder

6) $R_1:R = MC:M_1D$ *).

Sind daher die Längen M_1D und MC bekannt, und noch das Gewicht R, so läßt sich R_1 sogleich dazu berechnen. — Dies ist die Theorie der Fadenwage.

§. 133.

Wir denken uns nun ein Seil AB (Fig. 59.) mit n Knoten $M_1, M_2, M_3, \cdots M_n$, so findet im Gleichgewicht zwischen je zwei nächst auf einander folgenden Knoten eine Spannung statt, welche wir bezüglich durch $S_{1,2}, S_{2,3}, S_{3,4}, \cdots S_{n-1,n}$ ausdrücken wollen. Jede dieser Spannungen, z. B. $S_{3,4}$, wirkt doppelt und in genau entgegengesetzter Richtung, nämlich an dem Knoten M_3 nach M_4 hin, und an dem Knoten M_4 nach M_3 zurück. — Nach (§. 79.) muß aber jeder Knoten für sich in's Gleichgewicht gestellt werden.

---

*) Es ist nämlich im Δ CMM_1

$$MC:MM_1 = \sin\beta:\sin\gamma;$$

und im Δ MM_1D noch

$$MM_1:M_1D = \sin\delta:\sin\alpha;$$

folglich ist auch

$$MC:M_1D = \sin\beta\cdot\sin\delta:\sin\alpha\cdot\sin\gamma.$$

Denken wir uns nun drei beliebige auf einander senkrechte Axen OX, OY und OZ. An den Knoten M_1, M_2, M_3, ... M_n wirken bezüglich die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n, welche mit diesen Axen die Winkel α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3; ... α_n, β_n, γ_n machen. An den Enden A und B wirken die Kräfte (oder die Spannungen) Q und Q', welche mit den Axen bezüglich die Winkel a, b, c und a', b', c' machen. Die Winkel, welche irgend eine der Spannungen, z. B. $S_{3,4}$, welche an M_3 wirkt, mit den Axen macht, seyen u_3, v_3, w_3, so daß $180^0 - u_3$, $180^0 - v_3$, $180^0 - w_3$ die Winkel sind, welche dieselbe Spannung $S_{3,4}$, wenn sie an M_4 wirkt, mit denselben Axen macht.

Für das Gleichgewicht des ersten Knotens M_1 hat man nun (nach I. Th. Mech. §. 20.) die drei Gleichungen des Gleichgewichts:

$$1)\quad \begin{cases} Q\cdot\cos a + P_1\cdot\cos\alpha_1 + S_{1,2}\cdot\cos u_1 = 0, \\ Q\cdot\cos b + P_1\cdot\cos\beta_1 + S_{1,2}\cdot\cos v_1 = 0, \\ Q\cdot\cos c + P_1\cdot\cos\gamma_1 + S_{1,2}\cdot\cos w_1 = 0. \end{cases}$$

Für das Gleichgewicht des zweiten Knotens M_2 hat man dagegen die drei Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} -S_{1,2}\cdot\cos u_1 + P_2\cdot\cos\alpha_2 + S_{2,3}\cdot\cos u_2 = 0, \\ -S_{1,2}\cdot\cos v_1 + P_2\cdot\cos\beta_2 + S_{2,3}\cdot\cos v_2 = 0, \\ -S_{1,2}\cdot\cos w_1 + P_2\cdot\cos\gamma_2 + S_{2,3}\cdot\cos w_2 = 0. \end{cases}$$

Für das Gleichgewicht des dritten Knotens M_3 ist auf dieselbe Weise

$$3)\quad \begin{cases} -S_{2,3}\cdot\cos u_2 + P_3\cdot\cos\alpha_3 + S_{3,4}\cdot\cos u_3 = 0, \\ -S_{2,3}\cdot\cos v_2 + P_3\cdot\cos\beta_3 + S_{3,4}\cdot\cos v_3 = 0, \\ -S_{2,3}\cdot\cos w_2 + P_3\cdot\cos\gamma_3 + S_{3,4}\cdot\cos w_3 = 0. \end{cases}$$

Fährt man so fort für das Gleichgewicht eines jeden der n Knoten die drei Gleichgewichts-Gleichungen hinzuschreiben, so hat man zuletzt 3n Gleichungen, aus denen die 3(n — 1), von den Spannungen $S_{1,2}$, $S_{2,3}$, $S_{3,4}$, ꝛc. ꝛc. herrührenden Seiten-Kräfte eliminirt werden können, so daß zuletzt drei Gleichungen übrig bleiben, welche diese Spannungen gar nicht mehr enthalten. Diese letzteren Gleichungen sind nun die nächsten Bedingungen des Gleichgewichts, es mögen die Knoten alle fest

oder alle beweglich; oder zum Theil fest zum Theil beweglich seyn.

Die Elimination geschieht aber am bequemsten, wenn man die ersten, dann die zweiten, zuletzt die dritten Gleichungen in diesen n Systemen von drei Gleichungen alle zu einander addirt. Man erhält dann

$$\text{I.} \quad Q\cdot\cos a + \Sigma(P\cdot\cos\alpha) + Q'\cdot\cos a' = 0,$$

$$\text{II.} \quad Q\cdot\cos b + \Sigma(P\cdot\cos\beta) + Q'\cdot\cos b' = 0,$$

$$\text{III.} \quad Q\cdot\cos c + \Sigma(P\cdot\cos\gamma) + Q'\cdot\cos c' = 0,$$

wo die Bedeutung der Zeichen $\Sigma(P\cdot\cos\alpha)$ ꝛc. ꝛc. in die Augen fällt *).

Dies sind also die drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts des Seil-Polygons mit n Knoten, und diese bleiben dieselben, es mögen die Knoten alle fest, oder zum Theil fest zum Theil beweglich, oder endlich alle beweglich seyn.

Für jeden beweglichen Knoten z. B. M_3 tritt aber noch eine neue Bedingung für das Gleichgewicht ein, nämlich die, daß die beiden Spannungen der Seil-Stücke M_2M_3 und M_3M_4 einander gleich sind, oder vielmehr die Bedingung, daß die Richtung der Kraft P_3 den Winkel $M_2M_3M_4$, mit welchem sie in einer und derselben Ebene liegt, genau halbirt, von welcher dann die erstere Aussage eine nothwendige Folge ist.

Sind die Bedingungs-Gleichungen (I. — III.) des Gleichgewichts erfüllt, so geben die drei Gleichungen (1.), wenn Q und P_1 ihrer Größe und Richtung nach gegeben sind, sogleich $S_{1,2}$ ihrer Größe und Richtung nach. Die Gleichungen (2.) geben dann $S_{2,3}$ ihrer Größe und Richtung nach. Desgleichen geben nachher die Gleichungen (3.) die nächste Spannung $S_{3,4}$ ihrer Größe und Richtung nach; u. s. w. s.; so daß man auf diese Weise, wenn auch noch die Entfernungen M_1M_2, M_2M_3,

*) Diese drei Gleichungen hätte man auch sogleich vermöge der Betrachtung erhalten können, daß wenn das Seil-Polygon im Gleichgewicht ist, dann das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn solches in einen festen Körper verwandelt würde. Am festen Körper finden aber sechs Gleichgewichts-Gleichungen statt, unter denen die obigen drei voranstehen.

M_3M_4, ꝛc. ꝛc. der Knoten von einander gegeben ſind, die ganze Figur des Polygons conſtruirt erblickt, vorausgeſetzt, daß alle Knoten feſt ſind.

Wäre aber z. B. M_3 ein beweglicher Knoten zwiſchen zweien feſten M_2 und M_4, ſo müßte die Länge $M_2M_3M_4$ gegeben ſeyn, und noch die Bedingung, daß $S_{2,3} = S_{3,4}$ iſt, oder daß die Richtung der Kraft P_3 den Winkel $M_2M_3M_4$ halbirt, um die Konſtruktion der Figur der Maſchine ausführen zu können.

Aehnliches gilt, wenn mehrere bewegliche Knoten auf einander folgen.

Addirt man endlich von den Gleichungen 1. 2. 3. ꝛc. ꝛc. wiederum die erſten, die zweiten und die dritten zu einander, aber nicht alle n, ſondern nur μ derſelben, ſo erhält man

IV. $Q \cdot \cos a + P_1 \cdot \cos \alpha_1 + \cdots + P_\mu \cdot \cos \alpha_\mu + S_{\mu,\mu+1} \cdot \cos u_\mu = 0,$

V. $Q \cdot \cos b + P_1 \cdot \cos \beta_1 + \cdots + P_\mu \cdot \cos \beta_\mu + S_{\mu,\mu+1} \cdot \cos v_\mu = 0,$

VI. $Q \cdot \cos c + P_1 \cdot \cos \gamma_1 + \cdots + P_\mu \cdot \cos \gamma_\mu + S_{\mu,\mu+1} \cdot \cos w_\mu = 0,$

und dieſe Gleichungen geben die Spannung $S_{\mu,\mu+1}$ ihrer Größe und Richtung nach direkt aus den von M_1 bis M_μ hin wirkenden Kräften und der Kraft Q am Anfangs-Punkt A des Seils *).

Die Gleichungen (IV. — VI.) ſind, wie man ſieht, dieſelben, welche man für das Gleichgewicht irgend eines Atoms, alſo auch des Knotens M_μ, erhält, welcher von allen Kräften Q, P_1, P_2, ⋯ P_μ und $S_{\mu,\mu+1}$, die parallel mit ſich bis zu ihm hin fortgerückt gedacht werden, zugleich angegriffen würde. Dies geht aber auch ſchon daraus hervor, daß wenn das Seil-Stück als ein feſter Körper behandelt wird, keine Verſammlungs-Kraft exiſtiren darf, wenn Gleichgewicht ſeyn ſoll.

Subtrahirte man die Gleichungen (IV. — VI.) bezüglich von den Gleichungen (I. — III.), ſo erhielte man ganz analoge Gleichungen zur Beſtimmung der Spannung $S_{\mu,\mu+1}$, nämlich die-

*) Auch dieſe Gleichungen (IV. — VI.) ergeben ſich augenblicklich, wenn man das Seil-Stück (im Gleichgewicht) von A bis M_μ hin feſt geworden ſich denkt, wo dann dieſe drei Gleichungen unter den ſechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts voranſtehen.

selben, welche man auch bekommen würde, wenn man von dem End-Punkte B des Polygons eben so ausgehen wollte, wie man vom Anfangs-Punkte A ausgegangen ist.

Sind die Kräfte Q und Q′ nicht gegeben, sondern hängt das Seil an beiden End-Punkten A und B absolut fest, so muß man diese Spannungen Q und Q′ ihrer Größe und ihrer Richtung nach selbst erst finden. Dazu hat man nun die Gleichungen (I. – III.) und, wenn man die Koordinaten-Axen durch A legt, noch die drei Koordinaten-Werthe des andern Aufhänge-Punktes B, und noch die beiden Gleichungen

$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$ und $\cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 = 1$;

also gerade so viel Gleichungen als Unbekannte *).

§. 134.

In dem besondern Falle, wo die n Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ lauter (vertikal, also unter sich parallel wirkende) Gewichte sind, liegt das ganze Polygon in einer durch A und B bestimmten Vertikal-Ebene. Legt man die Axen OX und OY horizontal und vertikal (nach unten) in dieser Ebene und OZ senkrecht auf selbige (also wieder horizontal), so sind alle die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ rechte Winkel, eben so c und c′; ihre Kosinusse sind daher alle gleich Null. Die Gleichung (3.) wird nun identisch $0 = 0$ und kann ganz wegbleiben; und man erhält, weil auch noch die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ rechte Winkel und $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ der Null gleich sind, statt der Gleichungen (I. u. II.) jetzt bloß

*) Weil diese Rechnungen sehr verwikkelt werden, so würde man in der Praxis lieber abwarten, bis die gegebenen Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ wirklich im Gleichgewicht sind, und die Figur des Polygons nun vorliegt, also nicht weiter berechnet zu werden braucht. Hernach würde man die Kraft P_1 an M_1, in zwei Seiten-Kräfte zerlegen, nach den vorliegenden Richtungen M_1A und M_1M_2 und man fände dadurch sowohl die Spannung Q des Seils M_1A, als auch die Spannung $S_{1,2}$. Diese Spannung $S_{1,2}$ in der Richtung M_2M_1 gedacht, und die nächste Kraft P_2 an M_2, geben dann, wenn man sie nach dem Satz vom Kräften-Parallelogramm vereinigt, eine, der Spannung $S_{2,3}$ gleiche mittlere Kraft; u. s. w. f.; so daß sich alle Spannungen aller Theile des Seils nach und nach bestimmen.

I. $Q \cdot \cos a + Q' \cdot \cos a' = 0,$

II. $Q \cdot \cos b + \Sigma(P) + Q' \cdot \cos b' = 0,$

wo $\Sigma(P)$ die Summe aller Gewichte vorstellt. Dies sind die beiden Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, welche dasmal statt finden, wenn alle Knoten fest, oder beweglich, oder zum Theil fest zum Theil beweglich sind.

Für jeden einzelnen beweglichen Knoten M_s tritt aber die neue Bedingung hinzu, daß der an ihm durch die Stücke M_sM_2 und M_sM_4 gebildete Winkel, von der durch ihn hindurchgehenden Vertikal-Linie (der jetzigen Richtung der Kraft P_s) halbirt wird.

Und ist das Seil an A und B absolut fest aufgehängt, so sind die Spannungen Q und Q' ihrer Größe und Richtung nach aus den Gleichungen (I. u. II.) und aus den Koordinaten-Werthen der Aufhänge-Punkte A und B, oder, wenn die Koordinaten-Axen durch A gelegt sind, aus den beiden Koordinaten-Werthen von B zu finden. Weil aber selbst für diesen einfachern Fall diese Rechnungen noch sehr verwikkelt werden (in so ferne die Koordinaten-Werthe aller einzelnen Knoten in Rechnung gebracht werden müssen), so wird man selbst in diesem besondern Fall wieder so verfahren, wie in der Note zum (§. 133.) so eben beschrieben worden ist. Geschieht dieß, so kann man dasmal noch folgende Betrachtungen hinzufügen. Hat man nämlich abgewartet, bis die Seil-Maschine im Gleichgewicht ist, so bleibt das Gleichgewicht ungestört, wenn man annimmt, daß das Polygon in einen festen Körper übergeht. Denkt man sich nun an diesem festen Polygon statt der einzelnen Gewichte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ lieber die Summe aller, nämlich $\Sigma(P)$ in dem Central-Punkt der parallelen Kräfte (§. 39.) angebracht, so müssen die drei Kräfte Q, Q' und $\Sigma(P)$ einander das Gleichgewicht halten; folglich müssen ihre Richtungen in einem und demselben Punkte und zwar in dem Punkte D zusammentreffen, wo sich die verlängerte erste Seite AM_1 und letzte Seite BM_n des Seil-Polygons schneiden, welchen Punkt D man in so ferne als gegeben ansehen kann, als das Polygon im Gleichge-

wicht vorliegend gedacht wird. Da man nun die Richtungen der drei Kräfte Q, Q' und Σ(P) hat, und die eine Kraft Σ(P) dazu, so finden sich die beiden andern vermöge des Satzes vom Kräften-Parallelogramm ihrer Größe nach augenblicklich dazu.

§. 135.

I. Vereinigen sich drei Seile AM, BM, CM in einen einzigen Knoten M; sind diese Seile in A, B, C aufgehängt (absolut fest) und hängt an M eine Kraft P, so finden sich die drei Spannungen der Seil-Stücke AM, BM und CM, wenn man die Kraft P nach den drei gegebenen Richtungen AM, BM, CM in ihre drei Seiten-Kräfte (mittelst des Satzes vom Kräften-Parallelepipedum) zerlegt.

II. Vereinigen sich vier Seile AM, BM, CM und DM, welche in A, B, C, D aufgehängt sind, in einen einzigen Knoten M, an welchem ein Gewicht P hängt, so erhält man zwischen den vier Spannungen Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 an A, B, C, D, und dem Gewicht Q, doch nur die drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts des (I. Th. Mech. §. 20.). Will man daher alle vier Spannungen genau bestimmen, so muß man die fehlende vierte Gleichung aus einer physikalischen Eigenschaft der Seile, etwa aus der Art und Weise, wie sich jedes Seil verlängert, wenn es gespannt wird, herholen. In Bezug auf diese fehlende spezielle Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichts gilt alles, was wir bereits über diese Gattungen von Gleichungen in den (§§. 85. — 89.) gesagt haben.

III. Und sind n Seile in einem Knoten M vereinigt, übrigens befestigt, so erhält man zwischen dem an dem Knoten hängenden Gewicht P und den n Spannungen der Seil-Enden doch immer nur drei Gleichungen des Gleichgewichts, so daß n — 3 Gleichungen aus den physikalischen Eigenschaften der in jedem Falle gerade gebrauchten Seile noch hergeholt werden müssen, wenn man die n Spannungen, wie sie in jedem Einzelfalle wirklich sind, genau bestimmen will.

Wäre es nämlich, wie man solches gewöhnlich bei homoge-

men und gleich dicken Seilen annimmt, physikalisch (d. h. durch Versuche) ausgemacht, daß jede Kraft, welche ein Seil spannt, es auf die Längen-Einheit des Seils um ein Stück verlängert, welches mit der Spannung proportional ist, so daß also die Verlängerungen der einzelnen Seile sich zu einander verhalten, wie die Produkte aus den Spannungen in die Längen der Seile multiplizirt (wenn nur die Seile alle homogen und gleich dick sind), so könnte man aus den, in jedem Einzelfalle gemessenen Längen und Verlängerungen der Seil-Enden AM, BM, CM, ꝛc. ꝛc. sogleich die Verhältnisse der einzelnen Spannungen als bekannt ansehen und diese würde die $n+3$ fehlenden Gleichungen hinreichend ersetzen, so daß nun die Spannungen alle genau bestimmt werden könnten.

Zweiter Abschnitt.

Von den Seil-Kurven überhaupt. Von der Kettenlinie, und von der Kettenbrücken-Linie in's Besondere.

§. 136.

Man denke sich wie im (§. 133.) ein Seil AB, welches an den beiden Enden A und B (Fig. 61.) durch Kräfte oder Spannungen gehalten wird, die wir durch Q und Q' bezeichnen wollen, und deren Richtungen mit den drei Axen die Winkel a, b, c und a', b', c' machen; man denke sich nun wieder Kräfte wirkend, wie dort die n Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$, aber dasmal unendlich viele, nämlich auf jeden Atom des Seils vom Anfang an bis zu Ende (die natürlich dann auch unendlich-klein seyn müssen, damit ihre Gesammtwirkung eine endliche uns in die Sinne fallende und daher untersuchbare sey). Man soll die Bedingungen des Gleichgewichts angeben, oder die Kurve bestimmen, welche das im Gleichgewicht sich befindende Seil annehmen wird.

A) In so ferne das Seil vollkommen biegsam angenommen wird, so hat man dasmal ein loses System (nicht von n Theilen, wie im §. 133., sondern) von unendlich vielen Theilen. Jeder Theil muß für sich in's Gleichgewicht gebracht werden, (nach §. 79.).

B) Man führt also wieder drei auf einander senkrechte Axen OX, OY, OZ ein; theilt das ganze Seil durch Querschnitte in unendlich viele Theile, jeden von unendlich-kleiner Länge, und betrachtet die durch die Schwer-Punkte aller dieser Querschnitte, im Falle des Gleichgewichts des Seils, gebildete Kurve als die gesuchte. Sind nun x, y, z die Koordinaten-Werthe des Anfangs-Punktes M, und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ die Koordinaten-Werthe des End-Punktes N eines solchen Seil-Elementes, und sind s und $s+ds$ die Längen des Seils von A an bis bezüglich zu M und zu N hin, so ist ds die Länge dieses Seil-Elementes, und dabei nach (I. Th. Geom. §. 16.)

1) $$ds = \sqrt{1+\partial y_x^2+\partial z_x^2}\cdot dx.$$

Bezeichnet man ferner durch

2) $$\varepsilon\cdot ds$$

die Masse dieses Seil-Elementes MN *), und durch

3) $$X\cdot\varepsilon\cdot ds,\quad Y\cdot\varepsilon\cdot ds,\quad Z\cdot\varepsilon\cdot ds$$

die in eine einzige Kraft vereinigten und dann nach den drei Axen zerlegten Kräfte P, welche auf den Schwer-Punkt der unendlich-kleinen Masse $\varepsilon\cdot ds$ wirken, so kann man, obgleich der Angriffs-Punkt der Schwer-Punkt der Masse $\varepsilon\cdot ds$ seyn soll, doch, wegen der unendlich-kleinen Unterschiede, seine Koordinaten-Werthe mit x, y, z zusammenfallen lassen. Dabei mag man X als eine Funktion von x, y, z sich denken, die jedoch

*) Weil die Masse allemal das Produkt aus Dichtigkeit und Volumen ist, so ist ε als das Produkt aus der Dichtigkeit und dem Querschnitt des Seils an der Stelle x, y, z anzusehen, in so ferne der Querschnitt mit ds multiplizirt als der Inhalt (das Volumen) dieses unendlich-kleinen Seil-Stücks angesehen werden muß. Also ist auch ε die Masse eines Seil-Stücks von diesem Querschnitte und von der Länge 1.

auch s, ꝛc. ꝛc. in ſich aufgenommen haben kann; dergleichen Funktionen ſind dann auch Y und Z.

Iſt nun T die Spannung des erſtern Endes M des Seil-Elementes MN, ſo ſind die Koſinuſſe der Winkel, welche die Richtung dieſer Spannung, d. h. die Tangente an M mit den drei Axen macht, nach (I. Th. Geom. §. 16.) bezüglich

$$4) \quad -\frac{dx}{ds}, \quad -\frac{dy}{ds}, \quad -\frac{dz}{ds};$$

und daher die nach den drei Axen zerlegte Spannung T bezüglich

$$5) \quad -T\cdot\frac{dx}{ds}, \quad -T\cdot\frac{dy}{ds}, \quad -T\cdot\frac{dz}{ds}.$$

Die Spannung am andern Ende N des Seil-Elementes und die daraus nach den drei Axen hervorgehenden Seiten-Kräfte ſind dagegen durch dieſelben Ausdrücke vorgeſtellt, wenn man nur in ihnen $x+dx$ ſtatt x, alſo auch $y+dy$ ſtatt y und $z+dz$ ſtatt z ſubſtituirt, und zu gleicher Zeit die Vorzeichen, in die entgegengeſetzten verwandelt, in ſo ferne dieſe zweite Spannung der erſtern entgegen wirkt. Dieſe von der letztern Spannung herrührenden Seiten-Kräfte ſind daher

$$6) \quad T\cdot\frac{dx}{ds}+d\left(T\cdot\frac{dx}{ds}\right), \quad T\cdot\frac{dy}{ds}+d\left(T\cdot\frac{dy}{ds}\right), \quad T\cdot\frac{dz}{ds}+d\left(T\cdot\frac{dz}{ds}\right),$$

wo $d\left(T\cdot\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(T\cdot\frac{dy}{ds}\right)$ und $d\left(T\cdot\frac{dz}{ds}\right)$ die unendlich-kleinen Zuwachſe (Differenzialien I. Th. Analyſ. §. 21.) der eingeklammerten Ausdrücke vorſtellen.

Die neun Kräfte in den Nummern (3. 5. und 6.) müſſen daher nun einander das Gleichgewicht halten; und nimmt man an, daß die Kräfte in (3.) denſelben Punkt angreifen, in welchem ſich die beiden Spannungen in (5. und 6.) ſchneiden (was in ſo ferne erlaubt iſt, als der Unterſchied der Koordinaten des wahren Angriffs-Punktes und dieſes Punktes nur unendlich-klein iſt), ſo bekommt man die Gleichgewichts-Gleichungen nach (I. Th. Mech. §. 20.) und zwar

$$\text{I.} \qquad d\left(T\cdot\frac{dx}{ds}\right)+X\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$\text{II.} \qquad d\left(T\cdot\frac{dy}{ds}\right)+Y\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$\text{III.} \qquad d\left(T\cdot\frac{dz}{ds}\right)+Z\varepsilon\cdot ds = 0.$$

Da nun x, y, z einem jeden Punkte der Kurve angehören, so ist, wenn man diese drei Gleichungen für jedes beliebige x gelten läßt, auch jedes einzelne Seil-Element, daher das ganze Seil im Gleichgewicht, wenn man nur unter Q den Anfangs-Werth von T, und unter $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Anfangs-Werthe von $-\frac{dx}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dz}{ds}$ versteht, und wenn ferner die End-werthe von T, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ bezüglich in Q', $\cos a'$, $\cos b'$ und $\cos c'$ übergehen, so daß, wenn in A, $s = 0$ gedacht ist, dann für $s = L$

$$T = Q', \quad \frac{dx}{ds} = \cos a', \quad \frac{dy}{ds} = \cos b' \quad \text{und} \quad \frac{dz}{ds} = \cos c'$$

wird, unter L die ganze Länge des Seils verstanden.

Diese Gleichungen (I. — III.) bestimmen nun die Spannung T und noch die beiden Funktionen y_x und z_x, wie solche zu jeder beliebigen Abscisse x gehören. Sie sind Differenzial-Gleichungen; ihre Integration führt unbestimmte Konstanten ein, welche jedoch durch die gegebenen Anfangs- und End-Werthe von T, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, oder doch durch die Anfangs- und End-Werthe von x, y, z selbst, ihre nähere Bestimmung erhalten werden.

C. Diese Gleichungen (I. — III.) gelten, wenn man sich das Seil als unausdehnbar denkt, aber auch wenn es ausdehnbar gedacht wird (wie wir dies letztere hier immer annehmen müssen), weil man es im Zustande des Gleichgewichts gedacht hat, welches in jedem Falle zuletzt eintreten muß. Allein eben dieses letztern Umstandes wegen, muß man in den Gleichungen

(I. — III.) bei der Bestimmung von ε den Querschnitt des Seils im ausgedehnten Zustande und auch statt L die Länge des Seils im ausgedehnten Zustande substituiren, sobald man die Ausdehnung des Seils gehörig in Rechnung bringen will.

Da nun bei der Ausdehnung des Seils die Masse desselben sich nicht ändert, so kann man annehmen, daß die Masse des ganzen Seils, aber auch die Masse $\varepsilon \cdot ds$ des Elementes MN sich nicht ändert. Sind also s' die Länge des Seils, ε' der Querschnitt desselben am Ende von s', endlich ds' die Länge des Elementes, vor der Ausdehnung gewesen, welche nach der Ausdehnung in s, ε und ds übergegangen sind, so hat man zunächst

IV. $$\varepsilon \cdot ds = \varepsilon' \cdot ds'.$$

Die Ausdehnung selber nimmt man für die Längen-Einheit bei einerlei Querschnitt mit der Spannung proportional an. Daher ist

V. $$ds - ds' = \omega \cdot T \cdot ds',$$

wo ω ein sehr kleiner Koeffizient ist, der von der Dicke und von der Materie des Seils abhängt. Ist das Seil gleich dick und homogen, so ist ε' und auch ω konstant; im Allgemeinen sind aber ε' und ω als gegebene Funktionen der Länge s' der Ausdehnung anzusehen.

Aus (IV. und V.) folgt auch noch

VI. $$\varepsilon \cdot (1 + \omega \cdot T) - \varepsilon' = 0,$$

welche statt der (IV.) gesetzt werden kann.

Die fünf Gleichungen (I. II. III. V. u. VI.) bestimmen nun die fünf Unbekannten ε, T, y, z und s' in x, folglich auch in s ausgedrückt. Hat man aber die Gleichung zwischen s' und s, und sind die Konstanten so bestimmt, daß sowohl s' als auch s in A anfangen, so muß, wenn man $s' = l$ setzt, statt s zugleich L gesetzt werden, wenn l und L die Längen des Seils vor und nach der Ausdehnung bezeichnen. Auf diese Weise findet man dann auch L, wenn l gegeben ist.

Nimmt man aber L und ε als gegeben an, so bedarf es der Gleichungen (IV. — VI.) gar nicht, sondern es reichen dann

die drei Gleichungen (I. — III.) vollkommen hin, um alle gesuchten Funktionen zu geben.

D. Ehe wir die Gleichungen (I. — III.) zu integriren versuchen, wollen wir zuvor das in (B.) und (C.) beschriebene Verfahren an einem sehr einfachen Beispiel durchführen.

Es sey nämlich das Seil AB (Fig. 60.) in A aufgehangen, übrigens aber bloß seiner Schwere überlassen, in B dagegen werde noch ein Gewicht Q′ angehängt, so wird in A eine Spannung Q statt finden. Läßt man nun die Axe OX mit der AB zusammenfallen, und die Abscissen x so wie s von A aus zählen, so wird $s = x = AM$, $ds = dx$; $s' = x'$, $ds' = dx'$; die Gleichungen (II. u. III.) werden identisch $0 = 0$, und die Gleichung (I.) wird

1) $$dT + X\varepsilon \cdot dx = 0, \quad \text{oder} \quad \delta T_x + X\varepsilon = 0,$$

während $X\varepsilon \cdot dx$ die Kraft vorstellt, welche auf das Element $\varepsilon \cdot ds$ oder $\varepsilon \cdot dx$ des Seils in der Richtung AB wirkt, so daß dasmal, wenn g die Schwere bedeutet,

2) $$X = g$$

ist, weshalb die (1.) übergeht in die nachstehende Gleichung,

3) $$\delta T_x + g\varepsilon = 0.$$

Integrirt man nun diese Gleichung, unter der Voraussetzung, daß ε eine Funktion von x ist, und bestimmt man die eingehende Konstante der Bedingung gemäß, daß für $x = 0$, $T = Q$ seyn muß, so erhält man

4) $$T - Q + g \cdot \int_{x \div 0} \varepsilon \cdot dx = 0, \quad \text{oder} \quad T = Q - g \cdot \int_{x \div 0} \varepsilon \cdot dx.$$

Setzt man hierin $x = L$, so wird $T = Q'$; also geht die Gleichung (4.) über in

5) $$Q' = Q - g \cdot \int_{L \div 0} \varepsilon \cdot dx,$$

wodurch die unbekannte Spannung Q gefunden ist. Da nun $g \cdot \int_{L \div 0} \varepsilon \cdot dx$ das Gewicht des ganzen Seils ist, so zeigt die Gleichung (5.), daß die Spannung Q gleich ist dem Gewicht des ganzen Seils noch um das angehängte Gewicht Q′ vermehrt, was man in diesem einfachen Fall ohne Rechnung hätte wissen können.

Eliminirt man aus (4. u. 5.) diese unbekannte Spannung Q, so erhält man

6) $$T = Q' + g \cdot \int_{L \div x} \varepsilon \cdot dx,$$

so daß man sieht, wie die Spannung T an jeder durch x gegebenen Stelle M gleich ist dem Gewicht $g \cdot \int_{L \div x} \varepsilon \cdot dx$ des Seilstücks MB von dieser Stelle M an bis zum untern Ende B hin, nebst noch dem unten angehängten

Gewicht Q′; ein Resultat, welches man dasmal ebenfalls ohne alle Rechnung hätte wissen können.

Diese Gleichung (6.) darf man aber so lange nicht als ein Integral der Gleichung (3.) ansehen, so lange noch ε selbst erst aus der Gleichung (VI.) gefunden werden muß. Will man daher T wirklich finden, so muß man aus (VI. u. 3.) zuerst ε eliminiren.

Um aber ε und L und T zu finden, wie sie im Gleichgewicht des Seils (also nach der Verlängerung) seyn werden, wollen wir beispielsweise annehmen, daß das Seil vor der Verlängerung homogen und gleich dick sey, so daß also ε' konstant und gegeben ist. Es ist dann ω ein konstanter für dieses Seil zu findender jedenfalls sehr kleiner Erfahrungs-Koeffizient, und da $\varepsilon' l$ die Masse des Seils, also $\varepsilon' g l$ das Gewicht des Seils ist, so hat man, wenn letzteres als bekannt angesehen und durch p bezeichnet wird,

7) $$\varepsilon' g l = p, \text{ oder } \varepsilon' = \frac{p}{gl} \text{ und } \varepsilon' g = \frac{p}{l}.$$

Wird nun aus (VI. und 3.) ε eliminirt, so erhält man, wenn man statt $\varepsilon' g$ seinen Werth $\frac{p}{l}$ setzt,

$$\partial T_x + \frac{p}{l(1+\omega T)} = 0,$$

oder

8) $$\partial T_x + \omega T \cdot \partial T_x + \frac{p}{l} = 0.$$

Und integrirt man jedes Glied dieser Gleichung, so ergiebt sich weiter

$$T + \tfrac{1}{2}\omega \cdot T^2 + \frac{p}{l} x = C,$$

wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist. Weil aber für $x = L$, $T = Q'$ werden muß, so hat man zur Bestimmung von C die Gleichung

$$Q' + \tfrac{1}{2}\omega \cdot Q'^2 + \frac{p}{l} \cdot L = C,$$

so daß das Integral der (8.) jetzt wird,

9) $$T - Q' + \tfrac{1}{2}\omega (T^2 - Q'^2) - \frac{p}{l} \cdot (L - x) = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach T algebraisch auf, so erhält man

10) $$T = \frac{1}{\omega} \cdot \left(-1 + \sqrt{\left[(1 + \omega Q')^2 + 2\omega \frac{p}{l} (L - x) \right]} \right).$$

Die Gleichung (VI.) giebt nun ε dazu, nämlich

11) $$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{1}{\sqrt{\left[(1 + \omega Q')^2 + 2\omega \frac{p}{l} (L - x) \right]}}.$$

Um nun L selbst noch zu finden, muß man aus (C.) die Gleichung (V.) zwischen s' und s, d. h. zwischen x' und x finden, nämlich:

$$\partial x'_x = \frac{1}{1 + \omega T};$$

statt

statt T seinen Werth aus (10.) substituiren, dann integriren und l statt x', so wie L statt x setzen. Dies giebt

$$x' = \int_{x=0} \frac{1}{\sqrt{((1+\omega Q')^2 + 2\omega \frac{p}{l}(L-x))}} \cdot dx,$$

oder

12) $$x' = \frac{1}{\omega p}\left(\sqrt{((1+\omega Q')^2+2\omega\frac{p}{l}(L-x))} - \sqrt{((1+\omega Q')^2+2\omega\frac{p}{l}L)}\right),$$

woraus

$$l = \frac{l}{\omega p}\left(\sqrt{((1+\omega Q')^2 + 2\omega\frac{p}{l}L)} - (1+\omega Q')\right),$$

oder

13) $$L = l\cdot[1+\omega(Q'+\tfrac{1}{2}p)]$$

hervorgeht. — Eliminirt man zuletzt aus (10. 12. und 13.) zuerst x und dann L, so ergiebt sich noch

14) $$T = Q' + p\cdot\frac{l-x'}{l}.$$

Die Gleichungen (12. 13. und 14.) lösen nun die Aufgabe vollständig; denn wenn man den Werth von L aus (13.) in die (12.) substituirt, und dann den Werth von x' in (14.) setzt, so hat man T in x und in lauter bekannten Werthen ausgedrückt *).

---

*) Wir haben hier absichtlich die ganzen Rechnungen so durchgeführt, wie sie im Allgemeinen durchgeführt werden müssen. In dem gegenwärtigen besondern Falle konnte man sich aber mit dem Resultat der (Nr. 6.) begnügen, ε gar nicht suchen, L dagegen durch folgende Betrachtungen finden. Man konnte nämlich aus (C. V.) nehmen

α) $$(1+\omega T)\cdot dx' = dx,$$

und in diese Gleichung das T setzen, welches sich direkt aus dem Resultat der (6.) berechnet. Nach dieser (Nr. 6.) ist aber T das angehängte Gewicht Q' nebst noch dem Gewicht des Seils BM; ist also p das Gewicht des ganzen Seils, so ist das Gewicht von BM offenbar $= p\cdot\frac{l-x'}{l}$; und man hat

β) $$T = Q' + p\cdot\frac{l-x'}{l}.$$

Substituirt man nun diesen Werth von T zur Rechten, in die Gleichung (α.), und integrirt man dann, indem man die Konstante der Bedingung gemäß bestimmt, daß für $x = 0$ auch $x' = 0$ werden muß, so erhält man

γ) $$x - x' = \omega Q' x' + \omega p\left(x' - \frac{x'^2}{2l}\right).$$

E. Geht man nach diesem Beispiel zu dem allgemeinen Fall wieder zurück, so kann man wiederum suchen die Gleichungen (I. bis III.) so zu integriren, wie wir im (I. Th. Mech. §. 38.) die drei Gleichungen der Bewegung zu integriren gesucht haben. Zu dem Ende kann man sich auch hier x noch als eine unbekannte Funktion eines beliebigen neuen Veränderlichen t denken, so daß dann auch y, z, s, s', so wie auch T, als Funktionen von t angesehen werden können. Die drei Gleichungen (I.—III.) werden nun, wenn die bloßen (runden) ∂ allemal Differenzial-Koeffizienten nach t bedeuten, die nachstehende Form annehmen:

1) $$\partial\left(T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)+X\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

2) $$\partial\left(T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)+Y\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

3) $$\partial\left(T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)+Z\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

oder auch

4) $$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial T+T\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+X\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

5) $$\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial T+T\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+Y\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

6) $$\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\partial T+T\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)+Z\varepsilon\cdot\partial s=0.$$

Nun multiplizirt man die erstere mit $\frac{\partial x}{\partial s}$, die andere mit $\frac{\partial y}{\partial s}$, die dritte aber mit $\frac{\partial z}{\partial s}$ und addirt alle drei Resultate; man erhält dann

7) $$\partial T+\varepsilon(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)=0,$$

weil $$\frac{\partial x^2}{\partial s^2}+\frac{\partial y^2}{\partial s^2}+\frac{\partial z^2}{\partial s^2}=1$$

und das Differenzial davon, nämlich

Wird nun noch $x'=1$ und zugleich $x=L$ gesetzt, so erhält man daraus

δ) $$L-1=\omega l(Q'+\tfrac{1}{2}p);$$

und das ist die obige Gleichung (13.).

$$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0$$

ist, wobei die vorgesetzten (runden) ∂ lauter Differenzial-Koefficienten nach (dem neu eingeführten Veränderlichen) t vorstellen.

In allen den Fällen daher, wo

$$\varepsilon(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)$$

integrabel ist, hat man aus der (7.) sogleich

8) $$T=-\int\varepsilon(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)\cdot dt\ *).$$

Ist das Seil homogen und von gleicher Dicke und nimmt man auf den kleinen Unterschied zwischen ε' und ε nicht Rücksicht, so daß man sich ε als konstant denkt, so wird noch, wenn

9) $$\int(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)\cdot dt=-\varphi_{x,y,z}$$

gesetzt wird,

10) $$T=\varepsilon\cdot\varphi_{x,y,z};$$

so daß T wenigstens in allen den Fällen gefunden ist, in denen $X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z$ integrabel ist, wenn man nur diese Spannung T an einer einzigen Stelle kennt, damit die Konstante ihre Bestimmung finden könne. Die Figur des Seils braucht in den hier vorausgesetzten Fällen durchaus nicht bekannt zu seyn. Ist aber $T=\varepsilon\cdot\varphi_{x,y,z}$ gefunden, so werden zwei oder drei Gleichungen (1. — 3.) oder (4. — 6.), oder irgend zwei Gleichungen, welche aus diesen abgeleitet sind, y und z als Funktionen von x dazu geben, sobald statt T sein Werth gesetzt wird.

Ganz auf analoge Weise, wie im (§. 40. I. Th. Mech.) leitet man aus den drei Gleichungen (1. — 3.) oder (4. — 6.) noch ab

11) $$\partial x\cdot\partial^2 y-\partial y\cdot\partial^2 x=(X\cdot\partial y-Y\cdot\partial x)\cdot\frac{\varepsilon\cdot\partial s^2}{T}\ **);$$

---

*) Der Anfänger wird nicht übersehen, daß man die Gleichung (7.) durch ∂x wegdividiren kann, und daß dann die (7.) übergeht in

$$\partial T_x+\varepsilon(X+Y\cdot\partial y_x+Z\cdot\partial z_x)=0,$$

und $$T=-\int\varepsilon(X+Y\cdot\partial y_x+Z\cdot\partial z_x)\cdot dx$$

liefert, welche Gleichung jedoch mit der obigen (8.) zusammenfällt.

**) Es wird nämlich die (1. oder 4.) mit ∂y, die (2. oder 5.) mit

12) $\partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z = (Z \cdot \partial x - X \cdot \partial z) \cdot \frac{\varepsilon \cdot \partial s^2}{T}$;

13) $\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y = (Y \cdot \partial z - Z \cdot \partial y) \cdot \frac{\varepsilon \cdot \partial s^2}{T}$.

Ist nun ϱ der Krümmungs-Halbmesser der Kurve des Seils im Gleichgewicht, und zwar an der durch x, y, z gegebenen Stelle M, so ist nach (I. Th. Geom. §. 16. VII. 8.)

14) $\varrho = \frac{\partial s^3}{\sqrt{(\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x)^2 + (\partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z)^2 + (\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y)^2}}$;

folglich wird, wenn man die Werthe aus (11. — 13.) und zugleich den Werth von T aus (10.) substituirt,

15) $\varrho = \frac{\varphi_{x,y,z} \cdot \partial s}{\sqrt{(X \cdot \partial y - Y \cdot \partial x)^2 + (Z \cdot \partial x - X \cdot \partial z)^2 + (Y \cdot \partial z - Z \cdot \partial y)^2}}$,

oder

16) $\varrho = \frac{\varphi_{x,y,z}}{\sqrt{\left[\left(X \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - Y \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(Z \cdot \frac{\partial x}{\partial s} - X \cdot \frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(Y \cdot \frac{\partial z}{\partial s} - Z \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right]}}$;

so daß mittelst dieser Gleichung der Krümmungs-Halbmesser der Kurve an einer durch x, y, z gegebenen Stelle bekannt ist, wenn man die Gleichungen der Kurve auch nicht hat, sobald man nur die Richtung der Tangente an dieser Stelle kennt, in so ferne $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ die Kosinusse der Winkel sind, welche diese Tangente mit den drei Axen macht *).

F. So wie wir in dem Seil-Polygon (§. 133.) die einzelnen Gleichungen, welche für das Gleichgewicht der einzelnen angegriffenen Knoten gefunden worden sind, addirt haben, um die zwischen

---

∂x multiplizirt, und hernach werden die beiden Resultate von einander subtrahirt. Ganz analog bilden sich dann die beiden nächsten Gleichungen.

*) Alle diese Resultate (8. — 16. der E.) sind aber nicht brauchbar, wenn nicht $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ integrabel ist. In allen andern Fällen muß man daher immer zu den Gleichungen (I. — III. der C.) oder (1. — 3. der E.) zurückkehren.

liegenden Spannungen zu eliminiren, so kann man auch hier verfahren, wo unendlich-viele, nämlich alle Atome des Seils angegriffen sind; nur daß die Summe aller dieser Gleichungen hier gefunden wird, wenn man zwischen den Grenz-Werthen 0 und L von s, nach s integrirt (wo dann x, y, z, T als Funktionen von s angesehen werden müssen). Die Gleichungen (E. 1. — 3.) geben sogleich

$$1)\quad \left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_L - \left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_0 + \int_{L\div 0} X\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$2)\quad \left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_L - \left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_0 + \int_{L\div 0} Y\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$3)\quad \left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_L - \left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_0 + \int_{L\div 0} Z\varepsilon\cdot ds = 0,$$

wobei allemal seyn wird

$$4)\quad \left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_L = Q'\cdot\cos a';\ \left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_0 = -Q\cdot\cos a,$$

$$5)\quad \left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_L = Q'\cdot\cos b';\ \left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_0 = -Q\cdot\cos b,$$

$$6)\quad \left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_L = Q'\cdot\cos c';\ \left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_0 = -Q\cdot\cos c,$$

so daß die Gleichungen (1. — 3.) diese werden:

$$7)\quad Q'\cdot\cos a' + Q\cdot\cos a + \int'_{L\div 0} X\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$8)\quad Q'\cdot\cos b' + Q\cdot\cos b + \int_{L\div 0} Y\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$9)\quad Q'\cdot\cos c' + Q\cdot\cos c + \int_{L\div 0} Z\varepsilon\cdot ds = 0\ *).$$

Dies sind aber genau die Gleichungen des Gleichgewichts, die man erhalten würde, wenn alle wirkenden Kräfte parallel mit sich einen und denselben Atom angriffen. Dies folgt auch daraus, weil nicht Gleichgewicht seyn kann, wenn eine Versammlungs-Kraft existirt, sobald das Seil im Gleichgewicht als ein

*) Man erhält diese Gleichungen (7. — 9.) wieder unmittelbar, wenn man das Princip anwendet, nach welchem das Gleichgewicht des Seils nicht gestört wird, wenn man selbiges fest geworden sich denkt. Unter den sechs Gleichungen des Gleichgewichts, welche der (§. 29.) dann liefert, sind die (7. — 9.) die drei erstern.

12) $\partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z = (Z \cdot \partial x - X \cdot \partial z) \cdot \frac{\varepsilon \cdot \partial s^2}{T}$;

13) $\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y = (Y \cdot \partial z - Z \cdot \partial y) \cdot \frac{\varepsilon \cdot \partial s^2}{T}$.

Ist nun ϱ der Krümmungs-Halbmesser der Kurve des Seils im Gleichgewicht, und zwar an der durch x, y, z gegebenen Stelle M, so ist nach (I. Th. Geom. §. 16. VII. 8.)

14) $\varrho = \frac{\partial s^3}{\sqrt{(\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x)^2 + (\partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z)^2 + (\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y)^2}}$;

folglich wird, wenn man die Werthe aus (11. — 13.) und zugleich den Werth von T aus (10.) substituirt,

15) $\varrho = \frac{\varphi_{x,y,z} \cdot \partial s}{\sqrt{(X \cdot \partial y - Y \cdot \partial x)^2 + (Z \cdot \partial x - X \cdot \partial z)^2 + (Y \cdot \partial z - Z \cdot \partial y)^2}}$,

oder

16) $\varrho = \frac{\varphi_{x,y,z}}{\sqrt{\left[\left(X \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - Y \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(Z \cdot \frac{\partial x}{\partial s} - X \cdot \frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(Y \cdot \frac{\partial z}{\partial s} - Z \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right]}}$;

so daß mittelst dieser Gleichung der Krümmungs-Halbmesser der Kurve an einer durch x, y, z gegebenen Stelle bekannt ist, wenn man die Gleichungen der Kurve auch nicht hat, sobald man nur die Richtung der Tangente an dieser Stelle kennt, in so ferne $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ die Kosinusse der Winkel sind, welche diese Tangente mit den drei Axen macht *).

F. So wie wir in dem Seil-Polygon (§. 133.) die einzelnen Gleichungen, welche für das Gleichgewicht der einzelnen angegriffenen Knoten gefunden worden sind, addirt haben, um die zwischen

---

∂x multiplizirt, und hernach werden die beiden Resultate von einander subtrahirt. Ganz analog bilden sich dann die beiden nächsten Gleichungen.

*) Alle diese Resultate (8. — 16. der E.) sind aber nicht brauchbar, wenn nicht $X \cdot \partial x + Y \cdot \partial y + Z \cdot \partial z$ integrabel ist. In allen andern Fällen muß man daher immer zu den Gleichungen (I. — III. der C.) oder (1. — 3. der E.) zurückkehren.

liegenden Spannungen zu eliminiren, so kann man auch hier verfahren, wo unendlich-viele, nämlich alle Atome des Seils angegriffen sind; nur daß die Summe aller dieser Gleichungen hier gefunden wird, wenn man zwischen den Grenz-Werthen 0 und L von s, nach s integrirt (wo dann x, y, z, T als Funktionen von s angesehen werden müssen). Die Gleichungen (E. 1. — 3.) geben sogleich

$$1)\quad \left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_L-\left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_0+\int_{L\div 0}X\varepsilon\cdot ds=0,$$

$$2)\quad \left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_L-\left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_0+\int_{L\div 0}Y\varepsilon\cdot ds=0,$$

$$3)\quad \left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_L-\left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_0+\int_{L\div 0}Z\varepsilon\cdot ds=0,$$

wobei allemal seyn wird

$$4)\quad \left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_L=Q'\cdot\cos a';\quad \left[T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right]_0=-Q\cdot\cos a,$$

$$5)\quad \left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_L=Q'\cdot\cos b';\quad \left[T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right]_0=-Q\cdot\cos b,$$

$$6)\quad \left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_L=Q'\cdot\cos c';\quad \left[T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right]_0=-Q\cdot\cos c,$$

so daß die Gleichungen (1. — 3.) diese werden:

$$7)\quad Q'\cdot\cos a'+Q\cdot\cos a+\int_{L\div 0}X\varepsilon\cdot ds=0,$$

$$8)\quad Q'\cdot\cos b'+Q\cdot\cos b+\int_{L\div 0}Y\varepsilon\cdot ds=0,$$

$$9)\quad Q'\cdot\cos c'+Q\cdot\cos c+\int_{L\div 0}Z\varepsilon\cdot ds=0\ *).$$

Dies sind aber genau die Gleichungen des Gleichgewichts, die man erhalten würde, wenn alle wirkenden Kräfte parallel mit sich einen und denselben Atom angriffen. Dies folgt auch daraus, weil nicht Gleichgewicht seyn kann, wenn eine Versammlungs-Kraft existirt, sobald das Seil im Gleichgewicht als ein

*) Man erhält diese Gleichungen (7. — 9.) wieder unmittelbar, wenn man das Princip anwendet, nach welchem das Gleichgewicht des Seils nicht gestört wird, wenn man selbiges fest geworden sich denkt. Unter den sechs Gleichungen des Gleichgewichts, welche der (§. 29.) dann liefert, sind die (7. — 9.) die drei ersten.

fester, von denselben Kräften angegriffener Körper gedacht und dann nach (§. 26.) behandelt wird. Es müssen also die drei Gleichungen des (§. 29.) statt finden, welche das Nicht-Vorhandenseyn einer Versammlungs-Kraft bedingen.

Man kann sich aber sehr bald durch Rechnung überzeugen, daß auch die drei andern Gleichgewichts-Gleichungen des (§. 29. C.) statt finden, wie solche für das Gleichgewicht ebenfalls noch existiren müßten, wenn das Seil ein fester Körper wäre, nur daß sie hier nicht als neue zur Bedingung des Gleichgewichts nothwendige Gleichungen erst noch hinzutreten, sondern bereits aus den Gleichungen (I. — III.) oder (1. — 3.) hervorgehen.

Wir haben nämlich die Gleichungen (C. I. — III.) unter der Voraussetzung erhalten, daß die wirkenden Kräfte T, T+dT und Xε·ds, Yε·ds und Zε·ds einen und denselben Atom angreifen. Daher bekamen wir nur drei Gleichungen des Gleichgewichts. Man hätte aber die Aufgabe eben so gut aus dem körperlichen Gesichts-Punkt d. h. die Angriffs-Punkte als zu einem festen Körper gehörig ansehen können, so daß man sechs Gleichgewichts-Gleichungen bekommen hätte, nur daß die Coordinaten der verschiedenen Angriffs-Punkte alle bezüglich einander gleich und bezüglich x, y, z gewesen wären. Dann hätte man außer den Gleichungen (I. — III.) auch noch die drei Momenten-Gleichungen erhalten, nur daß, weil in diesem Falle bereits drei Gleichungen das Gleichgewicht bedingen, die drei übrigen offenbar nur solche seyn können, welche sich aus den drei erstern auch auf algebraischem Wege ableiten lassen. Diese drei Momenten-Gleichungen sind nun:

$$x\cdot d\left(T\cdot\frac{dy}{ds}\right) - y\cdot d\left(T\cdot\frac{dx}{ds}\right) + (xY - yX)\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$z\cdot d\left(T\cdot\frac{dx}{ds}\right) - x\cdot d\left(T\cdot\frac{dz}{ds}\right) + (zX - xZ)\varepsilon\cdot ds = 0,$$

$$y\cdot d\left(T\cdot\frac{dz}{ds}\right) - z\cdot d\left(T\cdot\frac{dy}{ds}\right) + (yZ - zY)\varepsilon\cdot ds = 0\ *),$$

*) Man würde dieselben Gleichungen auch nach (I. Th. Mech. §. 3

oder

$$\text{VII.}\quad x\cdot\partial\left(T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)-y\cdot\partial\left(T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)+(xY-yX)\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

$$\text{VIII.}\quad z\cdot\partial\left(T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)-x\cdot\partial\left(T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)+(zX-xZ)\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

$$\text{IX.}\quad y\cdot\partial\left(T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)-z\cdot\partial\left(T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)+(yZ-zY)\varepsilon\cdot\partial s=0.$$

Nun sind aber die zwei erstern Glieder in der Gleichung (VII.) nichts weiter als

$$\partial\left[T\left(x\cdot\frac{\partial y}{\partial s}-y\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right].$$

Sind daher die Anfangs-Werthe von x, y, z (für $s=0$) durch x_1, y_1, z_1 die End-Werthe derselben dagegen (für $s=L$) durch x'_1, y'_1, z' bezeichnet, und nimmt man von dem Ausdruck links in (VII.) das Integral nach s zwischen den Grenzen 0 und L, so erhält man

$$10)\quad Q'\cdot(x'\cdot\cos b'-y'\cdot\cos a')+Q\cdot(x\cdot\cos b-y\cdot\cos a)+\int_{L\ldots0}(xY-yX)\varepsilon\cdot ds=0,$$

und natürlich dann auch auf ganz analoge Weise

$$11)\quad Q'\cdot(z'\cdot\cos a'-x'\cdot\cos c')+Q\cdot(z\cdot\cos a-x\cdot\cos c)+\int_{L\ldots0}(zX-xZ)\varepsilon\cdot ds=0,$$

$$12)\quad Q'\cdot(y'\cdot\cos c'-z'\cdot\cos b')+Q\cdot(y\cdot\cos c-z\cdot\cos b)+\int_{L\ldots0}(yZ-zY)\varepsilon\cdot ds=0;$$

und dies sind genau die drei Momenten-Gleichungen des (§. 29. C.), welche auch statt finden müßten, wenn das ganze Seil im Gleichgewicht ein fester Körper wäre.

Die Gleichungen (7. — 12.) werden im Allgemeinen zur Bestimmung von sechs konstanten Werthen (z. B. von x_1, y_1, z_1, x'_1,

---

II.) aus den Gleichungen (I. — III.) und statt der Gleichungen (I. — III.) erhalten; in so ferne dort bewiesen ist, daß man statt der drei Projektions-Gleichungen des Gleichgewichts die drei Momenten-Gleichungen nehmen kann. — Auch kann jene Umformung der Gleichgewichts-Gleichungen hier wiederholt werden, so daß man die Rechnungen direkt bekommt, wie sie hier folgen:

Man multiplizirt nämlich die (I. oder 1.) mit y, die (II. oder 2.) mit x und subtrahirt die Resultate von einander; dann hat man die erste der obigen Gleichungen. Auf ganz analog einfache Weise erhält man aber auch die beiden andern.

y', z'; oder von $Q \cdot \cos a$, $Q \cdot \cos b$, $Q \cdot \cos c$, $Q' \cdot \cos a'$, $Q' \cdot \cos b'$, $Q' \cdot \cos c'$, je nachdem die letztern oder die erstern in der Aufgabe als gegeben angesehen werden) dienen. Sind x, y, z und $Q' \cdot \cos a'$, $Q' \cdot \cos b'$, $Q' \cdot \cos c'$ gegeben; dann dienen dieselben Gleichungen (7. — 12.) zur Bestimmung von x', y', z', $Q \cdot \cos a$, $Q \cdot \cos b$, $Q \cdot \cos c$.

Sind aber die Koordinaten-Werthe von A und B bekannt, entweder direkt gegeben, oder aus den Gleichungen (7. — 12.) berechnet, so kann man wieder die vier Konstanten bestimmen, welche bei der Integration der beiden Gleichungen eingehen, aus denen, wenn T gefunden ist, y_x und z_x gefunden werden. Die Länge L des Seiles findet man zuletzt noch ausgedrückt durch die Gleichung

$$13) \qquad L = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx,$$

aus welcher, wenn L bekannt ist, die in $\varphi_{x,y,z}$ enthaltene Konstante, die in y_x und z_x eingegangen ist, bestimmt werden kann, im Falle die Aufgabe zu denen gehört, für welche die Rechnung (E.) gilt.

§. 137.

A. Betrachten wir nun noch dieselbe Aufgabe, jedoch für den besondern Fall, daß alle Kräfte in einer und derselben Ebene wirken, in welcher zugleich auch der Anfangs-Punkt A und der End-Punkt B des Seiles liegen. In diesem Falle kann kein Theil der Seil-Kurve außerhalb dieser Ebene fallen und man nimmt daher nun in derselben Ebene zwei Koordinaten-Axen OX und OY auf einander senkrecht; die dritte Axe OZ wird nun überflüssig, und wenn man die Bezeichnung genau so beibehält, wie im (§. 136.) so erhält man dasmal statt der dortigen Gleichungen (I. — III.) jetzt bloß

$$\text{I.} \qquad \partial\left(T \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\right) + X\varepsilon \cdot \partial s = 0,$$

$$\text{II.} \qquad \partial\left(T \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) + Y\varepsilon \cdot \partial s = 0,$$

oder

1) $$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial T+T\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+X\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

2) $$\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial T+T\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+Y\varepsilon\cdot\partial s=0,$$

während dasmal bloß

3) $$\partial s=\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}$$

ist. Die Gleichungen (IV. V. des §. 136.) bleiben hier unverändert dieselben, und dienen auf's Neue dazu, sowohl ε in ε', als auch s in s' zu finden, damit zuletzt L in l gefunden werden könne.

B. Multiplizirt man wieder die (1. und 2.) bezüglich mit $\frac{\partial x}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s}$ und addirt die Resultate, so erhält man sogleich wieder, wegen

$$\frac{\partial x^2}{\partial s^2}+\frac{\partial y^2}{\partial s^2}=1 \text{ und } \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)=0,$$

4) $$\partial T+\varepsilon(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y)=0,$$

woraus, wenn wiederum die geringe Aenderung im Querschnitt unbeachtet gelassen, also wiederum ε als konstant, und zugleich

5) $$-\int(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y)\cdot dt=\varphi_{x,y}$$

gedacht wird,

6) $$T=\varepsilon\cdot\varphi_{x,y}$$

hervorgeht, wo $\varphi_{x,y}$ wiederum eine Konstante aufnimmt, welche später noch eine nähere Bestimmung erfahren muß.

Eliminirt man aus den Gleichungen (1. und 2.) den Differenzial-Koeffizienten ∂T, indem man die erstere mit $\frac{\partial y}{\partial s}$, die andere mit $\frac{\partial x}{\partial s}$ multiplizirt und die Resultate subtrahirt, so daß man erhält

$$T\cdot\left[\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)-\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right]+(X\cdot\partial y-Y\cdot\partial x)\cdot\varepsilon=0,$$

und substituirt man statt T seinen so eben in (4.) gefundenen Werth, so erhält man

$$7)\quad \varphi_{x,y}\cdot\left[\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)-\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right]+X\cdot\partial y-Y\cdot\partial x=0;$$

und dies ist die Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung, aus welcher y in x mit zwei unbestimmten Konstanten gefunden werden muß. Dies ist also die Gleichung der Kurve, welche das Seil jetzt im Falle des Gleichgewichts bildet.

Der Krümmungs-Halbmesser ϱ der Kurve findet sich dann so:

$$8)\quad \varrho=\frac{\varphi_{x,y}}{X\cdot\frac{\partial y}{\partial s}-Y\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}\ *).$$

C. Ferner findet man auf ganz analogem Wege, wie in (§. 136. F.)

$$9)\quad Q'\cdot\cos a'+Q\cdot\cos a+\int_{L\div 0}X\varepsilon\cdot ds=0,$$

$$10)\quad Q'\cdot\cos b'+Q\cdot\cos b+\int_{L\div 0}Y\varepsilon\cdot ds=0,$$

so wie noch

$$11)\quad Q'\cdot(x'\cdot\cos b'-y'\cdot\cos a')+Q\cdot(x\cdot\cos b-y\cdot\cos a)+\int_{L\div 0}(xY-yX)\cdot ds=0.$$

Und ganz zuletzt ist dasmal

$$12)\quad L=\int_{t'\div t}\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}\cdot dx.$$

Diese letztern Gleichungen dienen hier wieder zur Bestimmung konstanter Grenzwerthe, oder solcher Konstanten, welche durch die Integration eingehen, namentlich auch derjenigen, welche in φ eingegangen ist, im Falle die Rechnung (B.) statt gefunden hat.

§. 138.

Von der Ketten-Linie.

Es wirke auf ein in zweien gegebenen Punkten A und B (Fig. 61.) aufgehängtes Seil bloß die Schwere der einzelnen

*) Alle diese Resultate (B. 6. — 8.) können nicht benutzt werden, wenn nicht $\int(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y)\cdot dt$ integrabel ist. Und selbst dann, wenn $X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y$ integrabel ist, kann es doch immer noch wünschenswerther seyn, die Gleichungen (I. u. II.) oder (1. u. 2.) direkt zu behandeln, als die Gleichung (7.) zu benutzen.

Theile des Seils. — Man soll die Kurve finden, welche das Seil, im Gleichgewicht, bildet.

Dasmal ist, wenn die Axe AX horizontal, die andere Koordinaten-Axe AY dagegen vertikal nach unten gedacht wird,

1) $$X = 0, \quad Y = g;$$

also, wenn man genau nach (§. 137.) verfährt,

2) $$\varphi_{x,y} = -\int(X\cdot\partial x + Y\cdot\partial y)\cdot dt = -\int g\cdot dy = c - gy,$$

wo c die noch zu bestimmende Konstante ist.

Die Gleichung (Nr. 7. §. 137.) wird daher dasmal

3) $$(c-gy)\cdot\left[\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) - \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right] - g\cdot\partial x = 0,$$

oder, wenn man $\frac{\partial x}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s}$ wirklich differenziirt,

4) $$(c-gy)\cdot(\partial y\cdot\partial^2 x - \partial x\cdot\partial^2 y) - g\cdot\partial x\cdot\partial s^2 = 0;$$

und dies ist die Differenzial-Gleichung der gesuchten Kurve.

Um diese Gleichung zu integriren, in welcher x und y als Funktionen irgend eines Veränderlichen t gedacht sind, denke man sich nun x als Funktion von y, und setze daher nach (I. Th. Analys. §§. 17. 18.) $\partial x_y\cdot\partial y$ statt ∂x, und $\partial^2 x_y\cdot\partial y^2 + \partial x_y\cdot\partial^2 y$ statt $\partial^2 x$, so wie $\partial x^2 + \partial y^2$, d. h. $\partial y^2\cdot(\partial x_y{}^2 + 1)$ statt ∂s^2; und die Gleichung (4.) wird nun, wenn man sie durch ∂y^2 wegdividirt,

5) $$(c-gy)\cdot\partial^2 x_y - g\cdot\partial x_y\cdot(\partial x_y{}^2 + 1) = 0.$$

Da in dieser Gleichung x nicht selbst vorkommt, so kann man

6) $$\partial x_y = u$$

setzen, und die Gleichung (5.), wenn noch $\frac{c}{g} = h$ gesetzt und diese Konstante h statt der c beibehalten wird, in die folgende

7) $$\frac{\partial u_y}{u\cdot(u^2+1)} = \frac{1}{h-y}$$

umformen, in welcher die Veränderlichen u und y getrennt sind, so daß nun u oder ∂x_y als Funktion von y durch Integration gefunden werden kann. Weil nämlich

$$\frac{1}{u\cdot(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}$$

ist, so erhält man aus (7.), wenn man links und rechts die Integrale nach y nimmt;

$$8) \quad \log u - \tfrac{1}{2}\log(u^2+1) = \log\left(\frac{a}{h-y}\right),$$

wo a die zweite, später noch zu bestimmende Konstante ist. Diese Gleichung (8.) giebt dann

$$9) \quad \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{a}{h-y},$$

oder, wenn man diese Gleichung nach u auflöst,

$$10) \quad u = \partial x_y = \frac{a}{\sqrt{(h-y)^2-a^2}}.$$

Von dieser Gleichung (10.) findet man nun sogleich das neue Integral, nämlich

$$11) \quad x = \int \frac{a}{\sqrt{(h-y)^2-a^2}} \cdot dy,$$

wobei noch die dritte unbestimmte Konstante eingeht. Dieses Integral findet sich nun nach (I. Th. Analys. §. 32. III.), so daß man hat

$$12) \quad -x = a \cdot \log b\left(h-y+\sqrt{(h-y)^2-a^2}\right),$$

wo a, b, h die drei durch die Integrationen eingegangenen und noch zu bestimmenden Konstanten sind.

Löst man diese Gleichung nach $h-y$ algebraisch auf, so erhält man zunächst

$$e^{-\frac{x}{a}} = b\cdot(h-y)+b\cdot\sqrt{(h-y)^2-a^2};$$

hernach

$$\left(e^{-\frac{x}{a}}-b\cdot(h-y)\right)^2 = b^2\cdot[(h-y)^2-a^2];$$

und dann

$$13) \quad h-y = \frac{a^2b^2\cdot e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2b}.$$

Dies ist also die Gleichung der Kurve, welche das schwere Seil bildet, und welche man gewöhnlich die Ketten-Linie nennt.

Findet man hieraus

Die Ketten-Linie hat mehrere sehr merkwürdige Eigenschaften, welche alle hier aufzuzählen wir nicht beabsichtigen. Wir wollen nur hervorheben:

IV. $$T_1 = c = p \cdot a,$$

wenn man auf diesem Wege die Konstante a statt c setzen will. Die Gleichung (II.) wird nun, wenn man statt T seinen Werth $pa \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$ (aus III.) substituirt, integrirt und dabei die Konstante so bestimmt, daß für $\partial y = 0$ auch $s = 0$ wird, d. h. wenn man den Bogen von dem tiefsten Punkte der Kurve anfangen läßt,

V. $$a \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = s.$$

Substituirt man nun diesen Werth von s in die Gleichung

$$\partial s = \partial x \cdot \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]},$$

damit s eliminirt werde, so erhält man als Gleichung zwischen x und y

VI. $$\partial x = \frac{a \cdot \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}},$$

welche sogleich integrirt werden kann, und

VII. $$x = a \cdot log\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}\right),$$

oder

VIII. $$\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]} = e^{\frac{x}{a}}$$

liefert, wenn man wieder das Integral so nimmt, daß für $x = 0$ auch $\partial y = 0$ wird, d. h. wenn man die Ordinaten-Axe durch den niedrigsten Punkt (aber vertikal) gehen läßt.

Multiplizirt man aber die Gleichung (VIII.) mit

$$\left(-\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]} \cdot e^{-\frac{x}{a}},\right.$$

so erhält man noch

IX. $$-\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]} = e^{-\frac{x}{a}}.$$

Werden nun die Gleichungen (VIII. u. IX.) abwechselnd addirt und subtrahirt, so erhält man $\frac{\partial y}{\partial x}$ (d. h. ∂y_x) und $\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}$, d. h. $\frac{\partial s}{\partial x}$ oder ∂s_x bloß in x ausgedrückt, und daher dann auch sogleich y und s in x; und zwar gerade so, wie wir auch oben y' und s unter der Voraussetzung gefunden haben, daß man die Ordinaten-Axe durch den tiefsten Punkt der Kurve gehen läßt.

die Gleichung (17.) auch noch h dazu, auf rein algebraischem Wege, so daß dann die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Die Gleichungen (9. und 10. des §. 137.) geben dasmal, weil jetzt

$$\int_{L=0} X\varepsilon \cdot ds = 0 \quad \text{und} \quad \int_{L=0} Y\varepsilon \cdot ds = g\varepsilon \cdot L = p \cdot L$$

ist, wo pL das Gewicht des ganzen Seils vorstellt,

$$31) \qquad Q' \cdot \cos a' + Q \cdot \cos a = 0$$

und

$$32) \qquad Q' \cdot \cos b' + Q \cdot \cos b + pL = 0,$$

wo $\cos a$ und $\cos b$ die Werthe von $\frac{\partial x}{\partial s}$ und von $\frac{\partial y}{\partial s}$ für $x = 0$, folglich bekannt sind, während $\cos a'$ und $\cos b'$ die Werthe von $\frac{\partial x}{\partial s}$ und von $\frac{\partial y}{\partial s}$ sind für $x = x'$, so daß auch diese Kosinusse als bekannt angesehen werden können. Diese beiden Gleichungen geben also dasmal die Spannungen Q und Q' im Anfangs-Punkte A und im End-Punkte B der Seil-Kurve. Dieselben Werthe für Q und Q' müssen aber auch schon aus der (28.) hervorgehen, wenn man daselbst bezüglich h und $h - y'$ statt y' setzt, so daß man auch

$$33) \quad Q = ph \qquad \text{und} \qquad 34) \quad Q' = p \cdot (h - y')$$

erhält *).

Die

*) Uebrigens müssen wir hier noch bemerken, daß man, wie fast immer, besser gethan hätte wenn man, statt die Gleichung (Nr. 7. des §. 137.) anzuwenden, diese specielle Aufgabe der Ketten-Linie direkt in Gleichung gebracht hätte. Man hätte dann die Gleichungen (I. u. II. des §. 137.) erhalten, nämlich, wenn man die Ordinaten von unten nach oben zählt, so daß δy in $-\delta y$ übergeht,

$$\text{I.} \quad \delta\left(T \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \text{II.} \quad \delta\left(T \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) = p \cdot ds,$$

wo $p = g\varepsilon$ das Gewicht des Seils bedeutet, welches die Länge 1 hat.

Die Gleichung (I.) läßt sich nun sogleich integriren, und giebt

$$\text{III.} \qquad T \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = c,$$

also für den niedrigsten Punkt, wo $\frac{\partial x}{\partial s} = 1$, und $T = T_1$ wird,

Die Ketten-Linie hat mehrere sehr merkwürdige Eigenschaften, welche alle hier aufzuzählen wir nicht beabsichtigen. Wir wollen nur hervorheben:

IV. $$T_1 = c = p \cdot a,$$

wenn man auf diesem Wege die Konstante a statt c setzen will. Die Gleichung (II.) wird nun, wenn man statt T seinen Werth $p \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$ (aus III.) substituirt, integrirt und dabei die Konstante so bestimmt, daß für $\partial y = 0$ auch $s = 0$ wird, d. h. wenn man den Bogen von dem tiefsten Punkte der Kurve anfangen läßt,

V. $$a \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = s.$$

Substituirt man nun diesen Werth von s in die Gleichung

$$\partial s = \partial x \cdot \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]},$$

damit s eliminirt werde, so erhält man als Gleichung zwischen x und y

VI. $$\partial x = \frac{a \cdot \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}},$$

welche sogleich integrirt werden kann, und

VII. $$x = a \cdot log\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}\right),$$

oder

VIII. $$\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]} = e^{\frac{x}{a}}$$

liefert, wenn man wieder das Integral so nimmt, daß für $x = 0$ auch $\partial y = 0$ wird, d. h. wenn man die Ordinaten-Axe durch den niedrigsten Punkt (aber vertikal) gehen läßt.

Multiplizirt man aber die Gleichung (VIII.) mit

$$\left(-\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}\right) \cdot e^{-\frac{x}{a}},$$

so erhält man noch

IX. $$-\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]} = e^{-\frac{x}{a}}.$$

Werden nun die Gleichungen (VIII. u. IX.) abwechselnd addirt und subtrahirt, so erhält man $\frac{\partial y}{\partial x}$ (d. h. ∂y_x) und $\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}$, d. h. $\frac{\partial s}{\partial x}$ oder ∂s_x bloß in x ausgedrückt, und daher dann auch sogleich y und s in x; und zwar gerade so, wie wir auch oben y' und s unter der Voraussetzung gefunden haben, daß man die Ordinaten-Axe durch den tiefsten Punkt der Kurve gehen läßt.

1) Wenn sie sich um eine Axe OX' dreht, so beschreibt sie einen Körper, der die größeste Oberfläche hat, unter allen Körvern, welche auf dieselbe Weise durch Kurven beschrieben werden, die durch dieselben Endpunkte A und B hindurchgehen, und dieselbe Länge haben, übrigens der Ketten-Linie nächst anliegen.

2) Ihr Schwer-Punkt liegt tiefer als der Schwer-Punkt jeder andern Kurve, welche durch dieselben End-Punkte A und B hindurchgeht, und dabei auch dieselbe Länge L hat, übrigens der Ketten-Linie nächst anliegt *). Oder mit andern Worten, wenn man sich die Aufgabe stellt: unter allen Kurven, welche durch dieselben End-Punkte A und B hindurchgehen und dieselbe Länge haben, diejenige zu finden, welche bei ihrer Umdrehung um die Axe OX' einen Drehkörper bildet, der die größte Oberfläche hat; — oder diese andere Aufgabe: unter allen den, durch dieselben End-Punkte hindurchgehenden Kurven von derselben Länge L, diejenige zu finden, deren Schwer-Punkt am tiefsten liegt, — so findet man jedesmal die Ketten-Linie.

Statt jedoch die Rechnungen hier durchzuführen, verweisen wir den Leser auf: „Die Lehre vom Größten und Kleinsten," Berlin 1825; oder auf das „System der Mathematik." (5. und 7. Theil.)

§. 139.

Von der Kettenbrücken-Linie.

Denken wir uns abermals ein Seil an beiden Enden in den Punkten A und B (Fig. 61.) aufgehangen, schwerlos, dagegen vom Anfang bis zu Ende stetig mit Gewichten belastet, welche auf jedes horizontale Element dx eine konstante Größe haben **), im Gleichgewicht. Diese Kurve des Seils zu finden.

Dasmal sind die Kräfte $X\varepsilon \cdot ds$ und $Y\varepsilon \cdot ds$ des (§. 137.), welche auf das Seil-Element $\varepsilon \cdot ds$ wirken, bezüglich 0 (Null) und $P \cdot dx$, wo P die Belastung auf die horizontale Längen-Einheit vorstellt. Die Gleichungen (I. und II. des §. 137.) werden daher jetzt, wenn man die Ordinaten im Sinne der Schwere zählt,

*) Ist die (2.) erwiesen, so folgt die (1.) sogleich aus der Guldinischen Regel.

**) Dieser Fall tritt bei den Kettenbrücken ein, wenn man das Gewicht der Ketten selbst außer Acht läßt und nur die Belastung der Brücke in Rechnung bringt, welche in gleichen horizontalen Entfernungen als gleich d. h. welche mit der horizontalen Entfernung proportional gedacht wird.

I. $\partial\left(T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)=0$ und II. $\partial\left(T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)+P\cdot\partial x=0.$

Den Weg der Integration des (§. 137. B.) kann man hier nicht betreten, weil dasmal die Funktion $X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y$ nicht integrabel ist. Dagegen macht sich hier die Integration der einzelnen Gleichungen (I. u. II.) ohne weiteres. Die erstere giebt

III. $$T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}=c,$$

wo c eine eingehende Konstante ist, und wiederum die Spannung T_1 am niedrigsten Punkte vorstellt, weil an diesem $\frac{\partial x}{\partial s}=1$ wird.

Die andere Gleichung (II.), integrirt, giebt dagegen

IV. $$T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+P\cdot x=\gamma,$$

wo γ eine neue Konstante ist. Eliminirt man nun aus (IV.) und (III.) die Spannung T, so ergiebt sich

V. $$\partial y_x=\frac{-Px+\gamma}{c}=-ax+b,$$

wenn $\frac{P}{c}=a$ und $\frac{\gamma}{c}=b$ gesetzt, und a und b als die statt c und γ neu eintretenden Konstanten angesehen werden. Diese Gleichung (V.) integrirt, giebt

VI. $$y=-\tfrac{1}{2}ax^2+b\cdot x+f,$$

wo f die dritte Konstante ist. Dies ist die gesuchte Gleichung der Kurve, und man sieht (nach I. Th. Geom. §. 8.), daß solche eine Parabel ist.

Um die Konstanten zu bestimmen, nehme man an, daß AX und AY (Fig. 61.) die Koordinaten-Axen seyen, so daß für $x=0$ auch $y=0$ werden muß. Dies giebt, wenn man solche Werthe in (VI.) substituirt, $f=0$, so daß die Gleichung der Kurve bloß wird:

VII. $$y=-\tfrac{1}{2}ax^2+b\cdot x.$$

Soll nun für $x=x'$ auch $y=y'$ werden, d. h. z. B. sind x'

und y' die Koordinaten-Werthe vom End-Punkte B und gegeben, so hat man noch aus (VII.)

VIII. $$y' = -\tfrac{1}{2}ax'^2 + b\cdot x',$$

welche Gleichung zur Bestimmung von a oder von b gebraucht werden kann.

Suchen wir nun zunächst die Abscisse k und die Ordinate h des tiefsten Punktes. Die Gleichung (V.) giebt, wenn man $\partial y_x = 0$ und k statt x setzt,

IX. $$k = \frac{b}{a};$$

und die Gleichung (VII.) giebt dann h dazu, nämlich

X. $$h = \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a}.$$

Bei dem Bau der Kettenbrücken ist in der Regel h gegeben. Dann dient die Gleichung (X.) zur Bestimmung der dritten Konstante. Findet man nämlich aus (X.) $a = \frac{1}{2}\frac{b^2}{h}$, und substituirt man diesen Werth von a in die (VIII.) so findet sich dann aus letzterer

XI. $$b = \frac{2h \pm 2\sqrt{h(h-y')}}{x'},$$

so daß nun alle Konstanten bestimmt sind.

Nimmt man B mit A in einerlei Horizont, also $y' = 0$, so wird

$$b = \frac{4h}{x'}, \quad a = \frac{8h}{x'^2},$$

und die Gleichung (VII.) der Kurve würde nun

$$y = -\frac{4h}{x'^2}\cdot x^2 + \frac{4h}{x'}\cdot x,$$

wo x' die horizontale Entfernung AB, und h der Abstand des niedrigsten Punktes der Kurve von AB ist. Führt man neue Axen ein, welche durch den tiefsten Punkt der Kurve gehen, so aber, daß die positiven Ordinaten-Werthe von unten nach oben gezählt werden, so hat man, wenn x' und y' die neuen Koordinaten sind,

$$x = k + x' = \frac{b}{a} + x'$$

und $$y = h - y' = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a} - y';$$

und die Gleichung der Kurve (VII.) wird nun

XII. $$y' = \frac{1}{2}a \cdot x'^2, \quad \text{oder} \quad x'^2 = \frac{2}{a} \cdot y',$$

so daß man nun erkennt, daß der tiefste Punkt zu gleicher Zeit der Scheitel der Parabel ist, und die durch ihn hindurchgehende Vertikale ihr Haupt-Durchmesser, so wie $\frac{2}{a}$ ihr Parameter.

Geht man von dieser Gleichung (XII.) aus, so findet man den Bogen $s' = \int \sqrt{1 + \partial y'^2_{x'}} \cdot dx'$, wenn man ihn mit $x' = 0$, d. h. vom tiefsten Punkte anfangen läßt,

XIII. $$s' = \frac{1}{2}x' \cdot \sqrt{1 + a^2x'^2} + \frac{1}{2a} \cdot log\left(ax' + \sqrt{1 + a^2x'^2}\right).$$

Werden nun die ganze Länge ACB der Kurve durch L, die Theile AC und CB aber, wenn C der niedrigste Punkt ist, bezüglich durch l_1 und l_2 bezeichnet, so giebt die Gleichung (XIII.) nothwendig für $x' = -k$ den Bogen $s' = -l_1$, dagegen für $x' = x' - k$ den Bogen $s' = l_2$ dazu, während $l_1 + l_2 = L$ ist. Man findet also aus (XIII.)

$$-l_1 = -\frac{1}{2}k \cdot \sqrt{1 + a^2 \cdot k^2} + \frac{1}{2a} \cdot log\left(-ak + \sqrt{1 + a^2 \cdot k^2}\right),$$

$$l_2 = \frac{1}{2}(x' - k) \cdot \sqrt{1 + a^2(x' - k)^2} + \frac{1}{2a} \cdot log\left(a(x' - k) + \sqrt{1 + a^2(x' - k)^2}\right);$$

folglich, wenn man die obere Gleichung von der untern subtrahirt,

XIV. $$L = \frac{1}{2}(x' - k) \cdot \sqrt{1 + a^2(x' - k)^2} + \frac{1}{2}k \cdot \sqrt{1 + a^2 \cdot k^2} + \frac{1}{2a} \cdot log \frac{a(x' - k) + \sqrt{1 + a^2(x' - k)^2}}{-ak + \sqrt{1 + a^2 \cdot k^2}}.$$

Ist also die Ordinate h des tiefsten Punktes der Kurve nicht, sondern dafür die Länge L derselben gegeben, so dienen die Gleichungen (XIV. und VIII.) in Verbindung mit der (IX.) zur

Bestimmung der Konstanten a und b, durch welche die Aufgabe wiederum vollständig gelöst ist.

In dem besondern Falle, wo A und B in einer und derselben Horizontale liegen, so daß $y'=0$ ist, ist $k=x'-k=\frac{1}{2}x'$, und die Gleichung (XIV.) wird nun

$$L=\tfrac{1}{2}x'\cdot\sqrt{1+\tfrac{1}{4}a^2\cdot x'^2}+\frac{1}{2a}\cdot log\frac{\frac{1}{2}a\cdot x'+\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2\cdot x'^2}}{-\frac{1}{2}a\cdot x'+\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2\cdot x'^2}},$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner des Ausdrucks hinter dem Zeichen *log* mit dem Zähler multiplizirt,

$$L=\tfrac{1}{2}x'\cdot\sqrt{1+\tfrac{1}{4}a^2\cdot x'^2}+\frac{1}{a}\cdot log\left(\tfrac{1}{2}ax'+\sqrt{1+\tfrac{1}{4}a^2\cdot x'^2}\right),$$

aus welcher die Konstante a gefunden werden muß, während dasmal aus (VIII.)

$$b=\tfrac{1}{2}a\cdot x'$$

dazu sich findet. Findet man aus dieser letztern Gleichung

$$a=\frac{2b}{x'},$$

und substituirt man diesen Werth statt a in die vorstehende Gleichung, so erhält man noch

$$L=\tfrac{1}{2}x'\cdot\sqrt{1+b^2}+\frac{\frac{1}{2}x'}{b}\cdot log\left(b+\sqrt{1+b^2}\right).$$

Sind daher L und x', d. h. die Länge der Kurve und die (horizontale) Entfernung ihrer Enden von einander in Ziffern gegeben, so wird die Rechnung am bequemsten, wenn man aus der letzten Gleichung zuerst b findet, und dann aus der vorletzten Gleichung a dazu bestimmt.

Wenn übrigens im Allgemeinen, wie in dem zuletzt betrachteten Falle, die Kurve nicht von der Größe der Belastung P abhängt, — sobald nur die übrigen Bedingungen erfüllt sind, — so ist dies doch nicht mit der Spannung T der Fall, welche allerdings mit P selbst wächst oder abnimmt. Die Gleichung (III.) giebt nämlich

$$\text{XV.}\quad T=c\cdot\partial s_x=\frac{P}{a}\cdot\partial s_x=\frac{P}{a}\cdot\sqrt{1+(b-ax)^2};$$

und man sieht daher, daß die Spannung an jeder Stelle mit der Belastung P proportional ist, ferner daß sie im tiefsten Punkte der Kurve, wo man $b - ax = 0$ hat, am geringsten wird, und am Aufhänge-Punkt A, wo $x = 0$ ist, am größesten; endlich daß die Spannungen auf jeder Seite des tiefsten Punktes in gleichen Entfernungen vom letzteren auch einander gleich sind.

Führt man die neue Ordinaten-Axe durch den tiefsten Punkt, und ist dann x' die neue Abscisse, während x die alte ist, von einem und demselben Punkte der Kurve, so daß man also

$$x = \frac{b}{a} + x'$$

hat, so geht dadurch die Gleichung (XV.), wenn man diesen Werth statt x substituirt, in die

$$\text{XVI.} \quad T = \frac{P}{a} \cdot \sqrt{1 + a^2 \cdot x'^2} = P \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + x'^2\right)}$$

über, aus welcher Gleichung die Größe der Spannung an den einzelnen Stellen der Kurve noch bequemer in die Augen fällt. —

§. 140.

Verfolg der früheren allgemeineren Aufgabe.

Kehren wir nun zur allgemeinen Aufgabe des (§. 136.) zurück, und lösen wir dieselbe noch einmal, jedoch unter der Voraussetzung, daß das Seil über eine gegebene krumme Fläche

$$1) \qquad L_{x,y,z} = 0$$

gespannt werde.

In diesem Falle muß man im Gleichgewicht eines jeden Seil-Elements $\varepsilon \cdot ds$, den unbekannten Druck $N \cdot ds$ in der entgegengesetzten Richtung (der Normale) noch zu den übrigen Kräften hinzunehmen, und dann das Element als einen freien angegriffenen Atom in's Gleichgewicht stellen (I. Th. Mech. §. 23.). — Sind daher λ, μ, ν die Winkel, welche die Normale an L, und zwar die Richtung des Gegen-Druckes mit den drei Koordinaten-Axen macht, so hat man die Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \partial\left(T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)+X\varepsilon\cdot\partial s+N\cdot\cos\lambda\cdot\partial s=0,$$

$$\text{II.}\quad \partial\left(T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)+Y\varepsilon\cdot\partial s+N\cdot\cos\mu\cdot\partial s=0,$$

$$\text{III.}\quad \partial\left(T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)+Z\varepsilon\cdot\partial s+N\cdot\cos\nu\cdot\partial s=0.$$

Diese vier Gleichungen (1.) und (I. — III.) dienen nun zur Bestimmung von N, T, y und z als Funktionen von x, wobei die bloßen ∂ in (I. — III.) Differenzial-Koefficienten vorstellen, entweder nach diesem Veränderlichen x, oder nach irgend einem neuen Veränderlichen t, von welchem x, folglich auch y, z, N und T selber wieder als Funktionen angesehen werden.

Betrachten wir im weitern Verfolg dieser Aufgabe nur den ganz besondern Fall, daß der Faden an beiden Enden bloß gespannt werde, und daß gar keine Kräfte auf ihn wirken, auch nicht die Schwere; so hat man dasmal

$$X=Y=Z=0;$$

und die drei Gleichungen (I. — III.) werden nun

$$2)\quad \partial\left(T\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)+N\cdot\cos\lambda\cdot\partial s=0,$$

$$3)\quad \partial\left(T\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)+N\cdot\cos\mu\cdot\partial s=0,$$

$$4)\quad \partial\left(T\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)+N\cdot\cos\nu\cdot\partial s=0,$$

während man, wenn

$$\sqrt{\partial L_x^2+\partial L_y^2+\partial L_z^2}=W$$

gesetzt wird (nach I. Th. Geom. §. 14.),

$$\cos\lambda=\frac{\partial L_x}{W};\quad \cos\mu=\frac{\partial L_y}{W}\quad\text{und}\quad \cos\nu=\frac{\partial L_z}{W}$$

hat.

Will man nun (nach §. 136.) Integrale dieser Gleichungen (2. — 4.) finden, oder vielmehr die für die Gleichungen (I. bis III.) daselbst gefundenen Integrale hier benutzen, so darf man nur statt der dortigen

X_s, Y_s und Z_s

hier bezüglich

$$N \cdot \cos\lambda, \quad N \cdot \cos\mu \quad \text{und} \quad N \cdot \cos\nu$$

setzen. Weil aber die Tangente der Kurve und die Normale der Fläche L auf einander senkrecht stehen, weil also (nach §. 16. Geom. I. Th.)

$$5) \qquad \partial x \cdot \cos\lambda + \partial y \cdot \cos\mu + \partial z \cdot \cos\nu = 0$$

ist, so erhält man hier zunächst (aus §. 136. E. 7.)

$$6) \qquad \partial T = 0, \quad \text{also} \quad T = c,$$

wo c eine noch zu bestimmende Konstante ist. — Wirken also gar keine Kräfte auf das Seil (oder Faden), so ist die Spannung an allen Stellen dieselbe; also kann das Seil nicht im Gleichgewicht seyn, wenn nicht die Spannungen des Seils (oder Fadens) an beiden Enden einander gleich sind, und dann ist die Spannung am ganzen Seil dieselbe, wie an den beiden Enden.

Hängt daher das Seil über die Fläche, und hängen an beiden Enden Gewichte, welche das Gleichgewicht erhalten, so müssen diese Gewichte einander gleich und gleich c seyn. — Ist das Seil an einem Ende absolut fest gemacht, hängt aber am andern Ende ein Gewicht, so ist im Gleichgewicht die Spannung c an jeder Stelle diesem letztern Gewichte gleich. Sind aber beide Enden des Seils absolut fest gemacht, so hängt c von der Ausdehnung ab, welche das so befestigte Seil mittelst dieser Befestigung erfahren hat; immer jedoch unter der Voraussetzung, daß auf das Seil gar keine Kräfte wirken, auch nicht einmal sein eigenes Gewicht, also z. B. wenn das Gewicht des Seils gegen die an den Enden wirkenden Spannungen als unbedeutend außer Acht gelassen wird.

Nachdem man weiß, daß $\partial T = 0$, also $T = c$ ist, so werden die Gleichungen (2. — 4.) jetzt folgende:

$$7) \qquad c \cdot \partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) + N \cdot \cos\lambda \cdot \partial s = 0,$$

$$8) \qquad c \cdot \partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) + N \cdot \cos\mu \cdot \partial s = 0,$$

$$9) \qquad c \cdot \partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) + N \cdot \cos\nu \cdot \partial s = 0.$$

Multiplizirt man diese drei Gleichungen bezüglich mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und addirt man die Resultate, so erhält man

$$\frac{N}{c} = -\left[\cos\lambda\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\cos\mu\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\cos\nu\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right]\cdot\frac{1}{\partial s},$$

welche Gleichung das Verhältniß des Druckes N·ds (wie c vermöge der Spannung = x normal auf die Fläche L statt findet) zu dieser Spannung, c selbst ausdrückt *).

Sind x'', x' und x die Winkel, welche die auf der Ebene des Krümmungs-Kreises senkrechte, übrigens durch den Punkt (x, y, z) hindurchgehende Gerade mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht (d. h. die Winkel, welche die Krümmungs-Ebene mit den drei Koordinaten-Ebenen YOZ, XOZ und XOY macht), und ist ϱ der Krümmungs-Halbmesser, so ist

$$10)\quad \cos x''\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\cos x'\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\cos x\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = 0\ **).$$

Multiplizirt man daher die Gleichungen (7. — 9.) bezüglich mit $\cos x''$, $\cos x'$ und $\cos x$, und addirt man die Resultate, so erhält man mittelst der (10.)

$$11)\quad \cos\lambda\cdot\cos x'' + \cos\mu\cdot\cos x' + \cos\nu\cdot\cos x = 0,$$

d. h. die Normale der Fläche L und die Gerade, welche auf der Krümmungs-Ebene der Kurve senkrecht steht, stehen allemal auf einander senkrecht. Diese Eigenschaft hat also dasmal die Kurve des Seils mit derjenigen Kurve gemein, welche auf einer Fläche L zwischen zweien gegebenen Punkten die kürzeste ist, wie man sich überzeugt, wenn man diese kürzeste Linie auf der Fläche

---

*) Der Druck N·ds, wie er auf das unendlich-kleine Element statt findet, ist danach, gegen die Spannung c, immer nur unendlich-klein. Der Buchstabe N bedeutet aber die Summe aller dieser Drucke, wie er auf allen in der Längen-Einheit des Seils seyn würde, wenn jedes Element gleich stark und gerade so stark gedrückt würde, als an dem Punkte (x, y, z).

**) Es ist nämlich (nach §. 16. I. Th. Geom. VI. Nr. 10. u. 7.)

$$\cos x'' = \frac{\partial y\cdot\partial^2 z - \partial z\cdot\partial^2 y}{W},\quad \cos x' = \frac{\partial z\cdot\partial^2 x - \partial x\cdot\partial^2 z}{W},\quad \cos x = \frac{\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x}{W},$$

wo W die Quadrat-Wurzel ist aus der Summe der Quadrate der 3 Zähler. Setzt man nun statt $\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)$ ꝛc. ꝛc., ihre Werthe $\frac{\partial s\cdot\partial^2 x - \partial x\cdot\partial^2 s}{\partial s^2}$, ꝛc. ꝛc., und verrichtet man die Multiplikationen wirklich, so heben sich in den Zählern alle ∂s für sich und auch alle $\partial^2 s$ für sich von selbst weg.

L aufſucht. Vgl. die „Lehre vom Größten und Kleinſten“ (§§. 87. 88.) und „Syſt. d. Math.“ Th. VII. Anhang (S. 86 ff.).

Die Formeln des (§. 136. E. Nr. 11. — 13.) werden dasmal

$$c\cdot(\partial x\cdot\partial^2 y-\partial y\cdot\partial^2 x) = N\cdot\partial s\cdot(\partial y\cdot\cos\lambda-\partial x\cdot\cos\mu),$$
$$c\cdot(\partial z\cdot\partial^2 x-\partial x\cdot\partial^2 z) = N\cdot\partial s\cdot(\partial x\cdot\cos\nu-\partial z\cdot\cos\lambda),$$
$$c\cdot(\partial y\cdot\partial^2 z-\partial z\cdot\partial^2 y) = N\cdot\partial s\cdot(\partial z\cdot\cos\mu-\partial y\cdot\cos\nu),$$

und die Formel (15. ebendaſelbſt) wird jetzt

$$\varrho=\frac{c\cdot\partial s}{N\cdot\sqrt{(\partial y\cdot\cos\lambda-\partial x\cdot\cos\mu)^2+(\partial x\cdot\cos\nu-\partial z\cdot\cos\lambda)^2+(\partial z\cdot\cos\mu-\partial y\cdot\cos\nu)^2}}.$$

Weil aber der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen im Nenner, wenn man wirklich quadrirt und addirt, nicht anders wird, als

$$\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2-(\partial x\cdot\cos\lambda+\partial y\cdot\cos\mu+\partial z\cdot\cos\nu)^2,$$

oder nach (Nr. 5.) bloß $\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2$, d. h. ∂s^2, ſo giebt dieſe letztere Gleichung

12) $\varrho\cdot N = c$, oder $\varrho = \frac{c}{N}$, oder $N = \frac{c}{\varrho}$.

Es verhalten ſich alſo die Drucke N·∂s an jeder Stelle, umgekehrt wie die Krümmungs-Halbmeſſer, und der Druck iſt = 0 (Null), wenn der Krümmungs-Halbmeſſer unendlich groß, d. h. wenn die Stelle der Kurve gerade iſt.

§. 141.

Mit Berückſichtigung der Reibung.

Betrachten wir noch einmal dieſelbe Aufgabe des vorſtehenden (§. 140.) unter derſelben Vorausſetzung, daß das Seil über die Fläche

1) $L_{x,y,z} = 0$

geſpannt ſey, daß keine Kräfte auf das Seil wirken, nicht einmal deſſen eigenes Gewicht; — ſuchen wir aber die Bedingungen des Gleichgewichts unter der Vorausſetzung, daß auf der einen Seite die Reibung mit überwunden ſeyn ſoll, ſo daß trotz der Reibung eine Bewegung erfolgen ſoll, ſobald eine noch ſo geringe Kraft die Spannung auf dieſer Seite vermehrt.

Die drei Gleichungen des Gleichgewichts werden dasmal,

weil außer dem Druck $N \cdot ds$ noch die Reibung $\mu N \cdot ds$ in der Richtung der Tangente hinzutritt,

$$2) \quad \delta\left(T \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\right) + N \cdot \cos\lambda \cdot \partial s - \mu N \cdot \partial x = 0,$$

$$3) \quad \delta\left(T \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) + N \cdot \cos\mu \cdot \partial s - \mu N \cdot \partial y = 0,$$

$$4) \quad \delta\left(T \cdot \frac{\partial z}{\partial s}\right) + N \cdot \cos\nu \cdot \partial s - \mu N \cdot \partial z = 0.$$

Diese Gleichungen (1. — 4.) müssen dasmal den Druck N, die Spannung T, und y und z als Funktionen von x geben, wenn nur die Auflösung (d. h. die Integration) derselben gelingt.

Betrachtet man den einfachsten Fall, wo die durch die Gleichung (1.) gegebene Fläche eine Cylinder-Fläche ist, gegeben durch die Gleichung

$$1') \quad x^2 + y^2 = r^2, \text{ welche } x \cdot \partial x + y \cdot \partial y = 0$$

giebt. Sind nun für die End-Punkte des Seils die dritten Ordinaten beide der Null gleich, so ist kein Grund vorhanden, daß die Kurve aus der Ebene XOY heraustreten sollte; die dritte Koordinaten-Axe OZ wird daher nun überflüssig; die Gleichung (4.) wird identisch, und die Gleichungen (2. u. 3.) reduciren sich, wenn man in (Fig. 62.) den Mittel-Punkt C mit dem Anfangs-Punkte O der Koordinaten-Axen zusammenfallen läßt, so daß

$$\cos\lambda = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \cos\mu = \frac{y}{r}$$

wird, auf

$$2') \quad \delta\left(T \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\right) + N \cdot \frac{x}{r} \cdot \partial s - \mu N \cdot \partial x = 0,$$

$$3') \quad \delta\left(T \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) + N \cdot \frac{y}{r} \cdot \partial s - \mu N \cdot \partial y = 0,$$

Führt man nun, um die Auflösung dieser Gleichungen (2.' u. 3.') bequemer bewerkstelligen zu können, statt der rechtwinklichen Koordinaten x und y lieber Polar-Koordinaten, nämlich (Fig. 62.) W. $MCX = \varphi$ (im Bogen für den Radius 1 genommen) und $CM = r$ ein, so hat man statt der (1.') jetzt

$$4') \quad r = const, \quad \partial r = 0;$$

und, wegen

$$x = r \cdot \cos\varphi, \qquad y = r \cdot \sin\varphi,$$

auch $\partial x = -r \cdot \sin\varphi \cdot \partial\varphi$ und $\partial y = r \cdot \cos\varphi \cdot \partial\varphi$,

so wie $\partial s = r \cdot \partial\varphi$.

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (2.' u. 3.'), so erhält man

$$5') \quad -\delta(T \cdot \sin\varphi) + N \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot \partial\varphi + \mu N \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot \partial\varphi = 0,$$

$$6') \quad \delta(T \cdot \cos\varphi) + N \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot \partial\varphi - \mu N \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot \partial\varphi = 0.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen muß nun N und T gefunden werden. Man kann ſie aber auch ſo ſchreiben, indem man φ als den unabhängigen Veränderlichen anſieht und die eingeklammerten Produkte differenziirt, nämlich

7′) $-T\cdot\cos\varphi - \delta T_\varphi\cdot\sin\varphi + Nr\cdot\cos\varphi + \mu Nr\cdot\sin\varphi = 0,$

8′) $-T\cdot\sin\varphi + \delta T_\varphi\cdot\cos\varphi + Nr\cdot\sin\varphi - \mu Nr\cdot\cos\varphi = 0.$

Eliminirt man aber aus dieſen letztern beiden Gleichungen abwechſelnd T und δT_φ, ſo erhält man ſtatt ihrer, dieſe anderen, nämlich:

9′) $T = N\cdot r$ und 10′) $\delta T_\varphi = \mu N.r.$

Dividirt man dieſe Gleichungen (9′. und 10′.) durch einander, ſo eliminirt ſich N, und man erhält

11′) $$\frac{\delta T_\varphi}{T_\varphi} = \mu;$$

und dieſe Gleichung, ſo integrirt, daß für $\varphi = 0$, T = der Anfangs-Spannung c wird, giebt

$$log\, T_\varphi - log\, c = \mu\cdot\varphi,$$

oder

12′) $$T = c\cdot e^{\mu\varphi}.$$

Die Gleichung (9′.) giebt dann Nr dazu *).

---

*) Dies iſt aber genau wieder die Aufgabe des (§. 116.) geweſen. Wenn hier Nr ſteht, wo dort bloß N, ſo hat ſolches darin ſeinen Grund, daß wir dort den Druck durch $N\cdot d\varphi$, hier aber durch $N\cdot ds$ bezeichnet haben. Da nun $ds = r\cdot d\varphi$ iſt, ſo iſt der Druck hier durch $Nr\cdot d\varphi$ ſtatt dort bloß durch $N\cdot d\varphi$ bezeichnet; daher bedeutet hier Nr gerade daſſelbe, was dort (im §. 116.) bloß durch N bezeichnet worden war.

Die Statik fester Körper.

Sechszehntes Kapitel.

Vom Gleichgewicht elastischer Federn.

§. 142.

Ein rechtwinkliches Parallelepipedum, dessen Dicke nur gering ist, gegen seine Länge l, und dessen Breite zwar beliebig seyn kann, aber in der Regel auch viel kleiner ist, als diese Länge l — und welches, wenn es durch Kräfte (die z. B. auf dessen Enden wirken) gekrümmt worden ist, in allen seinen Theilen das Bestreben hat, in seine vorige Form zurückzukehren, so daß die gedachten Kräfte fortwährend wirken müssen, um das Parallelepipedum in diesem gekrümmten Zustand zu erhalten, nennen wir eine elastische Schiene. — Ist die Breite der Schiene von deren Dicke gar nicht verschieden, oder doch nur unmerklich, so nennt man diese Schiene auch wohl noch eine elastische Ruthe, und diesen Namen behält sie, auch wenn der Querschnitt derselben kein Rechteck oder Quadrat, sondern etwa ein Kreis oder sonstige Figur seyn sollte, wenn nur die Dimensionen des Querschnittes gegen die Länge sehr gering sind; außerdem heißt sie dann eine elastische Stange.

Die elastische Schiene und die elastische Stange oder Ruthe sind besondere Fälle der elastischen Feder, wenn man unter letzterer einen beliebigen Körper von beliebiger Gestalt, versteht

welchem durch Kräfte eine andere Gestalt gegeben ist, während jeder seiner Theile das Bestreben äußert, ihn auf seine vorige Gestalt zurückzuführen.

§. 143.

Wird eine elastische Schiene oder Stange vertikal mit ihrem untern Ende auf eine absolut feste horizontale Unterlage gestellt, und dann an ihrem obern Ende mit einem Gewichte belastet, so wird sie sich nicht krümmen, überhaupt ihre Gestalt nicht verändern, so lange sie völlig homogen ist, weil kein Grund da ist, aus welchem die Krümmung eher nach der einen Seite, als nach der andern statt finden sollte. Weil aber die Homogenität und überhaupt das völlig Gleichmäßige in diesen Voraussetzungen in der Wirklichkeit nie vorhanden ist, so ist auch das Gleichgewicht der Schiene in dieser Lage nicht stabil, sondern es wird entweder die ganze Schiene umschlagen, oder sie wird, im Falle das untere Ende vertikal eingeklemmt ist, sich biegen. Im letztern Fall wird das Biegen so lange Statt haben, bis zuletzt die Elasticität der einzelnen Theile der Schiene (d. h. ihr Bestreben in die alte Lage zurück zu kehren) der wirkenden Kraft das Gleichgewicht hält.

Man kann aber auch bei der hier gedachten anfänglichen Lage der Schiene irgend eine von Außen herbeigeführte Krümmung voraussetzen, und sich nun nach den Bedingungen des Gleichgewichts fragen, sobald man statt der, die Krümmung hervorgebracht habenden Kräfte, an dem obern Ende der Schiene andere Kräfte anbringen will, welche genau dieselbe Krümmung erhalten.

Endlich kann man natürlich auch das Gleichgewicht einer irgend wie angebrachten und gekrümmten elastischen Schiene oder Stange untersuchen, d. h. die Bedingungen des Gleichgewichts angeben wollen.

§. 144.

Die Gestalt einer gekrümmten und durch Kräfte im Gleichgewicht erhaltenen elastischen Schiene oder Stange hängt offen-

bar von der Art und Weise ab, wie die Elasticität wirkt, folglich wird sich diese Gestalt verschieden finden lassen, wenn wir über die Art der Wirkung der Elasticität verschiedene Hypothesen aufstellen. Indem wir aber hier über die Elasticität der Schiene irgend Hypothesen feststellen, sind wir gar nicht gemeint, solche auch zu vertreten, sondern wir legen sie als Voraussetzungen nieder, und sehen zu, welche Folgerungen daraus auf dem Wege der Statik gezogen werden können; und wenn man zuletzt diese Resultate mit den Erfahrungen vergleicht, so hat man hierin wieder die Mittel, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit jener Hypothesen selbst zu prüfen.

Ist ferner eine elastische Schiene gekrümmt, so bilden die verschiedenen Längen-Richtungen auch verschiedene Kurven, z. B. die Längen-Richtungen der äußern Seite, andere als die Längen-Richtungen der innern Seite der gekrümmten Schiene. Wenn wir daher hier die Kurve der elastischen Schiene oder Stange suchen, so betrachten wir immer die Kurve der mittelsten Längen-Richtung, d. h. derjenigen, welche durch die Mittel-Punkte oder Schwer-Punkte aller Querschnitte gebildet wird.

§. 145.

Wir machen aber bei der Untersuchung des Gleichgewichts einer elastischen Schiene folgende Hypothesen:

1) Die Kräfte, welche an den Enden der Schienen oder Stangen wirken und sie krümmen, verändern nicht bloß die Gestalt, sondern auch die Längen der einzelnen Fasern, in welche wir die ganze Schiene oder Stange zerlegt uns denken, so daß letztere, welche anfänglich alle die Länge der Feder hatten, durch die Krümmung derselben vielleicht verkürzt, vielleicht verlängert erscheinen, nach Maaßgabe ihrer verschiedenen Lage. Die Elasticität ist das Bestreben aller einzelnen Theile, diese Veränderungen an Gestalt und Länge wieder zu vernichten.

2) Die im geraden Zustande der Schiene auf die Seiten-Flächen derselben senkrechten geraden Linien, bleiben auch auf denselben Flächen in ihrem gekrümmten Zustande senkrecht und die

dieselben. Namentlich also krümmen sie sich nicht, sondern ändern höchstens ihre Lage gegen einander ab.

3) Es sey (Fig. 65.) AMNBba ein Längen-Durchschnitt der Schiene in ihrem gekrümmten Zustande; also daß AMNB und amnb die Bogen vorstellen, welche aus der Länge L der Schiene hervorgegangen sind, während Aa und Bb die Dicke der Schiene bezeichnen. Es sey der punktirte Bogen $\alpha\mu\nu\beta$ die mittelste Faser zwischen den äußersten AMNB und amnb, und $DM'N'E$ sey eine beliebige, welche jede repräsentirt, die zwischen den äußersten liegt. Endlich seyen Mm und Nn zwei solche auf den Seitenwänden senkrechte, sich in C schneidende gerade Linien, die aber unendlich nahe an einander liegen, — so ist C der gemeinschaftliche Mittel-Punkt aller der Krümmungs-Kreise mn, $\mu\nu$, $M'N'$ und MN. Es seyen nun ϱ und $\varrho+u$ die Krümmungs-Halbmesser von $\mu\nu$ und $M'N'$, so daß u positiv ist, oder negativ, je nachdem der Bogen $DM'N'E$ nach der convexen oder nach der concaven Grenze zu liegt; ferner seyen σ und σ' die Längen der Bogen $\mu\nu$ und $M'N'$, so daß man hat

$$\text{I.} \qquad \varrho : \varrho+u = \sigma : \sigma', \quad \text{oder} \quad \sigma' = \sigma + \frac{u\sigma}{\varrho}.$$

Endlich sey γ die Länge des Bogens $\mu\nu$ und des Bogens $M'N'$, wie solche im geraden Zustande der Schiene gewesen sind, und $\gamma\cdot\delta$ so wie $\gamma\cdot\delta'$ seyen die Aenderungen, welche diese Länge γ bei $\mu\nu$ und bei $M'N'$ durch die gewaltsame Krümmung erfahren hat, so daß also

$$\text{II.} \qquad \sigma = \gamma + \gamma\cdot\delta = \gamma\cdot(1+\delta)$$

und

$$\text{III.} \qquad \sigma' = \gamma + \gamma\cdot\delta' = \gamma\cdot(1+\delta')$$

ist, während δ, δ' sehr kleine Verhältnißzahlen sind, — so erhält man, wenn aus (I. II. u. III.) γ und σ eliminirt werden und wenn man das Produkt $\delta\cdot\frac{u}{\varrho}$ gegen δ oder $\frac{u}{\varrho}$ allein, die beide sehr klein sind, außer Acht läßt,

$$\text{IV.} \qquad \delta' = \delta + u\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Es ist also $\delta' > \delta$ und dann auch $\sigma' > \sigma$, wenn u positiv ist; dagegen $\delta' < \delta$ und $\sigma' < \sigma$, für den Fall, daß u negativ seyn sollte; d. h. die vorhergehenden Annahmen haben zur Folge, daß die Anfangs einander gleichen unendlich-kleinen Theile der Fasern zwischen Mm und Nn in ihrem gekrümmten Zustande von der concaven nach der convexen Seite hin immerfort länger werden, so daß alle länger oder kürzer sind, wie der mittlere $\mu\nu$, je nachdem sie jenseits oder diesseits des mittlern Bogens $\mu\nu$ liegen *).

4) Wir setzen endlich noch voraus, daß diese Elasticität als eine Kraft angesehen wird, welche von jeder dieser Längen-Richtungen z. B. M'N' ausgeht, wie wenn solche isolirt wäre, — und auf die Querschnitte Mm und Nn senkrecht, übrigens aber mit δ' proportional wirkt.

§. 146.

Da nun, diesen Hypothesen zu Folge, die elastische Schiene als ein loses System angesehen werden kann, welches aus den unendlich vielen unendlich-kleinen Theilen MNmn besteht, deren Dicke $Mm = Nn = 2\varepsilon$ und deren Breite $= \lambda$ seyn mag, deren (einzelne Bogen-) Länge aber $= \gamma(1+\delta')$ } V.

ist, für einen beliebigen der Bogen M'N', — so kann nun (nach §§. 78. 79.) jeder solche einzelne Theil für sich in's Gleichgewicht gesetzt werden, wenn man alle Gleichungen des Gleichgewichts haben will. Man kann aber auch beliebig viel dieser Theile, oder die ganze Schiene im Gleichgewicht, als einen festen Körper sich denken, und danach verfahren.

---

*) Hätte sich also der mittlere hinsichtlich seiner Länge gar nicht verändert (so daß $\sigma = \gamma$ und $\delta = 0$ wäre, mithin δ' mit u zugleich positiv oder negativ), so würden sich alle diese Elemente jenseits des mittlern verlängert, alle aber, welche diesseits des mittlern liegen, verkürzt haben. In jenen würde nun die Elasticität als das Bestreben auftreten, diese Theile wieder kürzer zu machen, in diesen dagegen würde sie als das Bestreben erscheinen, sie wiederum zu verlängern.

Nach der Hypothese (Nr. 4. des §. 145.) wirken alle einzelnen Elasticitäten der Bogen M'N' parallel mit einander, und jede dieser Kräfte ist, wenn man sie in der ganzen Breite λ der Schiene summirt, $= p \cdot \delta' \cdot \lambda \cdot du$, wo p eine konstante Verhältnißzahl ist, während $\lambda \cdot du$ die Fläche des Elementes von Mm oder Nn vorstellt, welches von der Länge λ und der Breite du ist. Alle diese Kräfte lassen sich daher in eine einzige Kraft T vereinen, welche gefunden wird aus der Gleichung

$$T = \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon)} p\lambda\delta' \cdot du = p\lambda \cdot \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon)} \delta' \cdot du,$$

oder, wenn man statt δ' seinen Werth aus (§. 145. IV.) substituirt,

VI. $$T = 2p\lambda\varepsilon\delta,$$

welche Kraft auf die Fläche Mm oder Nn senkrecht wirkt. Um aber den Werth u_1 von u zu finden, wo diese Kraft T angreifend gedacht werden kann, so hat man nach derselben Theorie der parallelen Kräfte

$$T \cdot u_1 = \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon)} p\delta'\lambda \cdot u \cdot du = p\lambda \cdot \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon)} \delta' u \cdot du,$$

d. h.

VII. $$T \cdot u_1 = \tfrac{2}{3} \cdot p \cdot \frac{\lambda\varepsilon^3}{\varrho} = \tfrac{1}{3} p\omega\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varrho},$$

wenn man den Inhalt $2\lambda\varepsilon$ des Querschnitts durch ω bezeichnet. Dieses Moment $T \cdot u_1$ wird das Moment der Elasticität genannt *).

Für $\delta = 0$ scheint (nach VI.) auch die Kraft T der Null

*) Aus den auf die Hypothesen des (§. 145.) gegründeten Gleichungen (VI. u. VII.) geht hervor:

1) Die Kraft T ist mit dem Ausdehnungs- oder Zusammenziehungs-Verhältniß δ des mittlern Bogens $\mu\nu$ proportional, aber von der Krümmung ϱ ganz unabhängig.

2) Das Moment $T \cdot u_1$ dagegen ist von der Ausdehnung oder Zusammenziehung δ ganz unabhängig, aber umgekehrt mit dem Krümmungs-Halbmesser ϱ proportional.

3) Unter übrigens gleichen Umständen ist die Kraft T mit der Dicke ε (oder 2ε) proportional, das Moment Tu_1 aber mit dem Würfel ε^3 (oder $8\varepsilon^3$) dieser Dicke.

gleich zu werden. Denkt man aber daran, daß das Resultat $T = 0$, wenn solches aus den Formeln für die parallelen Kräfte hervorgeht, auch das Daseyn eines Gegen-Paares anzeigen kann, so findet man sogleich, daß hier, so wie $\delta = 0$ ist, allemal ein Gegen-Paar vorhanden ist (d. h. zwei gleiche parallele aber einander genau entgegengesetzte Kräfte) und daß das Moment in (VII.) auch zugleich das Moment dieses Gegen-Paares seyn muß.

Diese Kraft T wirkt auf beiden Seiten des Elementes MNmn ganz gleichmäßig, und weil sonst zwischen den einzelnen auf einander folgenden Elementen nicht Gleichgewicht seyn könnte, so muß diese Kraft T in allen einzelnen Elementen dieselbe seyn und gleich der in β wirkenden und senkrecht auf Bb zerlegten Gesammt-Kraft, so daß also T die Summe aller an β wirkenden und auf die Richtung, welche auf Bb senkrecht steht, projicirten Kräfte ist, mithin in der Regel als bekannt angesehen werden muß.

Aber weil diese Kraft T an der ganzen Schiene dieselbe ist, so giebt es ein einfaches Verfahren, um δ und dann auch p durch Versuche zu finden. Man nimmt nämlich dieselbe Schiene in ihrem geraden Zustande, hängt solche vertikal auf, und bringt an dem untern Ende ein Gewicht R = der bekannten Kraft T an; mißt die Verlängerung h, welche die Länge L der Schiene erleidet, und hat dann

$$\text{VIII.} \qquad \delta = \frac{h}{L} \quad (\text{weil } \delta L = h \text{ ist}).$$

Die Gleichung (VI.) giebt dann, wenn man statt T das gleich große Gewicht R setzt,

$$\text{IX.} \qquad p = \frac{1}{2\lambda\varepsilon} \cdot \frac{L}{h} \cdot R = \frac{L}{\omega h} \cdot R,$$

wo ω der Inhalt $2\lambda\varepsilon$ des Querschnittes der Schiene ist. Verschiedene solche Versuche mit verschiedenen Gewichten angestellt bei derselben Schiene, müssen aber für p allemal einen und denselben Werth liefern, wenn nicht den gemachten Hypothesen widersprochen seyn soll.

Um nun die Gleichung der Kurve $\alpha\mu\nu\beta$ zu finden, führe

man zwei auf einander senkrechte Axen αX und αY ein, bezeichne durch x und y die Koordinaten-Werthe des beliebigen Punktes μ der Kurve, und durch a und b die Koordinaten-Werthe des End-Punktes β derselben, während die Koordinaten-Werthe des Anfangs-Punktes α der Null gleich sind. Und um einen bestimmten Fall zu haben, denken wir uns die Schiene in Aa in der Richtung αX fest eingeklemmt, so daß αX selbst die Tangente der Kurve $\alpha\mu\nu\beta$ an α wird. In β wirke nun eine Kraft, welche mit der Elasticität der Schiene im Gleichgewicht ist, und welche wir nach den Axen αX und αY in die beiden Seiten-Kräfte P (nach αX) und Q (nach αY) zerlegt voraussetzen wollen. Denken wir uns nun die ganze Schiene im Gleichgewicht, dann in Mm in zwei Theile AaMm und BbMm zertheilt, so wie an jedem dieser Theile in M die nöthige Kraft φ in der Richtung der Normale Mm angebracht, um jeden dieser beiden Theile in seiner Krümmung zu erhalten, so wird die Kraft T der Elasticität mit ihrem Momente $T \cdot u_1$ den Theil BbMm um den mittelsten Punkt μ, wie um eine feste Axe zu drehen streben (wobei wir uns immer statt der ganzen Breite der Schiene nur den in der Figur sichtbar gemachten Durchschnitt AaBb denken, weil dies bei unserer Aufgabe offenbar erlaubt ist). Es ist daher bei dem vorausgesetzten Gleichgewicht von MmBb die Summe der statischen Momente in Bezug auf das Centrum μ, der Null gleich. — Diese letztere Gleichung in Verbindung mit (VII.) ist aber, wenn man noch

$$\text{X.} \qquad \tfrac{2}{3}p\lambda\varepsilon^3 = \tfrac{1}{3}p\omega\varepsilon^2 = q, \quad \text{also} \quad T \cdot u_1 = \frac{q}{\varrho}$$

setzt, so daß q kein x enthält, die folgende:

$$\text{XI.} \qquad \frac{q}{\varrho} + (b-y)\cdot P - (a-x)\cdot Q = 0;$$

oder, weil nach (I. Th. Geom. §. 7.)

$$\varrho = \frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$$

ist, und wenn man diesen Werth statt ϱ in die (XI.) substituirt,

XII. $q \cdot \partial^2 y_x + [P \cdot (b - y) - Q \cdot (a - x)] \cdot (1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$

Diese Gleichung zwischen x, y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ ist nun die Differenzial-Gleichung (der zweiten Ordnung) für die elastische Kurve $\alpha\mu\nu\beta$. —

Integrirt man diese Gleichung, so gehen zwei willkührliche (d. h. noch unbestimmte) Konstanten ein, welche eben so wie die Grenz-Ordinaten a und b aus den übrigen Bedingungen der Aufgabe noch bestimmt werden müssen. Die Bedingungen, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ und auch $\partial y_x = 0$ werden muß (weil unserer Annahme zu Folge in α die Axe αX zugleich Tangente der Kurve wird) bestimmen zwei dieser vier Unbestimmten; die Bedingung, daß für $x = a$ auch $y = b$ werden muß, bestimmt die dritte; und die im Gleichgewicht der Schiene bekannte Länge der Kurve $\alpha\mu\nu\beta$ von α bis β giebt die vierte noch fehlende Gleichung, um alles Unbestimmte und daher die Gleichung der elastischen Kurve selbst völlig bestimmt zu haben. — Ist aber die Kurve völlig bestimmt, so kann man auch an jede Stelle μ ihren Krümmungs-Halbmesser ϱ berechnen, und mithin auch das Moment der Elasticität $\frac{q}{\varrho}$.

§. 147.

Ist die Schiene nicht, wie wir bis jetzt vorausgesetzt haben, eingeklemmt, sondern kann sie sich um den Punkt α als einen absolut festen Punkt drehen, so muß außer den vorstehenden Gleichungen, weil auch die ganze Schiene als ein fester Körper gedacht, im Gleichgewicht ist, noch

$$a \cdot Q = b \cdot P$$

seyn, wenn diese Drehung nicht erfolgen, sondern Gleichgewicht seyn soll. Dagegen kann man nicht mehr für $x = 0$ auch $\partial y_x = 0$ annehmen, so daß man diese Bedingung zur Bestimmung der Konstanten verloren, an deren Stelle aber die vorstehende Gleichung $a \cdot Q = b \cdot P$ gewonnen hat. Damit aber die ganze Schiene sich um α als absolut festen Punkt drehen könne

muß sie in α gegen einen absolut festen Körper angedrückt, und durch die Reibung oder sonst eine andere Ursache vor dem Gleiten bewahrt werden. —

§. 148.

Betrachten wir nun den besondern Fall unserer Aufgabe, in welchem $P = 0$ ist; d. h. setzen wir voraus, daß die elastische Schiene in α nach der horizontalen Richtung αX eingeklemmt ist, und daß am andern Ende β ein Gewicht Q hängt, welches mit der Elasticität der Schiene das Gleichgewicht hält.

In diesem Falle wird die Gleichung (XII.) der Kurve jetzt:

$$1) \qquad q \cdot \partial^2 y_x = Q \cdot (a - x) \cdot (1 + \partial y_x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man aber

$$2) \qquad \frac{q}{Q} = c^2$$

(so daß c^2 gegeben und in der Regel, wegen des großen Moments der Elasticität, d. h. wegen des großen Werths von q, sehr groß ist —), so wird diese Gleichung (1.) noch einfacher, nämlich

$$3) \qquad c^2 \cdot \frac{\partial^2 y_x}{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{1}{2}}} = a - x;$$

und da in dieser letztern Gleichung die Veränderlichen bereits getrennt sind, so läßt sie sich sogleich integriren. Sie giebt, wenn man die Konstante so bestimmt, daß für $x = 0$ auch $\partial y_x = 0$ wird,

$$4) \qquad 2c^2 \cdot \frac{\partial y_x}{\sqrt{1 + \partial y_x^2}} = 2ax - x^2.$$

Löst man diese Gleichung nun nach ∂y_x algebraisch auf, so giebt sie

$$5) \qquad \partial y_x = \frac{2ax - x^2}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}.$$

Aus $\partial s_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2}$ folgt dann noch

6) $$\partial s_x = \frac{2c^2}{\sqrt{4c^4-(2ax-x^2)^2}}.$$

Diese Gleichungen (5. u. 6.) werden zuletzt noch mittelst elliptischer Transcendenten integrirt, während man die Integrale so nehmen muß, daß für $x=0$ auch $y=0$ und auch $s=0$ wird.

Wenn c sehr groß ist.

Wenn jedoch Q nicht sehr groß seyn sollte, so ist in der Regel c sehr groß, daher y sehr klein, folglich $s=x$, also auch $L=a$ zu nehmen, und man kann im Nenner der Ausdrücke in (5. u. 6.) zur Rechten, $2ax-x^2$ gegen $2c^2$ als unbedeutend außer Acht lassen. Dann geht die Gleichung (5.) in

7) $$\partial y_x = \frac{1}{2c^2}\cdot(2ax-x^2)$$

über, und giebt, wenn sie so integrirt wird, daß man für $x=0$ auch $y=0$ erhält,

8) $$y = \frac{3ax^2-x^3}{6c^2}.$$

Für $x=a$ wird demnach

9) $$y = b = \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{c^2} = \frac{Q}{3q}\cdot a^3,$$

wenn statt c^2 sein Werth aus (2.) gesetzt wird, wo auch b noch sehr klein ist, weil q gegen Q sehr groß vorausgesetzt worden. Betrachtet man also zwei auf dieselbe Weise angebrachte elastische Schienen von derselben Natur, so daß in beiden der Werth von q derselbe bleibt, so ist die Biegung b der Feder (d. h. die Abweichung des End-Punktes β von der Horizontalen αX) bei einerlei Länge a, mit dem angehängten Gewichte Q proportional, — bei einerlei Gewicht Q dagegen mit dem Würfel der Länge a oder L.

Bringt man an dem andern Ende β der Schiene, welche die Länge a hat, und die im geraden Zustande und in vertikaler Richtung an dem Ende α aufgehängt ist, dasselbe Gewicht Q an, und verlängert dieses die Schiene um ein Stück h, welches (nach §. 145. Nr. 3. II.) $= a\cdot\delta$ ist, so hat man (nach §. 146. VI.), weil Q jetzt das ist, was dort T war,

10) $$Q = 2p\lambda\varepsilon\delta = p\omega\delta,$$

oder, wenn man statt p seinen Werth $\frac{3}{2}\cdot\frac{q}{\lambda\cdot\varepsilon^3}$ (aus X.), und statt δ seinen Werth $\frac{h}{a}$ substituirt,

11) $$Q = 3q\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2} = \frac{3qh}{\varepsilon^2 a}.$$

Dies giebt die Gleichung

12) $$h = \frac{\varepsilon^2 a\cdot Q}{3q}.$$

Dividirt man zuletzt die (12.) durch die (9.), so erhält man noch

13) $$h : b = \varepsilon^2 : a^2;$$

d. h. die Verlängerung h, welche die Schiene erleidet, wenn das Gewicht Q in der Richtung ihrer Länge angebracht wird, verhält sich zu der Biegung b (d. h. zu der Abweichung ihres End-Punktes β von der horizontalen Lage αX), welche die Schiene erleidet, wenn sie an dem einen Ende α horizontal eingeklemmt, und an dem andern Ende β durch dasselbe Gewicht Q vertikal belastet ist, — wie das Quadrat der halben Dicke ε der Schiene, zu dem Quadrat ihrer Länge a sich verhält *).

Anmerk. Es läßt sich aber in der allgemeinern Aufgabe des (§. 146.), in welcher weder P noch Q der Null gleich ist, die Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung der Kurve eben so integriren, wie in dem besondern Falle des (§. 148.), wo $P = 0$ vorausgesetzt worden. Ist nämlich weder P noch Q der Null gleich, so vereinige man die beiden an β wirkenden Kräfte P und Q in die einzige Kraft $R = +\sqrt{P^2+Q^2}$, welche

*) Es versteht sich dabei, daß dieses alles immer nur gilt, wenn die Hypothesen des (§. 145.) als wahr vorausgesetzt werden, und wenn zugleich, was hier noch in's Besondere vorausgesetzt worden ist, c sehr groß, d. h. q gegen Q sehr groß ist. Umgekehrt aber kann man nun, wenn über diese letztere Aussage möglichst genaue Versuche angestellt werden, eine neue Bestätigung der gemachten Hypothesen sich verschaffen, oder sich von deren Unrichtigkeit überzeugen.

mit der Axe αX den gegebenen Winkel w macht, in so ferne nämlich

$$tg\,w = \frac{Q}{P}$$

ist. Legt man nun durch α zwei neue auf einander senkrechte Axen $\alpha X'$ und $\alpha Y'$, von denen die letztere mit der Kraft R parallel läuft, also mit der Axe αX den Winkel w, mithin mit der αY den Winkel $w - 90^0$ macht, so daß auch $X'\alpha X = w - 90^0$ wird, so erhält man statt der Gleichung (XII. des §. 146.), wenn x', y', a', b' das für die neuen Axen sind, was x, y, a, b für die alten waren, und wenn man noch $\frac{q}{R} = c^2$ setzt,

$$1) \qquad c^2 \cdot \frac{\partial^2 y'_{x'}}{(1 + \partial y'^2_{x'})^{\frac{3}{2}}} = a' - x';$$

und dies ist genau die Form der Gleichung (§. 148. Nr. 3.), welche wir für den Fall erhalten haben, wo $P = 0$ war. Es ist hier nur der Unterschied, daß zwar für $x' = 0$ auch $y' = 0$, aber nicht mehr $\partial y'_{x'} = 0$, sondern

$$\partial y'_{x'} = tg(w - 90^0) = -cotg\,w = -\frac{P}{Q}$$

werden muß, in so ferne die Tangente αX an dem Punkte α der Kurve mit der jetzigen Abscissen-Axe den Winkel $w - 90^0$ macht, weil (im §. 146.) vorausgesetzt war, daß die Schiene in α in der Richtung αX eingeklemmt ist.

Das Integral der Gleichung (1.) wird daher jetzt

$$2c^2 \cdot \left(\frac{\partial y'_{x'}}{\sqrt{1 + \partial y'^2_{x'}}} + \frac{P}{R} \right) = 2a'x' - x'^2;$$

und löst man diese Gleichung nach $\partial y'_{x'}$ auf, so erhält man $\partial y'_{x'}$ als eine bloße Funktion von x', so daß wiederum y' in x' mittelst elliptischer Transcendenten gefunden wird.

§. 149.

Betrachten wir noch einen besondern Fall der Aufgabe des (§. 147.), den nämlich, wo die elastische Schiene die Form AB

einer der Figuren (66. 67. 68.) vermöge einer an B angebrachten Kraft P angenommen hat und behält, während die Kraft P in der Richtung BA wirkt, und die Schiene mit dem andern Ende A gegen eine absolut feste Ebene AY gedrückt wird; unter der Voraussetzung jedoch, daß diese Kraft P nicht groß genug ist, um eine bedeutendere Krümmung der Schiene hervorzubringen, so nämlich, daß, wenn AX zur Abscissen-Axe und die darauf senkrechte AY zur Ordinaten-Axe genommen wird, an allen Punkten der Schiene der Werth von δy_x zwar verschieden, aber immer nur äußerst klein seyn soll.

In diesem besondern Falle der Aufgabe des (§. 147.) ist $Q = 0$, also, wegen $Q \cdot a = P \cdot b$, auch $b = 0$, so daß der Punkt B immer in der Axe AX liegt. Ferner kann man nun in dem Ausdruck $1 + \delta y_x^2$ das Quadrat δy_x^2 gegen 1 außer Acht lassen. Die Gleichung (XII.) des (§. 146.) wird daher jetzt, wenn man wieder

1) $$\frac{q}{P} = c^2$$

setzt,

2) $$c^2 \cdot \delta^2 y_x + y = 0.$$

Diese Gleichung ist lineär und von der zweiten Ordnung; sie giebt daher, nach (I. Th. Analys. §. 50.) integrirt, und wenn man die eine der beiden Konstanten gleich so bestimmt, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ wird:

3) $$y = k \cdot \sin \frac{x}{c},$$

wo k noch eine willkührliche (d. h. noch unbestimmte) Konstante ist.

Diese Konstante k soll sich nun aus der Bedingung bestimmen, daß für $x = \alpha\beta = a$ auch $y = 0$ werden muß. Dies giebt

4) $$0 = k \cdot \sin \frac{a}{c},$$

d. h. $k = 0$, wenn $\frac{a}{c}$ irgend ein Vielfaches von π nicht ist

(unter π den Halbkreis 3,14159… verstanden für den Radius 1); aber es bleibt k aus dieser Bedingung unbestimmt, wenn $\sin\frac{a}{c} = 0$, d. h. wenn $\frac{a}{c}$ ein Vielfaches von π seyn sollte. Weil jedoch die Gleichung (3.), also auch die (4.), nur eine genäherte Gleichung ist, so kann die Gleichung (4.) auch wohl anzeigen, daß k nicht gerade Null, sondern bloß sehr klein ist. Und da y für jedes x immer sehr klein bleiben soll, der hier gemachten Voraussetzung zu Folge, so muß entweder $k = 0$, oder k sehr klein seyn. Wäre nun $k = 0$, so wäre die Schiene gar nicht gekrümmt, sondern nur etwas kürzer gedrückt, so daß a etwas kleiner wäre, als die Länge L der Schiene, wie sie war, ehe noch die Kraft P auf sie gewirkt hat. Hält also die Kraft P mit der Elasticität der gekrümmten Schiene das Gleichgewicht, so ist k sehr klein und zur Zeit noch unbestimmt, jedoch dadurch zu bestimmen, daß man an irgend einer Stelle z. B. wo die Schiene von der Axe AX am weitesten abweicht, die zusammengehörigen Koordinaten-Werthe x und y mißt, und solche in die Gleichung (3.) substituirt *).

Weil jedoch, welchen Werth außer Null die Konstante k haben mag, für $x = a$ allemal $y = 0$ werden, d. h. die Gleichung (4.) statt finden muß, so folgt, daß die elastische Schiene unter den gemachten Voraussetzungen nicht im Gleichgewicht seyn kann, wenn nicht $\sin\frac{a}{c} = 0$, also wenn nicht a irgend ein Vielfaches von $c\pi$ wird. Es wird aber die Schiene bezüglich in den Formen (Figg. 66. 67. 68. ꝛc. ꝛc.) im Gleichgewicht seyn, je nachdem $a = c\pi$, oder $= 2c\pi$, oder $= 3c\pi$, oder ꝛc. ꝛc. ist. — Doch ist dabei ja nicht zu übersehen, daß diese Formen nur deshalb eintreten müssen, weil wir vorausgesetzt haben, daß sich kein Punkt der Schiene sehr weit von der Axe AX entfer-

*) Man kann auf diese Weise mittelst Versuche auch noch c bestimmen, indem man noch ein Paar zusammengehöriger Koordinaten-Werthe x und y mißt, solche in die Gleichung (3.) substituirt, und nun zwei Gleichungen zwischen k und c hat.

nen soll. Der Werth von c ist ferner durch die Gleichung (1.) gegeben und hängt einerseits von der Stärke der Elastizität, andererseits von der Kraft P ab.

Suchen wir endlich aus der Gleichung (3.) auch noch die Länge der Schiene, im Gleichgewicht.

Man findet aus (3.)

$$5)\qquad \partial y_x = \frac{k}{c}\cdot\cos\frac{x}{c},$$

also

$$6)\qquad \partial s_x = \sqrt{1+\partial y_x^2} = \sqrt{\left[1+\frac{k^2}{c^2}\left(\cos\frac{x}{c}\right)^2\right]},$$

oder, wenn man die vierten und höheren Potenzen von k außer Acht läßt,

$$7)\qquad \partial s_x = 1+\frac{k^2}{2c^2}\cdot\left(\cos\frac{x}{c}\right)^2;$$

folglich

$$8)\qquad s = \int_{x\div 0}\left[1+\frac{k^2}{2c^2}\cdot\left(\cos\frac{x}{c}\right)^2\right]\cdot dx.$$

Setzt man hier statt $\left(\cos\frac{x}{c}\right)^2$ lieber $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2x}{c}$ und verrichtet man dann die Integration, so ergiebt sich

$$9)\qquad s = x+\frac{k^2}{2c^2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}x+\frac{c}{4}\cdot\sin\frac{2x}{c}\right).$$

In so ferne aber für $x = a$ der Bogen s in die Länge L der Schiene übergehen muß, so giebt dies

$$10)\qquad L = a\cdot\left(1+\frac{k^2}{4c^2}\right)+\frac{k^2}{8c}\cdot\sin\frac{2a}{c}.$$

Weil jedoch, wie wir so eben gesehen haben, das Gleichgewicht, unter den gemachten Voraussetzungen, nur dann bestehen kann, wenn

$$11)\qquad a \doteq nc\pi,$$

dabei aber n irgend eine ganze Zahl ist, so giebt die (10.)

$$12)\qquad L = nc\pi\cdot\left(1+\frac{k^2}{4c^2}\right);$$

und daraus kann man wiederum k finden, nämlich

13) $$k = 2c\cdot\sqrt{\left(\frac{L}{nc\pi}-1\right)},$$

wenn nur L im zusammengedrückten Zustande der Schiene bekannt ist. Und weil k, den gemachten Voraussetzungen zu Folge, sehr klein werden muß, so darf die Länge L diejenige von a nur sehr wenig übersteigen, so daß also unter den gemachten Voraussetzungen das Gleichgewicht der Schiene nicht statt finden kann, wenn nicht die Länge L derselben nur sehr wenig größer ist als $nc\pi$; es findet aber die Form (Fig. 66. oder Fig. 67. oder Figur 68. oder ꝛc. ꝛc.) statt, je nachdem $n = 1, 2, 3$, ꝛc. ꝛc. ist.

Setzt man endlich, in so ferne

$$a = nc\pi, \quad \text{also} \quad c = \frac{a}{n\pi}$$

ist, statt c diesen Werth in die Gleichung (3.) der Kurve, so wird solche

14) $$y = k\cdot\sin\left(n\pi\,\frac{x}{a}\right).$$

§. 150.

Da sich die Schiene zum ersten Male krümmt, wie wir in der vorstehenden Untersuchung gesehen haben, wenn $a = \pi c$, also wenn ihre Länge L nur sehr wenig größer als πc ist, so drückt die Gleichung

$$L = \pi c, \quad \text{d. h.} \quad L = \pi\cdot\sqrt{\left(\frac{q}{P}\right)},$$

oder

1) $$P = q\cdot\frac{\pi^2}{L^2} = \tfrac{2}{3}p\cdot\lambda\cdot\varepsilon^3\cdot\frac{\pi^2}{L^2},$$

wo λ die Breite, 2ε die Dicke und L die Länge der Schiene, p aber eine Verhältnißzahl ist (wie solches im §. 146. näher bestimmt worden), die Kraft P aus, welche gerade hinreicht, um die elastische Schiene zum ersten Male zu krümmen. Jede kleinere Kraft P krümmt sie noch gar nicht. — Diese in (1.) bestimmte Kraft P nennt man nun die **Kraft der Feder.** —

Setzt man den Querschnitt $2\lambda\varepsilon = \omega$, so wird die Gleichung (1.) auch diese Form annehmen:

2) $$P = \tfrac{1}{3} p \cdot \omega \cdot \pi^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{L^2}.$$

Die Kraft der Feder steht also bei einerlei Querschnitt und bei einerlei Natur der Feder, mit dem Quadrat der Dicke im direkten, und mit dem Quadrat der Länge im indirekten Verhältniß.

Ist nun Q das Gewicht, welches die Schiene von der Länge L, wenn sie vertikal hängt um das Stück $h(= L \cdot \delta)$ verlängert, so ist nach (§. 146. IX.)

3) $$p = \frac{Q \cdot L}{\omega h};$$

also giebt die Gleichung (2.)

4) $$P = \tfrac{1}{3}\pi^2 \cdot \frac{Q \cdot \varepsilon^2}{Lh}.$$

Ist aber Q′ das Gewicht, welches an dem Ende einer horizontalen Schiene von der Länge L angebracht, dieses Ende um eine kleine Länge b von dieser Horizontalen entfernt, so hat man nach (§. 148.)

3′) $$p = \frac{Q' \cdot L}{\omega \varepsilon^2 b},$$

und die Gleichung (2.) giebt nun

4′) $$P = \tfrac{1}{3}\pi^2 \cdot Q' \cdot \frac{L}{b}.$$

In den Gleichungen (4. und 4′.) sieht man nun die Kraft der Feder P in Gewichte oder Kräfte Q oder Q′ ausgedrückt, welche für dieselbe elastische Schiene durch Versuche ausgemittelt werden können.

§. 151.

Betrachten wir nun statt einer elastischen Schiene, welche in ihrem natürlichen Zustande als ein rechtwinkliches Parallelepipedum von den Dimensionen λ, 2ε und L vorausgesetzt worden ist, eine gerade prismatische elastische Stange von der Länge

L, deren auf die Länge senkrechten Querschnitte von ganz beliebiger Gestalt seyn mögen, und suchen wir für diese Stange dieselben Aufgaben zu lösen, welche in den (§§. 145. — 150.) für die elastische Schiene gelöst worden sind.

Gebrauchen wir dieselbe (Fig. 65.) auch jetzt noch, so mag $\alpha\mu\nu\beta$ die Kurve vorstellen, welche durch die Schwer-Punkte aller, auf die Längen-Richtung normalen Querschnitte gebildet wird. Man legt unendlich viele mit einander parallele und auf einander senkrechte Längenschnitte (während die Stange gerade ist) hindurch, um einen solchen Querschnitt ω in lauter unendlich-kleine Rechteckchen zu zerlegen; und AaBb der (Fig. 65.) stelle einen dieser Längenschnitte vor, und zwar den, in welchem die Kurve $\alpha\mu\nu\beta$ liegt, die wir noch immer einfach gekrümmt voraussetzen, und welche durch die in β angebrachten Kräfte P und Q des (§. 146.) hervorgebracht worden ist. Betrachten wir nun den Querschnitt Mm, setzen wir $\mu M = \varepsilon$, $\mu m = \varepsilon'$, und abermals $\mu M' = u$, so sind ε und ε' die Grenzwerthe von u. Ist nun ω der Inhalt des Querschnitts, v die Breite desselben an der durch u gegebenen Stelle, also $v \cdot du$ der Inhalt des Streifens des Querschnitts von der Dicke du, so ist

$$1) \qquad \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon')} v \cdot du = \omega,$$

und auch, weil u vom Schwer-Punkt aus anfängt, nach (§. 55. I. ⊙.)

$$2) \qquad \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon')} vu \cdot du = 0.$$

Haben nun wieder p, T und u_1 dieselbe Bedeutung, wie in (§. 146.), eben so auch δ und δ', so hat man wieder

$$3) \qquad T = p \cdot \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon')} \delta' v \cdot du$$

und

$$4) \qquad T \cdot u_1 = p \cdot \int_{\varepsilon \div (-\varepsilon')} \delta' vu \cdot du,$$

wo

$$5) \qquad \delta' = \delta + \frac{u}{\varrho}$$

ist, während ϱ den Krümmungs-Halbmesser von $\mu\nu$ vorstellt.

Da

Dabei wird die Verhältnißzahl p in einem und demselben Querschnitt ω als konstant vorausgesetzt, während sie von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich seyn, d. h. von der Lage des Punktes μ in der Kurve $\alpha\mu\nu\beta$ abhängig seyn kann. — Setzt man statt δ' seinen Werth aus (5.) und bestimmt man noch eine Zahl f mittelst der Gleichung

6) $$\int_{s\div(-s')} \varkappa u^2 \cdot du = \tfrac{1}{3}\omega \cdot f^2,$$

so hat man aus (3. und 4.)

7) $$T = p\omega\vartheta$$

und

8) $$T \cdot u_1 = \tfrac{1}{3} p\omega f^2 \cdot \frac{1}{\varrho},$$

so daß jetzt, in dem Moment der Elasticität, wenn man solches mit der (VII. des §. 146.) vergleicht, bloß f an die Stelle von ε tritt. Die Gleichung (XII. des §. 146.) der Kurve, nämlich

$$q \cdot \vartheta^2 y_x + [P \cdot (b - y) - Q \cdot (a - x)](1 + \vartheta y_x^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

bleibt daher auch jetzt noch gültig, nur daß in dem Werthe für q, nämlich in $q = \frac{1}{3} p\omega\varepsilon^2$ jetzt f^2 statt ε^2 gesetzt werden muß.

Die Auflösung der Aufgabe des (§. 148.) bleibt daher für die jetzige Stange eben so wie sie dort gegeben ist, nur mit dem Unterschiede, daß man in dem Ausdruck $\frac{1}{3} p\omega\varepsilon^2$ für q, jetzt immer den Werth f^2, wie er sich aus der Gleichung (6.) finden läßt, statt ε^2 schreiben muß. Der dortige Werth der Biegung b, d. h. der Abweichung b des End-Punktes β von der Horizontalen wird daher jetzt, wenn c, wie dort, sehr groß, also L = a vorausgesetzt wird, seyn

9) $$b = \frac{a^3 \cdot Q}{3q} = \frac{a^3 \cdot Q}{p\omega f^2}.$$

Aber eben so findet die Auflösung der Aufgabe des (§. 149.) hier für die Stange eben so ganz unverändert statt, wie dort für die Schiene, wenn man nur immer in dem Ausdruck $\frac{1}{3} p\omega\varepsilon^2$ für q, statt ε^2 jetzt f^2 setzt. Ist dann wie im (§. 150.) die Kraft der Feder durch P bezeichnet, so findet sich hier (aus §. 150. Nr. 2.)

10) $$P = \tfrac{1}{3}p\omega f^2\frac{\pi^2}{L^2} = p\frac{\pi^2}{L^2}\int_{+(-\varepsilon')}^{\varepsilon} vu^2\cdot du.$$

Die (9.), wenn man sie mit der (10.) in Verbindung bringt, giebt dann noch die Biegung

11) $$b = \tfrac{1}{3}\pi^2\cdot L\cdot\frac{Q}{P}.$$

§. 152.

Aus der (11.) folgt:

Bei zwei verschiedenen aber gleich langen elastischen Stangen ist die durch eine und dieselbe Kraft Q hervorgebrachte Biegung b umgekehrt mit der Kraft der Feder P proportional. Um daher diese Biegungen mit einander zu vergleichen, darf man nur die Kräfte der Feder (d. h. die P) mit einander vergleichen.

I. Es sey z. B. die Stange ein dreiseitiges Prisma, und zwar der Querschnitt ω ein gleichschenkliches Dreieck, dessen Grundlinie g und Höhe h ist. Ist nun in der (Fig. 65.) M der Grundlinie, m dagegen der Spitze dieses Dreiecks angehörig, also Mm die Höhe h, so ist, weil μ der Schwer-Punkt dieses Dreiecks seyn soll, dasmal

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}h,\quad \varepsilon' = \tfrac{2}{3}h \text{ und } v = \frac{g}{h}(\tfrac{2}{3}h + u);$$

also wird die Kraft P der Feder von der Länge L, wenn man die Integration in (10.) ausführt:

$$P = \tfrac{1}{36}p\pi^2\cdot\frac{gh^3}{L^2}.$$

Ist aber die Stange anders gebogen, so daß M der Spitze und m der Grundlinie des Querschnitts angehört, so ist

$$\varepsilon = \tfrac{2}{3}h,\quad \varepsilon' = \tfrac{1}{3}h \text{ und } v = \frac{g}{h}(\tfrac{1}{3}h + u);$$

also wird jetzt $$P = \tfrac{1}{12}p\cdot\pi^2\cdot\frac{gh^3}{L^2}.$$

Soll also die Stange einmal so gekrümmt werden, daß, wie solches zuerst angenommen worden, die breite Fläche convex, die scharfe aber concav ist, und soll sie ein andermal so gekrümmt werden, wie dies zuletzt angenommen wurde, daß umgekehrt die scharfe Kante convex, die breite Fläche aber concav ist, so ist

die Kraft der Feder in diesem letztern Falle dreimal so groß als in dem ersteren.

II. Ist der Querschnitt ω ein Quadrat und $= m^2$, und ist der Längenschnitt AaBb parallel mit den Seiten dieses Quadrats, so ist

$$\varepsilon = \varepsilon' = \tfrac{1}{2}u \quad \text{und} \quad v = m;$$

also

$$P = \tfrac{1}{12}p\cdot\pi^2\cdot\frac{m^4}{L^2}.$$

III. Ist der Querschnitt ein Kreis, dessen Radius k ist, so hat man

$$\varepsilon = \varepsilon' = k, \quad v = 2\sqrt{k^2 - u^2};$$

also

$$P = \tfrac{1}{4}p\cdot\pi^2\cdot\frac{k^4}{L^2}.$$

Sind daher die Querschnitte in (II. und III.) einander gleich, d. h. ist $m^2 = k^2\pi$, so verhalten sich die Kräfte der Feder zu einander wie π zu 3, d. h. wie $3{,}14159\ldots$ zu 3.

IV. Ist die Stange hohl und cylindrisch, und zwar der Querschnitt ω ein concentrischer Kreisring, dessen großer und kleiner Radius r und r' sind, so findet man dasmal das Integral

$$\int_{\varepsilon\div(-\varepsilon')} vu^2\cdot du$$

als die Differenz zweier Integrale, von denen das eine erhalten wird, wenn man die Grenzwerthe von v und u auf den äußern Kreis bezieht, das andere aber, wenn dieselben Grenzwerthe auf den innern Kreis bezogen werden. Man findet daher dasmal

$$\int_{\varepsilon\div(-\varepsilon')} vu^2\cdot du = \tfrac{1}{4}\pi\cdot r^4 - \tfrac{1}{4}\pi\cdot r'^4,$$

und deshalb dann (nach 10.)

$$P = \frac{\frac{1}{4}p\cdot\pi^3\cdot(r^4 - r'^4)}{L^2} = \frac{\frac{1}{4}p\cdot\pi^3\cdot(r^2 + r'^2)(r^2 - r'^2)}{L^2}.$$

Ist der Inhalt des jetzigen Querschnittes dem Querschnitt in dem Falle (III.) gleich, d. h. ist $\pi(r^2 - r'^2) = \pi k^2$, also $r^2 - r'^2 = k^2$, oder $r^2 = k^2 + r'^2$, so reducirt sich der vorstehende Werth von P auf

$$P = \frac{\frac{1}{4}p\cdot\pi^3\cdot(k^2 + 2r'^2)\cdot k^2}{L^2} = \frac{\frac{1}{4}p\cdot\pi^3\cdot(k^4 + 2k^2r'^2)}{L^2};$$

folglich ist bei gleichem Querschnitt die Kraft der Feder, wenn letztere ein Hohlcylinder ist, größer als wenn sie einen vollen Cylinder bildet; und zwar verhalten sich beide Feder-Kräfte zu einander, wie $1+2\frac{r'^2}{k^2}$ zu 1, wenn r' der Radius der Höhlung, k aber der Radius des Querschnitts des vollen Cylinders ist.

§. 153.

Betrachten wir nun auf's Neue die allgemeinere Aufgabe des (§. 146.) oder des (§. 151.), jedoch unter der Voraussetzung, daß die elastische Schiene schon in ihrem natürlichen Zustande einfach gekrümmt ist, und durch angebrachte Kräfte nur anders, aber noch immer einfach gekrümmt, und ohne daß eine Drehung oder Windung statt findet, — mittelst ihrer Elasticität im Gleichgewicht bleibt. Nehmen wir dabei die Kurve zur Grundlage, welche die Schwer-Punkte aller auf die Feder normalen Querschnitte bilden, und welche Anfangs als gegeben angesehen wird, nachgehends aber im Zustande des Gleichgewichts der Elasticität der Feder mit den wirkenden Kräften anders geworden, und nun gesucht ist.

Die Dicke der Schiene, welche wir im (§. 146.) durch 2ε bezeichnet haben, ist im (§. 151.) durch $\varepsilon+\varepsilon'$ bezeichnet worden, wo ε und ε' vom Schwer-Punkt μ (Fig. 65.) des Querschnittes an gezählt werden (so daß $\varepsilon=\mu M$, $\varepsilon'=\mu m$ ist); dabei sind zugleich ε und ε' die Grenzwerthe des Veränderlichen u, wie solcher im (§. 146.) eingeführt worden ist. Ist nun ω der Inhalt eines solchen Querschnittes, v die Breite desselben an der durch u gegebenen Stelle, also $v\cdot du$ der Inhalt des Querschnittes von der Dicke du, so ist, wie wir im (§. 151.) für die Stange gesehen haben, und was auch für die Schiene gilt,

$$1)\qquad \int_{u=-(\varepsilon')}^{u=\varepsilon} v\cdot du = \omega;$$

aber auch, weil u vom Schwer-Punkt aus anfängt,

$$2)\qquad \int_{u=-(\varepsilon')}^{u=\varepsilon} vu\cdot du = 0.$$

Haben nun σ, σ', δ, δ' und ϱ dieselben Bedeutungen, wie in den (§§. 145. 146.), bedeuten aber γ, γ' und r das was σ, σ' und

ϱ im natürlichen Zustande der Schiene sind, so hat man ganz so wie dort

$$3)\quad \sigma' = \sigma + \frac{u\cdot\sigma}{\varrho};\qquad \gamma' = \gamma + \frac{u\cdot\gamma}{r};$$

$$4)\quad \sigma' = \gamma'(1+\delta');\qquad \sigma = \gamma(1+\delta);$$

und aus diesen Gleichungen folgt, wenn man wieder die Produkte zweier sehr kleinen Faktoren außer Acht läßt,

$$5)\quad \delta' = \delta + u\cdot\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right),$$

welcher Werth von δ' mit dem des (§. 145.) übereinstimmt, sobald $r = \infty$ gesetzt wird, wie solches seyn muß.

Haben nun wieder p, T und u_1 dieselbe Bedeutung, wie im (§. 146.), so hat man wieder, wie im (§. 151.)

$$6)\quad T = p\cdot\int_{s\div(-s)} \delta' v\cdot du$$

und $$7)\quad T\cdot u_1 = p\cdot\int_{s\div(-s)} \delta' vu\cdot du,$$

wo jedoch p an jedem andern Punkte μ der Kurve $\alpha\mu\nu\beta$ einen andern Werth haben kann, jedenfalls aber eine von der Natur der Schiene oder Stange abhängige Verhältnißzahl ist. Setzt man statt δ' seinen Werth aus (5.) und zugleich

$$8)\quad \int_{s\div(-s)} vu^2\cdot du = \tfrac{1}{3}\omega\cdot f^2,$$

so wird

$$9)\quad T = p\omega\delta$$

und $$10)\quad T\cdot u_1 = \tfrac{1}{3}p\omega\cdot f^2\cdot\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right);$$

wo wiederum $T\cdot u_1$ das Moment der Elasticität genannt wird.

Bedeuten endlich x, y die Koordinaten-Werthe des Punktes μ, im Falle die Schiene oder Stange mit den an β wirkenden Kräften im Gleichgewicht ist, und sind ξ und η die Koordinaten-Werthe ihres End-Punktes β, so findet jetzt wieder die Gleichung (§. 146. XI.) statt, nämlich

$$11)\quad T\cdot u_1 + (\eta - y)\cdot P - (\xi - x)\cdot Q = 0,$$

wenn nur jetzt wieder P und Q die mit den Axen parallel wirkenden Kräfte an β vorstellen, so daß man nur noch statt $T\cdot u_1$

seinen Werth aus (10.) substituiren muß, um die Differential-Gleichung der neuen Kurve zu haben.

Weil sich aber diese Gleichung (11.) von der (XI. des §. 146.) nur dadurch unterscheidet, daß der Werth von $T \cdot u_1$ hier ein anderer ist als dort; und da sich diese Werthe von $T \cdot u_1$ nur dadurch von einander unterscheiden, daß hier f^2 statt dort ε^2 und hier $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}$ statt dort $\frac{1}{\varrho}$ steht, so kann man die dortige weitere Rechnung leicht auf den hiesigen Fall übertragen.

§. 154.

Gehen wir jetzt zur allgemeinsten Aufgabe, wo eine elastische Schiene oder Stange im natürlichen Zustande irgend eine Gestalt hat, gerade oder gekrümmt, und nun auf jeden Atom derselben beliebige Kräfte wirken, welche sie krümmen und auch drehen, d. h. ihre Fasern um die mittlere herumwinden, bis die Elasticität der Stange ihnen das Gleichgewicht hält; und nun die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, also auch die Figur der Feder im Gleichgewicht gesucht werden.

I. Es seyen (Fig. 69.) A und B die beiden Enden der elastischen Stange im Gleichgewicht; und AMmB die Kurve, in welcher die Schwer-Punkte aller normalen Querschnitte ω liegen. Man denke sich drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY und OZ beliebig gelegt, und es seyen x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der Kurve AMmB, im Falle des Gleichgewichts; der Bogen AM sey durch s bezeichnet, und indem die Koordinaten eines unendlich nahe darauf folgenden Punktes m der Kurve durch $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ bezeichnet werden, sey $Mm = ds$. — Ist nun γ die Dichtigkeit des Querschnittes ω, so ist $\gamma\omega \cdot ds$ die Masse der unendlich dünnen Scheibe s, welche von zwei durch M und m gelegten Querschnitten gebildet wird. Bezeichnet man nun die nach den Koordinaten-Axen zerlegten, auf die Masse $\gamma\omega \cdot ds$ wirkenden Kräfte bezüglich durch

1) $\quad X\gamma\omega \cdot ds, \quad Y\gamma\omega \cdot ds, \quad Z\gamma\omega \cdot ds,$

so sind X, Y, Z die Kräfte, welche bezüglich hervorgehen müßten, wenn alle Theile $\gamma\omega\cdot ds$ der Massen-Einheit von denselben Kräften (mit den Axen parallel) angegriffen würden, von welchen der Schwer-Punkt der Masse $\gamma\omega\cdot ds$ angegriffen gedacht wird, und wenn man alle diese parallelen Kräfte (durch Addition) in eine einzige vereinigte. — Die rückwirkenden Kräfte der Elasticität kann man auf zweie zurückführen, nämlich 1) auf die Kraft T, welche wir in den vorhergehenden (§§.) allein zu berücksichtigen hatten, und welche die mittlere Kraft ist aus allen parallelen- und auf den Querschnitt ω senkrechten Kräften, mit welchen sich die durch die wirkenden Kräfte verlängerten oder verkürzten Fasern der Feder verkürzen oder verlängern wollen, um ihren natürlichen Zustand wieder anzunehmen; und dann noch 2) die Kräfte, mit welchen dieselben Fasern auch noch um die mittelste AMmB gedreht (gewunden) sind, und mit welchen sie sich wieder aufwinden wollen, um in ihren natürlichen Zustand zurück zu treten. Diese letzteren Kräfte denken wir uns immer in Querschnitten wirkend, welche auf der Kurve AMmB senkrecht stehen.

II. Bringt man nun die unendlich dünne Scheibe S, deren Grenzflächen durch M und m gehen, in's Gleichgewicht, so erhält man sechs Gleichungen des Gleichgewichts; und statt einer dieser Gleichungen kann man die Summe aller in der Richtung Mm wirkenden Kräfte gleich Null setzen. In dieser Gleichung kommen dann die unter (2.) angeführten Kräfte gar nicht vor, sondern nur die Kräfte $-T$, $T+dT$ senkrecht auf die durch M und m gelegten Querschnitte und noch die Kräfte

$$X\gamma\omega\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot ds,\quad Y\gamma\omega\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\cdot ds,\quad Z\gamma\omega\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\cdot ds;$$

und diese Gleichung wird daher

$$2)\quad \begin{cases} dT+\gamma\omega(X\cdot dx+Y\cdot dy+Z\cdot dz)=0, \\ \text{oder} \\ \partial T+\gamma\omega(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)=0, \end{cases}$$

indem man x, folglich auch y, z und T als Funktionen eines

beliebigen neuen Veränderlichen t sich denkt, nach welchem die Ableitungen oder Differenzial-Koefficienten genommen sind.

Aus dieser einzigen Gleichung des Gleichgewichts kann man in dem Falle schon T finden, in x, y, z ausgedrückt, in welchem die Funktion

3) $$\gamma\omega\cdot(X\cdot\partial x+Y\cdot\partial y+Z\cdot\partial z)$$

integrabel ist, wobei man die Dichtigkeit γ und den Querschnitt ω so nehmen muß, wie beide in dem gewaltsam veränderten Zustande der Feder sind, wobei man aber auch, weil die Unterschiede so sehr gering nur sind, statt γ und ω die Dichtigkeit und den Querschnitt setzen kann, wie solche im natürlichen Zustande der Feder gewesen sind.

Denkt man sich aber, daß die Länge ds im natürlichen Zustande bei dem Uebergang in den gewaltsam Veränderten, in dem Verhältniß 1 zu $1+\delta$ sich verändert hat, so ist (nach §. 146. VI.) noch

4) $$T = p\omega\delta,$$

wo p eine, dort näher beschriebene Verhältnißzahl ist. Vergleicht man dann beide Werthe von T mit einander, so bekommt man eine Gleichung, welche δ, d. h. die Ausdehnung oder Zusammenziehung des Elementes ds finden läßt, in x, y und z ausgedrückt *).

---

*) Poisson hat in dem Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (in den Mémoires de l'Académie des Sciences T. VIII.) zu zeigen sich bemüht, daß wenn ds sich verlängert, dann ω kleiner, dagegen der Inhalt $\omega\cdot ds$ größer und nur die Dichtigkeit γ kleiner wird; daß aber von allem diesem daß entgegengesetzte statt findet, so oft ds sich nicht verlängert, sondern verkürzt. Er folgert daraus, daß, wenn eine homogene prismatische oder cylindrische Stange, an dem einen Ende befestigt, an dem andern Ende aber von einer Kraft P gezogen wird, in der Richtung der Verlängerung der Länge, dann solche eine Ausdehnung und zugleich auch eine Inhalts-Vermehrung erleidet, welche mit P proportional sind. Dies soll auch die Erfahrung bestätigen. Umgekehrt: drückt man mit der Kraft P die Feder zusammen, so daß sie eine Verkürzung erleidet, ohne sich zu biegen, so vermindert sich ihr Inhalt ebenfalls mit P proportional.

III. Um weitere Gleichungen des Gleichgewichts zu bekommen, denkt man sich den Theil AM der Feder absolut fest, dagegen den andern Theil MB noch im Gleichgewichts-Zustand als Feder. Alle Theile des von M bis m gehenden Stückchens S der Feder, welche um die Gerade Mm gewunden sind, wollen sich zurück winden; und τ sey die Summe der zur Axe Mm gehörigen statischen Momente, welche diese Rückwindungs-Kräfte (I. 2.) haben, so sind

5) $$-\tau\cdot\frac{\partial x}{\partial s},\quad -\tau\cdot\frac{\partial y}{\partial s},\quad -\tau\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

die Summe der statischen Momente derselben Kräfte in Bezug auf die durch M mit den Koordinaten-Axen OX, OY, OZ parallel gelegten Axen, als Axen der Momente genommen.

Denkt man sich nun an M die Osculations-Ebene (d. h. die Ebene, in welcher der Krümmungs-Kreis und der Krümmungs-Halbmesser liegen) und senkrecht darauf durch M eine Gerade als Momenten-Axe (vgl. §. 27. Nr. 3. 4.) und bezeichnen r und ϱ die Krümmungs-Halbmesser vor und nach der gewaltsamen Veränderung der elastischen Stange oder Feder, so ist das statische Moment $T\cdot u_1$ der parallel mit Mm wirkenden Kraft T (in I. oder in II., nach §. 153.), wenn solches durch μ bezeichnet wird, ausgedrückt durch die Gleichung

6) $$\mu = \beta\cdot\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\right),$$

wo $\beta = \frac{1}{2}p\omega\cdot f^2$ (im §. 151.) ausgedrückt sich findet, übrigens positiv und vom Querschnitt ω, so wie von der Natur der Feder abhängig, und (im §. 151.) durch q bezeichnet ist. Sind daher x'', x' und x die Winkel, welche die Axe dieses Moments mit den drei Koordinaten-Axen (d. h. mit den durch M mit OX, OY, OZ gelegten Parallelen) macht, so sind

7) $$\mu\cdot\cos x'',\quad \mu\cdot\cos x',\quad \mu\cdot\cos x$$

das nach diesen drei letztern Axen zerlegte Moment der Elasticität μ, d. h. die Projektionen des Moments μ, auf die drei Ebenen YOZ, XOZ und XOY.

Bezeichnet man durch X_1, Y_1, Z_1 die Summe der statischen Momente (in Bezug auf dieselben Momenten-Axen) aller auf die Feder von M bis B hin wirkenden Kräfte, und bedeuten γ', ω', X', Y', Z' das was aus den Ausdrücken γ, ω, X, Y, Z wird, wenn in letzteren statt x, y, z bezüglich die Koordinaten-Werthe x', y', z' eines beliebigen Punktes M' des Stückes MB der Kurve gesetzt werden, so findet sich, wenn L die Länge der ganzen Kurve AMM'B vorstellt,

$$8)\quad Z_1 = \int_{L-s}^{L} \left[Y'\cdot(x'-x) - X'\cdot(y'-y)\right]\cdot\gamma'\omega'\cdot ds';$$

$$9)\quad X_1 = \int_{L-s}^{L} \left[X'\cdot(z'-z) - Z'\cdot(x'-x)\right]\cdot\gamma'\omega'\cdot ds';$$

$$10)\quad Y_1 = \int_{L-s}^{L} \left[Z'\cdot(y'-y) - Y'\cdot(z'-z)\right]\cdot\gamma'\omega'\cdot ds';$$

Wirken nun noch auf das freie Ende B des Stücks MB die Kräfte P, Q, R mit den Axen OX, OY, OZ parallel, und zwar nicht in B, dessen Koordinaten-Werthe a, b, c seyn mögen, selbst, sondern an einem andern mit B festen Punkte (a', b', c') außerhalb der Feder, so sind die statischen Momente dieser Kräfte, in Bezug auf dieselben Momenten-Axen bezüglich

$$11)\quad Q\cdot(a'-x) - P\cdot(b'-y),$$

$$12)\quad P\cdot(c'-z) - R\cdot(a'-x),$$

$$13)\quad R\cdot(b'-y) - Q\cdot(c'-z);$$

oder, wenn man

$$14)\quad Q\cdot(a'-a) - P\cdot(b'-b) = R_1,$$

$$15)\quad P\cdot(c'-c) - R\cdot(a'-a) = Q_1,$$

$$16)\quad R\cdot(b'-b) - Q\cdot(c'-c) = P_1$$

setzt, bezüglich dieses:

$$17)\quad Q\cdot(a-x) - P\cdot(b-y) + R_1,$$

$$18)\quad P\cdot(c-z) - R\cdot(a-x) + Q_1,$$

$$19)\quad R\cdot(b-y) - Q\cdot(c-z) + P_1.$$

Die Ausdrücke P_1, Q_1, R_1 sind die statischen Momente der Kräfte P, Q, R in Bezug auf die durch B mit OX, OY, OZ parallel gelegten Momenten-Axen. Sind daher α', β', γ' die Winkel, welche das Element der Kurve AMB bei B mit den drei Axen OX, OY, OZ macht, so daß

20) $\cos\alpha', \quad \cos\beta', \quad \cos\gamma'$

die Werthe von $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ sind, wenn a, b, c statt x, y, z gesetzt werden; und setzt man noch

21) $P_1 \cdot \cos\alpha' + Q_1 \cdot \cos\beta' + R_1 \cdot \cos\gamma' = N,$

so ist N das statische Moment der Kräfte P, Q, R in Bezug auf das Bogen-Element der Kurve AMB bei B als Momenten-Axe genommen; also der Werth von τ, wenn a, b, c statt x, y, z gesetzt werden.

Für das Gleichgewicht des Stückes MB der Feder hat man nun wieder sechs Gleichungen, sobald wir sie im Gleichgewicht von m an bis B hin als fest ansehen; von denen die drei Momenten-Gleichungen folgende sind, nämlich:

22) $\mu \cdot \cos\alpha'' - \tau \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + X_1 + P_1 + R \cdot (b - y) - Q \cdot (c - z) = 0,$

23) $\mu \cdot \cos\alpha' - \tau \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + Y_1 + Q_1 + P \cdot (c - z) - R \cdot (a - x) = 0,$

24) $\mu \cdot \cos\alpha - \tau \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + Z_1 + R_1 + Q \cdot (a - x) - P \cdot (b - y) = 0,$

wo (nach §. 16. Geom. I. Th.)

25) $\cos\alpha'' = \frac{\partial y \cdot \partial^2 z - \partial z \cdot \partial^2 y}{W},$

26) $\cos\alpha' = \frac{\partial z \cdot \partial^2 x - \partial x \cdot \partial^2 z}{W},$

27) $\cos\alpha = \frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{W}$

ist, sobald W^2 die Summe der Quadrate der drei Zähler vorstellt.

Differenzirt man nun, um μ zu eliminiren, diese Gleichungen (22. — 24.), multiplizirt man sie bezüglich mit $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ und $\frac{\partial z}{\partial s}$, und werden sie zuletzt zu einander addirt, so erhält man, wegen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0,$$

und, weil auch nach (25. — 27.)

28) $\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial(\mu\cdot\cos x'')+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial(\mu\cdot\cos x')+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\partial(\mu\cdot\cos x)=0,$

ist, sogleich das nachstehende Resultat, nämlich

29) $\partial\tau=\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\partial X_1+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\partial Y_1+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\partial Z_1.$

Weil aber aus (8. — 10.)

30) $\partial X_1=\partial z\cdot\int_{L\div s}Y'\gamma'\omega'\cdot ds'-\partial y\cdot\int_{L\div s}Z'\gamma'\omega'\cdot ds',$

31) $\partial Y_1=\partial x\cdot\int_{L\div s}Z'\gamma'\omega'\cdot ds'-\partial z\cdot\int_{L\div s}X'\gamma'\omega'\cdot ds',$

32) $\partial Z_1=\partial y\cdot\int_{L\div s}X'\gamma'\omega'\cdot ds'-\partial x\cdot\int_{L\div s}Y'\gamma'\omega'\cdot ds'$

hervorgeht, so ergiebt sich, wenn man diese Werthe in die (29.) substituirt,

33) $\partial\tau=0,$ also $\tau=constante.$

Das Moment des Zurückwindens ist daher in der ganzen Länge einer elastischen Stange, von welchen Kräften sie auch an verschiedenen Punkten angegriffen seyn mag, konstant und gerade so wie an beiden Enden. An dem Ende B ist aber dasselbe Moment, $=N$ (aus 21.), wie vorher schon gezeigt worden, und wie auch aus denselben Gleichungen (22. — 24.) hervorgeht, wenn man daselbst bezüglich a, b, c statt x, y, z substituirt. Denn es werden dann die Integrale X_1, Y_1 und Z_1 der Null gleich, und man erhält, weil die Werthe von $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ zu gleicher Zeit bezüglich in $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ übergehen

34) $\tau\cdot\cos\alpha'=\mu\cdot\cos x''+P_1,$

35) $\tau\cdot\cos\beta'=\mu\cdot\cos x'+Q_1,$

36) $\tau\cdot\cos\gamma'=\mu\cdot\cos x+R_1,$

wo aber x, x' und x'' jetzt als dem Punkte B angehörig angesehen werden müssen, so daß, weil die durch α', β', γ' gegebene Tangente an B mit der durch x'', x', x gegebenen, auf die

Krümmungs-Ebene bei B senkrechten Geraden einen rechten Winkel bilden,

$$\cos\alpha^{l}\cdot\cos x^{ll} + \cos\beta^{l}\cdot\cos x^{l} + \cos\gamma^{l}\cdot\cos x = 0$$

seyn muß. Multiplizirt man daher diese drei Gleichungen bezüglich mit $\cos\alpha^{l}$, $\cos\beta^{l}$, $\cos\gamma^{l}$ und addirt man solche, so eliminirt sich μ abermals und man erhält

$$\tau = N,$$

gerade wie solches kurz vorher so erkannt worden *).

Uebrigens reichen zwei der drei Gleichungen (22. — 24.), wenn man statt μ und τ ihre Werthe substituirt, aus, um y und z in x, also um die Gleichungen der Kurve zu geben.

§. 155.

Ist die Stange in ihrem natürlichen Zustande gerade, und liegen die Richtungen aller Kräfte, welche auf sie wirken, in einer und derselben Ebene, so reduciren sich die drei Gleichungen (22. — 24.) auf eine einzige, sobald statt μ und τ ihre Werthe gesetzt sind, und wenn man die Ebene der Kräfte zur Ebene der Koordinaten-Axen OX und OY genommen hat. Diese Gleichung ist dann die Gleichung der ebenen Kurve, welche die Mittel-Linie der Stange bildet. Man hat dann

*) Poisson hat in dem oben angeführten Memoire gezeigt, daß die Windung selbst, obgleich ihr statisches Moment τ immer ein und dasselbe bleibt, von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich ist, je nachdem die Materie der Feder oder der Querschnitt selbst sich verändert. Ist die Stange homogen und der Querschnitt in der ganzen Länge der elastischen Stange constant, so ist der Unterschied der Winkel der Windungen zwischen den beiden Enden eines Stückes der Stange, mit der Länge dieses Stückes proportional. — Nimmt man also z. B. an, daß eine prismatische oder cylindrische und homogene gerade Stange an ihrem einen Ende eingeklemmt sey, am andern Ende aber von einem Gegen-Paar, welches gegen die Mittel-Linie ganz gleichmäßig liegt angegriffen, also gewunden werde, so wird die Stange gerade bleiben, das Moment ihrer Windung wird das oben gefundene $\tau = N$ seyn, und die Windung selbst wird mit ihrer Länge proportional seyn. — Außerdem fand Poisson noch, daß wenn der Querschnitt dieser Stange ein Kreis ist, dann die Größe der Windung unter übrigens gleichen Umständen, mit der vierten Potenz des Durchmessers dieses Querschnittes proportional ist; welches mit den Erfahrungen übereinstimmen soll.

$$z = 0, \quad \cos x'' = 0, \quad \cos x' = 0,$$
$$c = 0, \quad c' = 0, \quad R = 0 \text{ und } \cos\gamma' = 0;$$

also auch

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad P_1 = 0, \quad Q_1 = 0 \text{ und } \tau = N = 0,$$

und die Gleichungen (22. und 23.) werden identisch; die Gleichung (24.) allein bleibt als Gleichung der Kurve. Und weil dasmal $r = \infty$ vorausgesetzt ist, so wird $\mu = \frac{\beta}{\varrho}$, und mit Rücksicht auf die Richtung der Wirkung von T im (§. 146.) findet sich noch $\cos x = -1$, und die Gleichung (24.) der Kurve wird daher

$$1) \quad \int_{L \div s} \left[Y' \cdot (x' - x) - X' \cdot (y' - y)\right] \cdot \gamma' \omega' \cdot ds'$$
$$+ R_1 + Q \cdot (a - x) - P \cdot (b - y) = \frac{\beta}{\varrho},$$

während (nach §. 153. und §. 154. Nr. 6.)

$$2) \quad \beta = p \cdot \int_{\varrho \div (-s)} v \cdot u^2 \cdot du$$

ist *).

Schafft man aus der (1.) durch Differenziiren das Integralzeichen fort, so erhält man eine Differenzial-Gleichung der Kurve, welche im Allgemeinen von der vierten Ordnung seyn wird. —

Weil aber, wenn die Feder im Gleichgewicht ist, das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man sich solche als einen festen und unveränderlichen Körper denkt, so folgt, daß außer der Gleichung (1.) auch noch die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts des (§. 26.) oder des (§. 29.) statt finden müssen, welche sich jedoch in unserm gegenwärtigen Falle, wo alle Kräfte in einer und derselben Ebene wirken, auf die drei Gleichungen des (§. 36.) zurückziehen. Sind daher D, E und F_1

*) Nimmt man hier $X = Y = 0$, und läßt man a', b' mit a, b zusammenfallen, so reducirt sich diese Gleichung genau auf die Gleichung der Kurve (im §. 146. oder §. 151.), wie solches auch seyn muß. Hier bedeutet nämlich β genau dasselbe, was dort (im §. 146.) durch q bezeichnet worden ist.

die Kräfte und das Moment derselben in Bezug auf den Anfangs-Punkt A, also dasselbe, was bezüglich P_1, Q und R_1 in Bezug auf den End-Punkt B der Feder sind, so sind diese drei letzt erwähnten Gleichungen des Gleichgewichts

$$3) \qquad D + P + \int_{L\div 0} X' \cdot \gamma' \cdot \omega' \cdot ds' = 0,$$

$$4) \qquad E + Q + \int_{L\div 0} Y' \cdot \gamma' \cdot \omega' \cdot ds' = 0,$$

$$5) \qquad F_1 + R_1 + Q \cdot (a - x) - P \cdot (b - y) + \int_{L\div 0} \left[Y' \cdot (x' - x) - X' \cdot (y' - y) \right] \gamma' \cdot \omega' \cdot ds' = 0,$$

wenn nur unter x und y durchweg die Koordinaten-Werthe des Anfangs-Punktes A verstanden werden. In diese Gleichungen (3. — 5.) gehen nur lauter konstante Werthe ein; solche dienen also nur zur Bestimmung der Konstanten. Ist A wie B ganz frei, so sind D, E, P, Q, F_1 und R_1 gegeben. Ist die Stange in A eingeklemmt, so sind D, E und F_1 unbestimmt, wohl aber sind für den Punkt A die Werthe von x, y und ∂y_x bekannt. Ist die Stange nicht eingeklemmt, sondern in A bloß fest, so sind die Kräfte D und E noch immer unbestimmt, aber es ist ihr Moment $F_1 = 0$, weil die mittlere Kraft aus D und E dem Druck an A gleich und entgegen seyn muß. In diesem Falle sind für denselben Punkt A zwar immer noch x und y, aber nicht mehr ∂y_x bekannt. — Das ganz analoge gilt für den Punkt B.

§. 156.

Setzen wir z. B. eine homogene, prismatische oder cylindrische, in ihrem natürlichen Zustande gerade Stange voraus, so sind γ, ω und β konstant. Es sollen auf dieselbe bloß Kräfte wirken, welche auf ihrer Länge senkrecht sind, und welche sie sehr wenig krümmen. Nimmt man dann zur Axe OX die Mittel-Linie der Stange, so hat man

$$6) \qquad D = 0, \quad X = 0 \text{ und } P = 0,$$

und die Gleichung (3.) wird identisch. Da ∂y_x, die Voraus-

setzung gemäß, so sehr klein ist, daß man ∂y_x^2 außer Acht lassen kann, so hat man jetzt

$$7) \qquad \partial s_x = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho} = \partial^2 y_x;$$

und die Gleichung (1.) wird daher nun

$$8) \qquad \beta \cdot \partial^2 y_x = R_1 + Q \cdot (a - x) + \gamma\omega \cdot \int_{L \div s} Y' \cdot (x' - x) \cdot ds'.$$

Differenziirt man solche Gleichung (8.) einmal nach x, so erhält man *)

$$9) \qquad \beta \cdot \partial^3 y_x = -Q - \gamma\omega \cdot \int_{L \div s} Y' \cdot ds';$$

und wird diese noch einmal differenziirt, so ergiebt sich **)

10)

*) Setzt man nämlich

$$1') \qquad \int Y' \cdot (x' - x) \cdot ds' = f_{s',x}$$

wo x', y', Y' als Funktionen von s' angesehen werden müssen, so ist

$$2') \qquad \partial f_{s'} = Y'(x' - x),$$

und

$$3') \qquad \partial (f_{s'})_x = -\int Y' \cdot ds'.$$

Folglich ist auch

$$4') \qquad \int_{L \div s} Y' \cdot (x' - x) \cdot ds' = f_{L,x} - f_{s,x};$$

demnach auch

$$5') \qquad \partial \Big[\int_{L \div s} Y' \cdot (x' - x) \cdot ds' \Big]_x = \partial (f_{L,x})_x - \partial (f_{s',x})_{(x)}$$
$$= \partial (f_{L,x} - f_{s',x})_x - \partial f_s \cdot \partial s_x.$$

Nun ist aber $\partial (f_{L,x} - f_{s,x})_x$ nichts weiter als $\partial (f_{s'})_x$ zwischen den Grenzwerthen s und L von s'; also (nach 3'.)

$$6') \qquad \partial (f_{L,x} - f_{s,x})_x = -\int_{L \div s} Y' \cdot ds';$$

während ∂f_s das ist, was aus $\partial f_{s'}$ in (2'.) wird, wenn man s statt s', also x statt x' setzt; und dies ist, weil dann $(x' - x)$ in Null übergeht, selbst der Null gleich. Deshalb ist aus (5'.)

$$\partial \Big[\int_{L \div s} Y' \cdot (x' - x) \cdot ds' \Big]_x = -\int_{L \div s} Y' \cdot ds'.$$

**) Wird nämlich

$$1'') \qquad \int Y' \cdot ds' = \psi_{s'}$$

gesetzt, so hat man

$$2'') \qquad \int_{L \div s} Y' \cdot ds' = \psi_L - \psi_s \quad \text{und} \quad \partial \psi_s = [\partial \psi_{s'}]_s = Y;$$

folglich ist auch

$$3'') \qquad \partial \Big[\int_{L \div s} Y' \cdot ds' \Big]_x = -\partial (\psi_s)_x = -\partial \psi_s \cdot \partial s_x = -Y \cdot \partial s_x.$$

10) $\beta \cdot \partial^4 y_x = \gamma\omega Y \cdot \partial s_x = \gamma\omega Y,$

in so ferne bei der jetzigen Voraussetzung $\partial s_x = 1$ ist.

Da die Werthe von y aus der Gleichung (10.) auch den beiden Gleichungen (9. u. 8.) genügen müssen, so bestimmen sich dadurch zwei der vier durch die Integration eingehenden Konstanten; die beiden andern dieser Konstanten aber aus den Bedingungen, welche man über die Lage der End-Punkte der elastischen Stange gegeben hat. Weil aber den Gleichungen (9. und 8.) für jeden Werth von x genügt seyn muß, und daher die x sich von selbst heraus heben und nur die Gleichungen zwischen den Konstanten übrig bleiben werden, so wird man diese letztern eben so gut erhalten, wenn man den Gleichungen (9. und 8.) nur für $x = a$ oder für $x = \xi$ zu genügen sucht. Für $x = a$, also für den End-Punkt B, gehen diese Gleichungen (9. und 8.), weil dann $s = L$ ist, in

11) $\beta \cdot [\partial^3 y_x]_a = -Q$ und $\beta \cdot [\partial^2 y_x]_a = R_1$

über. Für $x = \xi$ dagegen, wenn ξ die Abscisse des Punktes A vorstellt, werden solche bezüglich, weil jetzt $s = 0$ ist, wegen der Gleichungen (4. und 5.)

12) $\beta \cdot [\partial^3 y_x]_\xi = E$ und $\beta \cdot [\partial^2 y_x]_\xi = -F_1.$

Jedes dieser beiden Paare von Gleichungen (11. oder 12.) genügt nun zur Bestimmung der beiden Konstanten; allein jedes ist mit dem andern zugleich vorhanden, so daß man aus allen vier Gleichungen doch nicht mehr als zwei Konstanten bestimmen kann.

§. 157.

Denken wir uns den Fall des vorigen (§. 156.), also die Axe OX horizontal, und die Feder nur sehr wenig gekrümmt, so daß $\partial s_x = 1$ und $1 + \partial y_x^2 = 1$ ist, — nehmen wir aber jetzt noch an, daß statt aller Kräfte, die auf die Masse $\gamma\omega \cdot ds$ wirken, bloß ihr Gewicht $g\gamma\omega \cdot ds$ genommen werde; so hat man in den Formeln des (§. 156.) bloß $Y = g$ zu setzen. Die Gleichung der Kurve (§. 156. Nr. 10.) wird nun

1) $$\beta \cdot \partial^4 y_x = \gamma\omega g.$$

Integrirt man selbige vier mal hinter einander, so erhält man, wenn in A für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn soll,

2) $$\beta \cdot y = \frac{\gamma\omega g}{24} x^4 + C \cdot x^3 + C' \cdot x^2 + C'' x.$$

Um die drei Konstanten C, C′ und C″ zu bestimmen, wollen wir annehmen, daß die elastische Stange in A eingeklemmt sey, so daß für $x = 0$ auch $\partial y_x = 0$ werde. Differenziirt man daher die (2.), um

3) $$\beta \cdot \partial y_x = \tfrac{1}{6}\gamma\omega g \cdot x^3 + 3C \cdot x^2 + 2C' \cdot x + C''$$

zu erhalten, so giebt diese Bedingung $C'' = 0$ und die Gleichung (2.) der Kurve wird nun

4) $$\beta \cdot y = \frac{\gamma\omega g}{24} \cdot x^4 + C \cdot x^3 + C' \cdot x^2.$$

Wird nun ferner vorausgesetzt, daß Q unmittelbar in B angebracht sey, so hat man $R_1 = 0$; und die Gleichungen (§. 156. Nr. 11.) geben nun, weil die (4.), hinter einander differenziirt, zu

5) $$\begin{cases} \beta \cdot \partial y_x = \tfrac{1}{6}\gamma\omega g \cdot x^3 + 3C \cdot x^2 + 2C' \cdot x, \\ \beta \cdot \partial^2 y_x = \tfrac{1}{2}\gamma\omega g \cdot x^2 + 6C \cdot x + 2C', \\ \beta \cdot \partial^3 y_x = \gamma\omega g \cdot x + 6C \end{cases}$$

führt,

6) $$\gamma\omega g a + 6C = -Q,$$

7) $$\tfrac{1}{2}\gamma\omega g a^2 + 6aC + 2C' = 0.$$

Ist nun q das Gewicht der Stange, so daß man

8) $$q = \gamma\omega g a, \quad \text{also} \quad \gamma\omega g = \frac{q}{a}$$

hat; findet man ferner aus (6. und 7.) C und C′, und substituirt man diese Werthe in die Gleichung (4.) der Kurve, so erhält man zuletzt als Gleichung der Kurve

9) $$\beta \cdot y = \tfrac{1}{24} \cdot \frac{q}{a} \cdot x^4 - \tfrac{1}{6}(Q + q) \cdot x^3 + \tfrac{1}{2}(Q + \tfrac{1}{2}q) a \cdot x^2;$$

und diese fällt genau mit der Gleichung (§. 148. Nr. 8.) zusammen, wenn man hier das Gewicht q der Stange $= 0$ setzt.

und dabei bedenkt, daß das, was hier durch β bezeichnet worden, daselbst durch q bezeichnet ist.

Die Gleichung (9.) giebt nun für $x = a$ und $Q = 0$, d. h. wenn am Ende B keine Kraft wirkt und nur das Gewicht q der ganzen Stange an den einzelnen Stellen derselben vertheilt, die Biegung der Feder, d. h. die Abweichung des End-Punktes von der Horizontalen OX, nämlich

$$b = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{q}{\beta} \cdot a^3.$$

Ist aber nicht $Q = 0$, sondern $q = 0$, d. h. denkt man sich den Fall des (§. 148.) wieder, so wird aus (9.), so wie dort im (§. 148.) bereits gefunden worden,

$$b = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Q}{\beta} \cdot a^3.$$

Daher verhalten sich diese zwei Abweichungen des End-Punktes B vom Horizont OX in beiden gedachten Fällen, wie $\frac{1}{8}q$ zu $\frac{1}{3}Q$, oder wie 3q zu 8Q; und daher auch wie 3 zu 8, sobald man $Q = q$ sich denkt.

§. 158.

Denken wir uns dieselbe Stange in A und in B fest gemacht, so daß für $x = 0$ und auch für $x = a$ allemal $y = 0$ werden soll, so bestimmt sich hieraus zunächst die Gleichung (2.) der Kurve so, nämlich:

$$10) \quad \beta \cdot y = \tfrac{1}{24} \cdot \frac{q}{a} \cdot x \cdot (x^3 - a^3) + Cx \cdot (x^2 - a^2) + C'x \cdot (x - a).$$

I. Ist nun die Stange an beiden Enden A und B eingeklemmt in der Richtung von OX, so daß für $x = 0$ und für $x = a$ jedesmal $\partial y_x = 0$ werden muß, so bestimmt sich hieraus, weil die Gleichung (10.), wenn man sie differenzirt,

$$11) \quad \beta \cdot \partial y_x = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{q}{a} \cdot (x^3 - \tfrac{1}{4}a^3) + C \cdot (3x^2 - a^2) + C' \cdot (2x - a)$$

giebt, und wenn man hier $x = 0$ und $\partial y_x = 0$, dann aber $x = a$ und $\partial y_x = 0$ setzt, die beiden entstehenden Gleichungen aber nach C und C' auflöst,

$$C = -\tfrac{1}{12}q \quad \text{und} \quad C' = \tfrac{1}{24}aq;$$

und die Gleichung (10.) wird nun

$$12) \qquad \beta \cdot y = \tfrac{1}{24}\frac{q}{a} \cdot x^2 \cdot (x-a)^2$$

als Gleichung der Kurve in diesem Falle.

Hieraus findet sich die Ordinate f der Mitte der Kurve (für $x = \frac{1}{2}a$)

$$f = \frac{q \cdot a^3}{16 \cdot 24 \cdot \beta};$$

und da für $x = \frac{1}{2}a$ die Gleichung (11.) $\partial y_x = 0$ dazu liefert, so ist diese Ordinate f zu gleicher Zeit die längste, oder der Pfeil der Kurve.

II. Denken wir uns noch einmal wie in (I.) die Stange an beiden Enden fest, aber an keiner Seite eingeklemmt, so daß man den Werth von ∂y_x nicht kennt, weder für $x = 0$, noch für $x = a$, so sind die Kräfte E und Q in entgegengesetzten Richtungen genommen, bezüglich die Drucke, welche die Punkte A und B auszuhalten haben, und die Momente F_I und R_I sind der Null gleich. Die Gleichungen (§. 156. Nr. 11. und 12.) geben daher jetzt

$\partial^2 y_x = 0$, sowohl wenn $x = 0$, als auch wenn $x = a$ ist. Differenziirt man daher die (11.) noch einmal, um

$$13) \qquad \beta \cdot \partial^2 y_x = \tfrac{1}{2}\frac{q}{a} \cdot x^3 + 6Cx + 2C'$$

zu erhalten, und setzt man hier zuerst $x = 0$ und $\partial^2 y_x = 0$, dann $x = a$ und $\partial^2 y_x = 0$, so erhält man

$$C = -\tfrac{1}{12}q \quad \text{und} \quad C' = 0.$$

Man hat also dann als Gleichung der Kurve

$$14) \qquad \beta \cdot y = \tfrac{1}{24}\frac{q}{a} \cdot x(a-x)(a^2+ax-x^2);$$

und die Ordinate f der Mitte, wo $x = \frac{1}{2}a$ ist, wird daher jetzt

$$f = \frac{5qa^3}{16 \cdot 24 \cdot \beta},$$

also das fünffache von dem, was sie im Falle (I.) gewesen ist.

Dabei ist wieder für $x = \frac{1}{2}a$ auch $\partial y_x = 0$; diese Ordinate f ist also die längste oder der Pfeil der Kurve. — Die Gleichungen (§. 156. Nr. 11. u. 12.) geben ferner

$$E = Q = -\tfrac{1}{2}q.$$

Dieselben Werthe haben auch in (I.) statt, und verstehen sich außerdem von selbst.

III. Denken wir uns endlich die elastische Stange an dem einen Ende A so eingeklemmt, daß für $x = 0$ auch noch $\partial y_x = 0$ wird, dagegen am andern Ende B bloß fest. Dann ist nur noch $\partial^2 y_x = 0$ für $x = a$. Die Konstanten C und C′ bestimmen sich daher nun dadurch, daß man in der (11.) $x = 0$ und $\partial y_x = 0$, in der (13.) dagegen $x = a$ und $\partial^2 y_x = 0$ setzt, beide neue Gleichungen aber nach C und C′ auflöst. Man findet

$$C = -\tfrac{5}{48}q \quad \text{und} \quad C' = \tfrac{1}{16}qa;$$

und die Gleichung der Kurve wird nun

$$15) \qquad \beta \cdot y = \tfrac{1}{48}\frac{q}{a} \cdot x^2(a-x)(3a-2x).$$

Für $x = \frac{1}{2}a$ wird die Ordinate f hieraus so:

$$f = \frac{q \cdot a^3}{8 \cdot 24 \cdot \beta};$$

allein für denselben Werth $x = \frac{1}{2}a$ ist dasmal nicht $\partial y_x = 0$; diese Ordinate f ist also dasmal nicht die längste.

Die Gleichungen (§. 156. Nr. 11. und 12.) geben zu gleicher Zeit

$$E = -\tfrac{5}{8}q \quad \text{und} \quad Q = -\tfrac{3}{8}q;$$

und es vertheilt sich also dasmal das Gewicht q der Stange ungleich auf beide festgehaltene Enden A und B derselben, und in dem Verhältniß wie 5 zu 3.

§. 159.

Betrachten wir noch die Aufgabe, wo die homogene, prismatische, elastische Stange an ihren Enden A und B noch immer in der Horizontalen OX fest gemacht und Anfangs gerade

nachgehends aber nur wenig gekrümmt ist, ganz so wie in den vorhergehenden (§§. 156. — 158.); während jedoch hier die einzelnen Massentheilchen $\gamma\omega\cdot ds$ mit beliebigen Gewichten beschwert sind, so daß noch immer

1) $$X = 0, \quad D = 0, \quad P = 0,$$

aber

2) $$\gamma\omega Y = \frac{q}{a}\cdot\varphi_x$$

gegeben seyn mag, wo φ_x eine beliebige Funktion von x vorstellt, welche jedoch für $x = 0$ und für $x = a$ der Null gleich seyn soll *). Der Buchstabe q soll die Summe aller dieser Gewichte vorstellen. so daß man noch dadurch

3) $$\int_{a\div 0}\varphi_x\cdot dx = a$$ **)

voraussetzt. Die Gleichung der Kurve (des §. 156. Nr. 10.) wird daher jetzt

4) $$\beta\cdot\partial^4 y_x = \frac{q}{a}\cdot\varphi_x;$$

und diese muß nun nach der verschiedenen Funktion φ_x, welche gegeben seyn muß, integrirt werden.

Das Problem scheint nun in dieser Allgemeinheit nicht weiter verfolgt werden zu können, weil die Integration der Gleichung (4.) eine bestimmt gegebene Funktion φ_x zu erfordern scheint; — und scheint mittelst der uns bekannten Mittel selbst

---

*) Man kann sich z. B. φ_x von der Form $x^m\cdot(x-a)^n\cdot\psi_x$ denken, wo ψ_x ganz willkührlich ist.

**) Nach der Annahme des (§. 154.), wie solche hieher übergegangen ist, bedeutet $\gamma\omega Y\cdot ds$ oder $\gamma\omega Y\cdot dx$ (in so ferne hier $\partial s_x = 1$ vorausgesetzt wird) die an der Masse $\gamma\omega\cdot ds$ oder $\gamma\omega\cdot dx$ der Stange wirkende Kraft. Dieselbe ist also jetzt $= \frac{q}{a}\varphi_x\cdot dx$, vorausgesetzt; deshalb ist aber

$$\int_{a\div 0}\frac{q}{a}\varphi_x\cdot dx, \quad \text{oder} \quad \frac{q}{a}\cdot\int_{a\div 0}\varphi_x\cdot dx$$

die Summe aller dieser von A bis B wirkenden Kräfte. Soll demnach letztere $= q$ werden, so muß man $\int_{a\div 0}\varphi_x\cdot dx = a$ nehmen.

dann nicht füglich weiter verfolgt werden zu können, wenn auch φ_x in einem bestimmten Falle bestimmt gegeben aber diskontinuirlich ist (d. h. z. B. von $x = 0$ an bis zu $x = m$ hin die eine bestimmte Funktion, von $x = m$ an bis zu $x = n$ hin eine andere, und von $x = n$ an bis zu $x = a$ hin eine dritte seyn soll, wo $m > 0$, $n > m$ und $a > n$ vorausgesetzt wird). Nun kann man sich aber die Funktion φ_x, so allgemein, wie sie hier gedacht ist, als eine nach Potenzen von x oder von $x - \alpha$ fortlaufende Reihe denken, deren Koefficienten unbestimmt sind, aber dieselben blieben, wenn φ_x continuirlich ist (d. h. von $x = 0$ bis $x = a$ hin eine und dieselbe Funktion bleibt); — deren Koefficienten jedoch von $x = 0$ an bis $x = m$ hin zwar dieselben blieben, wenn die Funktion φ_x von $x = 0$ an bis zu $x = m$ hin dieselbe bleiben soll, deren Koefficienten aber anders gedacht werden müssen von $x = m$ an bis zu $x = n$ hin, wenn die Funktion φ_x an diesem Theile der elastischen Feder als eine ganz andere vorausgesetzt wird, u. s. w. f. — Nimmt man daher für φ_x eine solche Reihe, z. B.

$$A_0 + A_1 \cdot (x - \alpha) + A_2 \cdot (x - \alpha)^2 + A_3 \cdot (x - \alpha)^3 + \cdots$$

an, so kann man in der That die Integration der Gleichung (4.) in so weit allgemein ausführen, daß y selbst in einer nach Potenzen von $x - \alpha$ fortlaufenden Reihe erscheint, wenn man nur nicht unterläßt alle Bedingungen in Rechnung zu bringen, und namentlich die, daß $\varphi_x = 0$ werden soll, für $x = 0$ und auch für $x = a$; und daß $\int_{a \div 0} \varphi_x \cdot dx = a$ werden muß.

Um jedoch auf diesem Wege zu allgemeinen Resultaten zu gelangen, müßte man beweisen können, daß diese Reihen allemal convergent sind, d. h. für alle Werthe von $x = 0$ an bis zu $x = a$ hin; der hier gegebene Vorschlag gehört daher zu denen, welche sich bei dem Versuche ihrer Ausführung nicht als vollkommen zweckmäßig ausweisen.

Diesem Uebelstande, der, so wie hier, so in vielen andern Untersuchungen eintritt, hat Fourier bei Gelegenheit seiner

Arbeiten über die Wärme (s. Théorie de la chaleur p. Fourier. Paris 1822.) auf eine eben so einfache als erfolgreiche Weise abgeholfen, und dadurch dem Studium der Mathematik eine neue Richtung gegeben, welche seitdem von den ausgezeichnetsten Mathematikern mehrseitig und eifrig verfolgt wird, besonders auch von Poisson, ohne daß letzterer jedoch dem Fourier volle Gerechtigkeit wiederfahren ließe. Wir werden der Wichtigkeit der Sache wegen im nächstfolgenden Anhang diesen Gegenstand etwas näher betrachten; hier aber einstweilen nur bemerken, daß Fourier gelehrt hat:

1) „jede continuirliche oder discontinuirliche Funktion φ_x allemal in eine unendliche Reihe zu verwandeln, welche nach Sinus oder nach Kosinus der Vielfachen von x fortläuft,"

und behauptet

2) „daß diese Reihen allemal convergent sind,"

von welcher letztern Behauptung Dirichlet einen sehr eleganten und strengen Beweis geliefert hat (s. Crelle's Journal d. Mathem. 1829. 1. Heft und Dove's „Archiv" I. B. 1836.).

Nach Fourier wird namentlich, wie im nachstehenden Anhange gezeigt wird, eine jede continuirliche oder discontinuirliche Funktion φ_x, wenn sie zugleich den Bedingungen zu genügen hat, daß sie für $x = 0$ und auch für $x = a$ der Null gleich werden soll, allemal in eine Reihe von der Form

$$\varphi_x = K_1 \cdot \sin\frac{\pi x}{a} + K_2 \cdot \sin\frac{2\pi x}{a} + K_3 \cdot \sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots \text{ in inf.}$$

verwandelt, wo K_1, K_2, K_3, ... die leicht zu findenden Koefficienten sind, oder kürzer geschrieben, es ist

$$5) \qquad \varphi_x = \Sigma\left(K_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{a}\right) *),$$

*) Wollte der Vfr. die Aggregaten-Theorie in Anwendung bringen, wie er solche in seinem „System der Math." Th. II. 2. Auflage mitgetheilt hat, so würde er schreiben müssen

$$\varphi_x = S\left[K_{b+1} \cdot \sin\frac{(b+1)\pi x}{a}\right],$$

wo ſtatt n nach und nach 1, 2, 3, 4, ··· und jede folgende ganze Zahl geſetzt werden muß, um die Glieder zu erhalten, deren Summe durch das Zeichen Σ ausgedrückt iſt.

Die Gleichung (4.) unſerer elaſtiſchen Kurve wird daher, wenn man jene Funktion φ_x ſo verwandelt, und die Reihe aus (5.) ſtatt φ_x ſubſtituirt, jetzt ſo

$$6) \qquad \beta\cdot\partial^4 y_x = \frac{q}{a}\cdot\Sigma\left(K_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Integrirt man nun ſolche viermal hinter einander, und ſorgt man dabei zugleich dafür, daß $y = 0$ wird, ſowohl für $x = 0$ als auch für $x = a$, ſo bleiben nur noch zwei der vier Konſtanten unbeſtimmt, und man erhält zuletzt

$$\beta\cdot y = \frac{q\cdot a^3}{\pi^4}\cdot\Sigma\left(\frac{1}{n^4}\cdot K_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}\right)+x(a-x)\cdot[Cx+C'(a-x)],$$

oder nach unſerer Art zu ſchreiben:

$$7) \quad \beta\cdot y = x(a-x)\cdot[Cx+C'(a-x)] + \frac{q\cdot a^3}{\pi^4}\cdot S\left[\frac{1}{(b+1)^4}\cdot K_{b+1}\cdot\sin\frac{(b+1)\pi x}{a}\right].$$

Die Konſtanten C und C′ beſtimmen ſich noch nach den verſchiedenen Bedingungen, wie ſolche im (§. 158. I. II. III.) gemacht worden ſind, und hier auf's Neue geſtellt werden können. So iſt alſo das gegenwärtige Problem völlig gelöſt.

§. 160.

Wie wir im nachſtehenden Anhange zeigen werden, ſo findet ſich, es mag φ_x eine continuirliche oder discontinuirliche Funktion von x ſeyn, obiger Koefficient K_{b+1} oder K_n, welcher alle die Koefficienten K_1, K_2, K_3, K_4, ꝛc. ꝛc. repräſentirt, ausgedrückt durch die Gleichung

$$8) \qquad K_n = \frac{2}{a}\cdot\int_{x\doteq 0}\varphi_x\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot dx.$$

---

weil dort ein- für allemal feſtgeſtellt iſt, daß ſtatt eines jeden kleinen deutſchen Buchſtaben nach und nach Null und jede ganze Zahl geſetzt werden ſoll.

Betrachten wir nun z. B. den besondern Fall der Aufgabe des vorhergehenden (§. 159.), in welchem vorausgesetzt wird, daß gar keine Kraft wirkt, als nur in der Mitte der elastischen Stange irgend ein Gewicht q, so ist in diesem Falle φ_x als eine discontinuirliche Funktion anzusehen, welche der Null gleich ist, für alle Werthe von x, die nicht $= \frac{1}{2}a$ sind, während aber nach (Nr. 3.) $\int_{a\div 0} \varphi_x \cdot dx = a$ seyn muß. Nach (I. Th. Analysis §. 35.) ist aber, wenn φ_x nur für $x = \frac{1}{2}a$ einen Werth hat, außerdem Null ist, weil man dann bloß $x = \frac{1}{2}a$ zu setzen braucht,

$$\int_{a\div 0} \varphi_x \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot dx = \sin\tfrac{1}{2}n\pi \cdot \int_{a\div 0} \varphi_x \cdot dx,$$

d. h., wegen $\int_{a\div 0} \varphi_x \cdot dx = a$,

$$\int_{a\div 0} \varphi_x \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot dx = a \cdot \sin\tfrac{1}{2}n\pi.$$

Folglich ist dasmal

$$K_{b+1} \text{ oder } K_n = 0,$$

so oft $b+1$ oder n gerade ist, und

$$K_{b+1} \text{ oder } K_n = (-1)^c \cdot 2,$$

so oft b von der Form $2n$ oder $n = 2c+1$ ist und statt c Null und jede ganze Zahl gesetzt wird.

Die Gleichung der Kurve (Nr. 7.) wird nun

$$9)\quad \beta \cdot y = x(a-x) \cdot [C \cdot x + C' \cdot (a-x)] + \frac{2q \cdot a^3}{\pi^4} \cdot S\left[\frac{(-1)^c}{(2c+1)^4} \cdot \sin\frac{(2c+1)\pi x}{a}\right],$$

wo, wie immer, S die Summe bedeutet aller der Glieder, welche aus dem, hinter dem S stehenden und in eckige Klammern eingeschlossenen allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn statt c nach und nach zuerst 0, dann 1, 2, 3, und alle ganzen Zahlen gesetzt werden.

Nun läßt sich aber, wie wir ebenfalls im nachstehenden Anhange zeigen werden, die unendliche Reihe

$$10)\quad S\left[\frac{(-1)^c}{(2c+1)^4} \cdot \sin(2c+1)z\right]$$

summiren, und giebt, so lange z zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, die Summe

$$11)\quad S\left[\frac{(-1)^{c+1}}{(2c+1)^4}\cdot sin(2c+1)z\right] = \tfrac{1}{24}\pi\cdot z^3 - \tfrac{1}{32}\pi^3\cdot z.$$

Will man daher die Reihe zur Rechten in (9.) summiren, so muß man $z = \frac{\pi x}{a}$, d. h. $x = \frac{az}{\pi}$ nehmen. Für alle Werthe von z zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ hat dann x die Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}a$, und für alle diese Werthe von x giebt daher die Gleichung (9.)

$$12_1)\quad \beta\cdot y = x(a-x)\cdot[Cx + C'(a-x)] - \tfrac{1}{12}q\cdot x^3 + \tfrac{1}{16}q\cdot a^3\cdot x,$$

welche Gleichung also die Kurve vorstellt, von $x = 0$ an bis zu $x = \frac{1}{2}a$.

Will man den andern Theil der Kurve von $x = \frac{1}{2}a$ an bis zu $x = a$ hin eben so einfach ausgedrückt finden, so muß man die Summe derselben Reihe in (9.) zur Rechten finden, für alle diese eben genannten Werthe von x. Diese findet man aus (11.), wenn man

$$z = \frac{\pi(a-x)}{a} = \pi - \frac{\pi x}{a}$$

nimmt, weil dann

$$x = a - \frac{az}{\pi}$$

und

$$sin(2c+1)z = sin\left[(2c+1)\pi - \frac{(2c+1)\pi x}{a}\right]$$
$$= sin\frac{(2c+1)\pi x}{a}$$

wird, so daß man erstlich die verlangte Reihe summirt bekommt, und zweitens, da z alle Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ haben kann, nun auch x alle Werthe von $a-0 = a$ an bis $a-\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$ hin haben darf. — Die Gleichung (9.) geht dadurch über in

$$12_2)\quad \beta\cdot y = x(a-x)\cdot[C_1x + C_2(a-x)] - \tfrac{1}{12}q(a-x)^3 + \tfrac{1}{16}q\cdot a^2(a-x),$$

und dies ist die Gleichung der elastischen Kurve in dem andern

Theile derſelben, von $x = \frac{1}{2}a$ bis zu $x = a$ hin, in welcher wir C_1 und C_2 ſtatt C und C' geſchrieben haben, weil dieſe Konſtanten in der Gleichung $(12_2.)$ für die andere Hälfte der Kurve ganz andere ſeyn können, als die in der Gleichung $(12_1.)$.

Betrachten wir nun noch die drei beſondern Fälle, welche wir auch im vorhergehenden (§. 158.) betrachtet haben, nämlich:

I. Wenn die elaſtiſche Stange an beiden Enden in der Richtung der horizontalen Axe eingeklemmt iſt, ſo daß für $x = 0$ und auch für $x = a$ der Werth $\partial y_x = 0$ iſt.

Differenziirt man die Gleichungen $(12_1.$ und $12_2.)$, ſo erhält man bezüglich

$$13_1) \quad \beta \cdot \partial y_x = (a-2x)[Cx + C'(a-x)] + (C-C')x(a-x) - \tfrac{1}{4}q \cdot x^2 + \tfrac{1}{16}q \cdot a^2;$$

$$13_2) \quad \beta \cdot \partial y_x = (a-2x)[C_1 x + C_2(a-x)] + (C_1-C_2)x(a-x) + \tfrac{1}{4}q(a-x)^2 - \tfrac{1}{16}q \cdot a^2.$$

Die Gleichung $(12_1.)$ muß nun für $x = 0$ auch $\partial y_x = 0$ geben, braucht aber dies gar nicht für $x = a$ zu thun, ſo wenig als ſie für $x = a$ die Ordinate $y = 0$ giebt, eben weil ſie nur von $x = 0$ an bis zu $x = \frac{1}{2}a$ hin gilt. Die Gleichung $(12_2.)$ dagegen muß für $x = a$, jetzt $\partial y_x = 0$ geben, braucht dies aber gar nicht für $x = 0$ zu thun, ſo wenig, als ſie für $x = 0$ auch $y = 0$ dazu liefert, eben weil ſie nur von $x = \frac{1}{2}a$ an bis zu $x = a$ hin gilt.

Setzt man nun in $(13_1.)$ $x = 0$ und $\partial y_x = 0$ und in der Gleichung $(13_2.)$ $x = a$ und $\partial y_x = 0$, ſo erhält man

$$14) \quad 0 = C' + \tfrac{1}{16}q, \quad \text{alſo} \quad C' = -\tfrac{1}{16}q,$$

und

$$15) \quad 0 = -C_1 - \tfrac{1}{16}q, \quad \text{alſo} \quad C_1 = -\tfrac{1}{16}q.$$

Eine dritte Konſtante beſtimmt ſich aus der Bedingung, daß beide Gleichungen $(12_1.$ und $12_2.)$ für $x = \frac{1}{2}a$ einerlei Werth von y geben müſſen; dies giebt die Gleichung

$$16) \quad C + C' = C_1 + C_2.$$

Die vierte Konſtante beſtimmt ſich endlich aus der Annahme, daß vermöge der Natur der Elaſticität, an dem zu $x = \frac{1}{2}a$ ge-

hörigen Punkte, wo das Gewicht q hängt, und wo beide, ihrer Natur nach verschiedene, Theile der elastischen Kurve zusammenstoßen (nicht bloß der Werth von y, sondern auch), der Werth von ∂y_x derselbe ist, in so ferne an dieser Stelle für beide Zweige eine gemeinschaftliche Tangente seyn muß. Beide Gleichungen (13_1. und 13_2.) müssen daher für $x = \frac{1}{2}a$ gleiche Werthe von ∂y_x geben. Dies giebt aus (13_1. und 13_2.) für $x = \frac{1}{2}a$ die Gleichung

17) $$C - C' = C_1 - C_2.$$

Also wird aus (14. — 17.)

18) $$C = C' = C_1 = C_2 = -\tfrac{1}{16}q.$$

Die Gleichungen für beide Theile der Kurve werden daher jetzt für diesen Fall (I.) seyn

19_1) $$\beta \cdot y = \tfrac{1}{48} q \cdot (3ax^2 - 4x^3)$$
gültig für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}a$;

19_2) $$\beta \cdot y = \tfrac{1}{48} q \cdot [3a(a-x)^2 - 4(a-x)^3]$$
gültig für $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = a$ *).

Diese Gleichungen geben beide für $x = \frac{1}{2}a$ den Werth $\partial y_x = 0$, und dies zeigt, daß die gemeinschaftliche Tangente an dem zu $x = \frac{1}{2}a$ gehörigen Punkte der beiden Theile der Kurve horizontal liegt, der Punkt selbst also der niedrigste ist. Der zu $x = \frac{1}{2}a$ gehörige Werth f von y wird nun (aus 19_1. oder 19_2. gezogen) der nachstehende

20) $$f = \frac{q \cdot a^3}{4 \cdot 48 \cdot \beta},$$

also gerade doppelt so groß als in demselben Fall des (§. 158. I.), wo dasselbe Gewicht q nicht in der Mitte, sondern vom Anfang bis zu Ende auf gleiche Längen gleichmäßig vertheilt gedacht wurde.

Man findet auch noch aus (§. 156. Nr. 11. u. 12.)

---

*) Poisson scheint vorausgesetzt zu haben, daß die Konstanten C und C' in (12_1.) von den Konstanten C_1 und C_2 in (12_2.) nicht verschieden seyn können. Diese Voraussetzung darf aber offenbar nicht gemacht werden.

$$Q = E = -\tfrac{1}{2}q.$$

Setzt man endlich in der Gleichung (19_1.) $x = \frac{1}{2}a - z$, in der Gleichung (19_2.) dagegen $x = \frac{1}{2}a + z$, so erhält man aus beiden für y denselben Werth. Beide Theile der Kurve von den beiden Enden an bis in die Mitte hin, wo das Gewicht q hängt, sind daher einander congruent.

II. Wird die elastische Stange an ihren beiden Enden in der Horizontalen OX bloß festgehalten ohne eingeklemmt zu seyn, so muß für $x = 0$ sowohl, als auch für $x = a$ nicht mehr $\partial y_x = 0$, sondern dafür $\partial^2 y_x = 0$ seyn, wie wir bereits im (§. 158. II.) erkannt haben. Differenzirt man aber die Gleichungen (13_1. u. 13_2.) noch einmal, so erhält man

21_1) $\beta \cdot \partial^2 y_x = -2[Cx + C'(a-x)] + 2(a-2x)(C-C') - \frac{1}{2}q \cdot x;$

21_2) $\beta \cdot \partial^2 y_x = -2[C_1 x + C_2(a-x)] + 2(a-2x)(C_1 - C_2) - \frac{1}{2}q(a-x).$

Da nun die (21_1.) für $x = 0$, $\partial^2 y_x = 0$ geben muß, die (21_2.) dagegen $\partial^2 y_x = 0$ für $x = a$ zu liefern hat, so giebt dies die beiden Gleichungen

22) $C = 2C';$

23) $2C_1 = C_2.$

Die Gleichungen (16. und 17.), aus welchen $C = C_1$ und $C' = C_2$ folgert, bleiben in diesem Falle (II.) unverändert; also hat man dasmal

$$C' = 0, \quad C = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0,$$

und die Gleichungen (12_1. und 12_2.) werden daher in diesem Falle

24_1) $\beta \cdot y = \frac{1}{48}q \cdot (3a^2x - 4x^3)$
gültig für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}a$;

24_2) $\beta \cdot y = \frac{1}{48}q \cdot [3a^2(a-x) - 4(a-x)^3]$
gültig für $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = a$.

Der Werth f von y, welcher zu $x = \frac{1}{2}a$ gehört, findet sich aus jeder dieser Gleichungen

$$f = \frac{q \cdot a^3}{48 \cdot \beta},$$

so daß dasmal diese Ordinate viermal so groß ist, als im Falle (I.), und $\frac{8}{5}$ mal so groß, als im Fall (II.) des (§. 158.), wo das Gewicht q auf die ganze Länge der elastischen Stange gleich vertheilt war.

Differenzirt man diese Gleichungen (24_1. u. 24_2.) und setzt man in dem erstern Resultate $x = 0$, in dem andern aber $x = a$, so bekommt man die Werthe von ∂y_x, d. h. die Werthe der trigonometrischen Tangenten der Winkel α und β, welche die berührenden Linien an A und B mit OX machen, nämlich

$$tg\,\alpha = \tfrac{1}{16} q \cdot a^2 \quad \text{und} \quad tg\,\beta = -\tfrac{1}{16} q \cdot a^2.$$

Beide berührende Linien sind also gegen OX gleich geneigt, schneiden sich beide in einem und demselben Punkte mit der verlängerten f, und der Abstand f' des letztern von OX ist

$$f' = \tfrac{1}{2} a \cdot tg\,\alpha = \tfrac{1}{32} q \cdot a^3 = \tfrac{3}{2} f.$$

In dem analogen Fall (II.) des (§. 158.), wo aber das Gewicht q auf die Länge gleich vertheilt war, findet sich

$$f' = \tfrac{8}{5} f,$$

wenn sowohl f' als f für den dortigen Fall die ganz analoge Bedeutung haben, wie hier.

Endlich sind hier wieder die beiden Theile der Kurve von den Enden an bis nach der Mitte hin (wo das Gewicht q hängt) einander congruent.

III. Ist endlich die Feder bei A so eingeklemmt, daß für $x = 0$ auch $\partial y_x = 0$ wird, in B dagegen nur fest, so daß für $x = a$, $\partial^2 y_x = 0$ werden muß, so giebt die Gleichung (13_1.), wenn man daselbst $x = 0$ und $\partial y_x = 0$ setzt:

25) $\quad C' + \tfrac{1}{16} q = 0, \quad \text{oder} \quad C' = -\tfrac{1}{16} q.$

Die Gleichung (21_2.) giebt dagegen, wenn $x = a$ und $\partial^2 y_x = 0$ gesetzt wird,

26) $\quad 2C_1 = C_2.$

Die Gleichungen (16. und 17.) bleiben jetzt wieder, wonach

$$C = C_1 \quad \text{und} \quad C' = C_2$$

ist. Also hat man dasmal

$$C = C_1 = -\tfrac{1}{32}q \quad \text{und} \quad C' = C_2 = -\tfrac{1}{16}q.$$

Die Gleichungen (12_1. u. 12_2.) für die beiden Theile der Kurve werden daher jetzt

27_1) $\beta \cdot y = \frac{1}{96}q \cdot (9 \cdot ax^2 - 11x^3)$

gültig für $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}a$;

27_2) $\beta \cdot y = \frac{1}{96}q \cdot (5x^3 - 15ax^2 + 12a^2x - 2a^3)$

gültig für $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = a$.

Für $x = \frac{1}{2}a$ geben beide Gleichungen die zugehörige Ordinate f, nämlich

$$f = \frac{7qa^3}{8 \cdot 96 \cdot \beta},$$

aber diese Ordinate ist dasmal nicht die größeste, also nicht der Pfeil der Kurve. Außerdem wird noch aus (§. 156. Nr. 11. und 12.)

$$E = -\tfrac{11}{16}q \quad \text{und} \quad Q = -\tfrac{5}{16}q.$$

so daß sich dasmal der Druck q auf beide Enden ungleich und in dem Verhältniß wie 11 zu 5 vertheilt.

Die beiden Theile der Kurve von den Enden an bis in die Mitte hin sind auch dasmal einander nicht congruent.

Anmerk. 1. Wir beschließen die Untersuchungen dieses Kapitels mit der Bemerkung, daß solche größtentheils aus Poisson's Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (in den Mémoires de l'Académie des sciences T. VIII.) entnommen sind.

Anmerk. 2. Wir haben oben (§. 159. Nr. 5. u. §. 160. Nr. 8.) und kurz vor (§. 160. Nr. 9.) eine Funktion φ_x gefunden, nämlich die Reihe

$$1) \quad R = 2\left(\sin\frac{\pi x}{a} - \sin\frac{3\pi x}{a} + \sin\frac{5\pi x}{a} - \sin\frac{7\pi x}{a} + \cdots\right),$$

welche die Eigenschaft haben soll, daß sie Null giebt, so oft $x \gtrless \frac{1}{2}a$ wird, daß dagegen $\int_{x \div a} R \cdot dx = a$ wird, so oft $x = \frac{1}{2}a$ genommen wird. Wir wollen hier noch a posteriori zeigen, daß

daß diese Reihe R wirklich alle die Eigenschaften hat, welche von ihr verlangt werden.

Erstlich wollen wir die Reihe R summiren. Zu dem Ende setze man $\frac{\pi x}{a} = z$ und statt $\sin\frac{n\pi x}{a}$ seinen Werth $\frac{e^{nzi} - e^{-nzi}}{2i}$, wo i die $\sqrt{-1}$ vorstellt. Dann erhält man aus (1.)

$$2)\quad R = \frac{1}{i}\left\{\begin{array}{l} e^{zi} - e^{3zi} + e^{5zi} - e^{7zi} + \cdots \\ -e^{-zi} + e^{-3zi} - e^{-5zi} + e^{-7zi} - \cdots. \end{array}\right.$$

Nun ist aber die erstere dieser Reihen, wenn man $e^{zi} = v$ setzt, offenbar

$$v(1 - v^2 + v^4 - v^6 + \cdots),\ \text{d. h.}\ \frac{v}{1+v^2},\ \text{oder}\ \frac{e^{zi}}{1+e^{2zi}},$$

oder
$$\frac{1}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos z} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\frac{\pi x}{a}}.$$

Die zweite Reihe in (2.) ist dagegen dann offenbar

$$= -\frac{e^{-zi}}{1+e^{-2zi}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\cos z} = -\frac{\frac{1}{2}}{\cos\frac{\pi x}{a}},$$

folglich ist $R = \frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{a}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi x}{a}}\right)$, d. h. $R = 0$

in allen den Fällen, wo $\cos\frac{\pi x}{a} = 0$ nicht ist, also wenn nicht $x = \frac{1}{2}a$.

Um nun zweitens zu zeigen, daß $\int_{a-0} R\cdot dx = a$ ist, so oft $x = \frac{1}{2}a$ gesetzt wird, integrire man die Reihe R nach x direkt, und man erhält aus (1.)

$$3)\quad \int R\cdot dx = 2\frac{a}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi x}{a} + \tfrac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{a} - \tfrac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{a} - \cdots\right).$$

Summirt man nun diese Reihe in (3.) zur Rechten ganz auf demselben Wege, auf welchem man die Reihe (1.) summirt hat, so erhält man, weil $v - \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 - \frac{1}{7}v^7 + \cdots = \frac{1}{tg}v$ ist, aus (3.)

4) $$\int R \cdot dx = -\frac{a}{\pi}\left(\frac{1}{tg} e^{\frac{\pi x}{a} i} + \frac{1}{tg} e^{-\frac{\pi x}{a} i}\right).$$

Nimmt man nun dieses Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$, so erhält man

5) $$\int_{x \div 0} R \cdot dx = \frac{a}{\pi}\left[2\frac{1}{tg}1 - \left(\frac{1}{tg} e^{\pi i} + \frac{1}{tg} e^{-\pi i}\right)\right].$$

Weil aber $e^{\pi i} = cos\,\pi + i \cdot sin\,\pi = -1$,

und $e^{-\pi i} = cos\,\pi - i \cdot sin\,\pi = -1$

ist, und $\frac{1}{tg}(-1) = -\frac{1}{4}\pi$, so wie $\frac{1}{tg}1 = +\frac{1}{4}\pi$, so geht die (5.), wenn man diese Werthe substituirt, sogleich in

6) $$\int_{x \div 0} R \cdot dx = \frac{a}{\pi}(2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi) = a$$

über; welches zu zeigen war.

Statt solcher einzelnen abgerissenen Entwikkelungen ist es aber viel zweckmäßiger und der hohen Wichtigkeit des Gegenstandes angemessener, wenn wir im nachstehenden Anhange das Wissenswürdigste über diese Reihen des Fourier im Zusammenhange mittheilen; wobei wir jedoch manches noch hinzufügen, was die Sache auch von der andern Seite sehen läßt.

Anhang.

Einiges über Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen.

Erstes Kapitel.

Summation von Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen.

§. 1.

Es bedeute π immer die Zahl 3,14159…, welche die Länge des Halbkreises ausdrückt für den Radius 1. Durch i dagegen stellen wir die $\sqrt{-1}$ vor. Ferner setzen wir als bekannt voraus die Formeln

1) $e^{\pm zi} = \cos z \pm i \cdot \sin z$, daher $e^{\pm \pi i} = -1$;

2) $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$; $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$;

und, wenn m eine positive ganze Zahl vorstellt,

3) $(\cos z \pm i \cdot \sin z)^{\frac{1}{m}} = 1^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\cos\frac{z}{m} \pm i \cdot \sin\frac{z}{m}\right)$ *),

wo zur Rechten deshalb der Faktor $1^{\frac{1}{m}}$ oder $\sqrt[m]{1}$ stehen muß, weil der Ausdruck zur Linken, in so ferne m als eine positive ganze Zahl vorausgesetzt ist, m verschiedene Werthe hat, während $\cos\frac{z}{m} \pm i \cdot \sin\frac{z}{m}$ nur einer dieser Werthe ist, so daß sel-

*) Es ist nämlich

$$(\cos z + i \cdot \sin z)^{\frac{1}{m}} = (e^{zi})^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} zi} = \cos\left(\frac{1}{m} z\right) + i \cdot \sin\left(\frac{1}{m} z\right).$$

biger noch mit allen Werthen von $1^{\frac{1}{m}}$ oder $\sqrt[m]{1}$ multiplizirt werden muß, wenn zur Rechten genau eben so viele und genau dieselben Werthe stehen sollen, welche der Ausdruck zur Linken hat.

Noch allgemeiner ist, wenn n irgend eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl vorstellt,

4) $(\cos z + i \cdot \sin z)^n = 1^n \cdot (\cos nz + i \cdot \sin nz)$;

dagegen, wenn m positiv oder negativ ganz ist, weil dann $1^m = 1$ wird,

5) $(\cos z + i \cdot \sin z)^m = \cos mz + i \cdot \sin mz$.

Setzt man aber hier $\frac{2a\pi}{m}$ statt z, unter a Null oder irgend eine ganze Zahl verstanden, so daß $\cos 2a\pi = 1$, $\sin 2a\pi = 0$ ist, so ergiebt sich

6) $\left(\cos\frac{2a\pi}{m} + i \cdot \sin\frac{2a\pi}{m}\right)^m = 1$,

folglich auch

7) $1^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{1} = \cos\frac{2a\pi}{m} + i \cdot \sin\frac{2a\pi}{m}$;

wo rechts alle m Werthe der $\sqrt[m]{1}$ (d. h. von $1^{\frac{1}{m}}$) ausgedrückt sind, wenn man statt a nach und nach 0, 1, 2, 3, ... m − 1 setzt *). Die Gleichung (3.) geht dadurch über in

8) $(\cos z \pm i \cdot \sin z)^{\frac{1}{m}} = \cos\left(\frac{2a\pi \pm z}{m}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2a\pi \pm z}{m}\right)$,

wo man zur Rechten dieselben m Werthe bekommt, welche der Ausdruck zur Linken vorstellt, wenn statt a nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... m − 1 gesetzt werden, während dieselben Werthe auf der rechten Seite periodisch wiederkehren, wenn

*) Setzt man statt a noch m + 0, m + 1, m + 2, m + 3, ... m + m − 1, oder auch ν m + 0, ν m + 1, ν m + 2, ν m + 3, ... ν m + m − 1, wo ν irgend eine ganze Zahl bedeutet, so kehren dieselben Werthe immer wieder, in derselben Ordnung.

statt a andere (positive oder negative) ganze Zahlen gesetzt werden.

Sind aber μ und m zwei ganze Zahlen, während wir m zugleich positiv voraussetzen, so ist noch

$$9)\quad (\cos z \pm i\cdot\sin z)^{\frac{\mu}{m}} = \cos\frac{(2a\pi \pm z)\mu}{m} + i\cdot\sin\frac{(2a\pi \pm z)\mu}{m},$$

wo der Ausdruck zur Rechten genau die m Werthe liefert, welche der Ausdruck zur Linken hat.

Und ganz allgemein wird aus denselben Gründen, wenn n ganz beliebig reell oder imaginär ist,

$$10)\quad (\cos z + i\cdot\sin z)^n = \cos n(2a\pi + z) + i\cdot\sin n(2a\pi + z);$$

d. h. wenn man rechts statt a nach und nach Null und alle positiven und negativen ganzen Zahlen setzt, so erhält man rechts genau eben so viele und genau eben dieselben Werthe, welche die Potenz zur Linken wirklich hat *).

§. 2.

Kann man eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe summiren, — findet man z. B.

$$1)\qquad A_0 + A_1\cdot x + A_2\cdot x^2 + A_3\cdot x^3 + \cdots = F_x,$$

so kann man auch sogleich eine nach Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufende Reihe summiren, welche dieselben Koefficienten hat; denn es ist dann allemal

$$2)\quad A_0 + A_1 v\cdot\cos z + A_2 v^2\cdot\cos 2z + A_3 v^3\cdot\cos 3z + A_4 v^4\cdot\cos 4z + \cdots = \tfrac{1}{2}\left([F_x]_{v\cdot e^{zi}} + [F_x]_{v\cdot e^{-zi}}\right)$$

und

$$3)\quad A_1 v\cdot\sin z + A_2 v^2\cdot\sin 2z + A_3 v^3\cdot\sin 3z + A_4 v^4\cdot\sin 4z + \cdots = \frac{1}{2i}\left([F_x]_{v\cdot e^{zi}} - [F_x]_{v\cdot e^{-zi}}\right),$$

wo $[F_x]_{v\cdot e^{zi}}$ und $[F_x]_{v\cdot e^{-zi}}$ das bedeuten, was aus F_x wird, wenn man bezüglich $v\cdot e^{zi}$ und $v\cdot e^{-zi}$ statt x schreibt, während

*) Man lese hierüber d. „Syst. d. Math." Th. II. 2. Auflage.

statt e^{zi} auch $\cos z + i \cdot \sin z$ und statt e^{-zi} auch $\cos z - i \cdot \sin z$ geschrieben werden kann.

Sind endlich die Reihen (2. und 3.) noch konvergent, auch wenn $v = 1$ gesetzt wird, so geben diese Gleichungen noch (sobald man die Summe F_x der Reihe 1. gefunden hat)

4) $$A_0 + A_1 \cdot \cos z + A_2 \cdot \cos 2z + A_3 \cdot \cos 3z + \cdots = \tfrac{1}{2}\left([F_x]_{e^{zi}} + [F_x]_{e^{-zi}}\right);$$

5) $$A_1 \cdot \sin z + A_2 \cdot \sin 2z + A_3 \cdot \sin 3z + \cdots = \frac{1}{2i}\left([F_x]_{e^{zi}} - [F_x]_{e^{-zi}}\right).$$

Der Grund davon ist folgender: Das allgemeine Glied der Reihe (3.) ist z. B.

$$A_n \cdot v^n \cdot \sin nz, \text{ also auch } A_n \cdot v^n \cdot \frac{e^{nzi} - e^{-nzi}}{2i},$$

folglich auch $\frac{1}{2i} A_n \cdot (v \cdot e^{zi})^n - \frac{1}{2i} A_n \cdot (v \cdot e^{-zi})^n$. Die Reihe (3.) zerfällt daher in die Differenz zweier anderer Reihen, deren allgemeine Glieder, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{2i}$ herausgesetzt sich denkt, bezüglich

$$A_n \cdot (v \cdot e^{zi})^n \text{ und } A_n \cdot (v \cdot e^{-zi})^n$$

sind, deren Summen also nach (1.) bezüglich

$$= F_{v \cdot e^{zi}} \text{ und } = F_{v \cdot e^{-zi}}$$

gefunden werden. — Auf ganz analoge Weise zerlegt sich die Reihe (2.), wenn man den Faktor $\frac{1}{2}$ herausetzt, in die Summe derselben beiden Reihen.

§. 3.

Hat man aber auf irgend einem Wege Summen von Reihen gefunden, so kann man aus diesen sogleich neue zusammensetzen, entweder dadurch, daß man auf mehrere solche Gleichungen die gewöhnlichen algebraischen Verbindungen anwendet, oder auch dadurch, daß man eine einzige solche Gleichung auf jeder Seite nach irgend einem darin vorkommenden allgemeinen Buchstaben differenziirt oder integrirt; während diese zu Grunde gelegte Gleichung selber erst irgend wie aus einer oder mehreren andern durch beliebige Verbindungen hervorgebracht seyn kann.

Dieſe zwei Summations-Methoden der (§§. 2. und 3.) wollen wir nun in einigen Beiſpielen erläutern.

§. 4.

Geſetzt es wären zu ſummiren die beiden Reihen

$$(R)\cdots\quad \cos nz + n_1\cdot\cos(n-2)z + n_2\cdot\cos(n-4)z + n_3\cdot\cos(n-6)z + \cdots$$

und $$(S)\cdots\quad \sin nz + n_1\cdot\sin(n-2)z + n_2\sin(n-4)z + n_3\cdot\sin(n-6)z + \cdots,$$

in welchen n_1, n_2, n_3, ꝛc. ꝛc. die auf einander folgenden Binomial-Koefficienten einer nten Potenz vorſtellen, ſo daß man alſo hat

$$1)\quad 1 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 + \cdots = (1+x)^n,$$

ſo würde man damit beginnen, daß man dieſe Reihen in andere zerlegte, welche einfacher ſind. Weil aber

$$\cos(n-2a)z = \cos nz\cdot\cos 2az + \sin nz\cdot\sin 2az,$$
$$\sin(n-2a)z = \sin nz\cdot\cos 2az - \cos nz\cdot\sin 2az$$

iſt, ſo reduciren ſich die Reihen R und S ſogleich auf dieſe anderen Reihen

$$1 + n_1\cdot\cos 2z + n_2\cdot\cos 4z + n_3\cdot\cos 6z + \cdots \qquad \cdots(R_1)$$

und $$n_1\cdot\sin 2z + n_2\cdot\sin 4z + n_3\cdot\sin 6z + \cdots \qquad \cdots(S_1),$$

ſo nämlich, daß man hat

$$2)\qquad R = \cos nz\cdot R_1 + \sin nz\cdot S_1,$$
$$3)\qquad S = \sin nz\cdot R_1 - \cos nz\cdot S_1;$$

und man braucht daher nur noch die Summen der Reihen R_1 und S_1 zu finden.

Dieſe letztern Reihen werden nun aber unmittelbar nach (§. 2.) ſummirt, wenn man ſtatt 2z einen einzigen Buchſtaben ſetzt. Man erhält nämlich vermöge der (1.):

$$4)\quad \left\{\begin{array}{l} 1 + n_1\cdot\cos 2z + n_2\cdot\cos 4z + n_3\cdot\cos 6z + \cdots \\ \text{d. h.}\quad R_1 = \dfrac{(1+e^{2zi})^n + (1+e^{-2zi})^n}{2} \end{array}\right.$$

und $$5)\quad \left\{\begin{array}{l} n_1\cdot\sin nz + n_2\cdot\sin 4z + n_3\cdot\sin 6z + \cdots \\ \text{d. h.}\quad S_1 = \dfrac{(1+e^{2zi})^n - (1+e^{-2zi})^n}{2i}. \end{array}\right.$$

Weil jedoch in diesen gefundenen Summen noch i, d. h. $\sqrt{-1}$ vorkommt, so muß man solche umformen, so daß sich diese i wieder gegenseitig aufheben. Nun ist aber wegen (§. 1. Nr. 1.)

$$1+e^{2zi} = 1+\cos 2z+i\cdot\sin 2z;$$

dagegen

$$1+\cos 2z = 2\cos z^2 \quad \text{und} \quad \sin 2z = 2\sin z\cdot\cos z;$$

also noch

$$1+e^{2zi} = 2\cos z\cdot(\cos z+i\cdot\sin z)$$

und

$$1+e^{-2zi} = 2\cos z\cdot(\cos z-i\cdot\sin z);$$

folglich auch

$$6) \quad (1+e^{2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot(\cos nz+i\cdot\sin nz),$$

$$7) \quad (1+e^{-2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot(\cos nz-i\cdot\sin nz),$$

wo aber in den beiden Formeln (6. und 7.) zur Rechten, der Faktor $(2\cos z)^n$ alle Werthe vorstellt, welche diese Potenz hat, damit diese Ausdrücke zur Rechten nicht bloß einzelne Werthe der Potenzen zur Linken, sondern letztere ganz und vollständig vorstellen.

Will man in diesen Ausdrücken (6. und 7.) zur Rechten, die Potenz $(2\cos z)^n$ nur als eindeutig behandeln und so, als ob sie in jedem der beiden Ausdrücke (6. und 7.) einen und denselben ihrer Werthe vorstelle, so darf man nur den Faktor 1^n oder $\cos 2nc\pi+i\cdot\sin 2nc\pi$ zu dem zweiten Faktor in (6. und 7.) noch hinzufügen. Dann kann man diese Resultate (6. und 7.) so schreiben:

$$8) \quad (1+e^{2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot[\cos n(2a\pi+z)+i\cdot\sin n(2a\pi+z)],$$

$$9) \quad (1+e^{-2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot[\cos n(2b\pi+z)-i\cdot\sin n(2b\pi+z)],$$

wo zur Rechten (in beiden Formeln) der Faktor $(2\cos z)^n$ jedesmal nur einen einzigen und jedesmal einen und denselben Werth vorstellt, während alle Werthe der Potenzen zur Linken, auch rechts sich ergeben, wenn man rechts statt a oder statt b Null setzt und alle positiven und negativen ganzen Zahlen.

Addirt man nun (8. und 9.) zur Rechten und nimmt man die Hälfte, so hat man (nach 4.) die Summe der Reihe R_1. —

Subtrahirt man aber die (9.) von der (8.), so ergiebt sich, wenn noch durch $2i$ dividirt wird, (nach 5.) die Summe der Reihe S_1.

Weil aber die Ausdrücke in (8. und 9.) zur Rechten, so oft n nicht eine ganze Zahl ist, mehrere Werthe haben, so entsteht jetzt die wichtigste der Fragen, nämlich, welche dieser Werthe man addiren muß, um R_1, welche derselben man subtrahiren muß, um S_1 wirklich zu bekommen? — Um diese Frage zu beantworten, wollen wir annehmen, daß n beliebig reell sey; dann muß man unterscheiden,

I. wenn $\cos z$ positiv ist, also $(2\cos z)^n$ auch positiv genommen werden kann;

II. wenn $\cos z$ negativ, also $-2\cos z$ positiv ist, folglich $(-2\cos z)^n$ einen einzigen positiven Werth vorstellen kann.

I. Ist nun erstlich $\cos z$ positiv, und wird dann statt $(2\cos z)^n$ sein positiver Werth gesetzt, und hat man sich endlich überzeugt, daß die Reihen R_1 und S_1 konvergent sind für diese Werthe von z, welche man jetzt im Auge hat, so muß man in (8. und 9.), wenn sie in (4. und 5.) gebraucht werden sollen, die ganze Zahl b der ganzen Zahl a gleich nehmen, damit die Werthe für R_1 und S_1 reell werden, wie dieses seyn muß. Man erhält also, so oft $\cos z$ positiv ist,

10) $$R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos n(2a\pi + z)$$

und 11) $$S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin n(2a\pi + z),$$

wo zur Rechten der Faktor $(2\cos z)^n$ seinen einzigen positiven Werth vorstellt, während man noch nicht weiß, ob man statt a die Null setzen soll, oder welche ganze Zahl statt a zu setzen ist.

Weil jedoch die Gleichungen (10. und 11.) nicht für alle Werthe von z gelten, sondern nur für diejenigen, welche $\cos z$ positiv machen, folglich immer nur für zwei auf einander folgende Quadranten, für die nächsten beiden aber dann nicht, wohl aber wieder für die nun kommenden zwei Quadranten, u. s. w. f.; so behält a entweder immer einen und denselben Werth, der nur einmal bestimmt zu werden braucht, um für immer bestimmt zu seyn, oder es kann sich der Werth von a ändern müssen, so oft z eine neue Kluft von zwei Quadranten

übersprungen hat, für welche die Formeln (10. und 11.) nicht gelten können. Innerhalb je zweier Quadranten aber, für welche die Formeln (10. und 11.) wieder gelten, und wo gar nichts vorhanden ist, was die Unterbrechung des Stetigkeitsgesetzes rechtfertigen könnte, muß a einen und denselben Werth behalten. Da nun für $z = 0$, die Reihe $R_1 = 2^n$ und die Reihe $S_1 = 0$ wird, sobald man diese Reihe für $z = 0$ direkt betrachtet; und da dieselben Resultate auch aus den Formeln (10. und 11.) hervorgehen, wenn man Null statt a setzt, so folgt, daß man für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen, für welche $\cos z$ positiv wird, und unter denen sich der so eben gesetzte Werth $z = 0$ befindet, $a = 0$ nehmen müsse. Die Formeln (10. und 11.) geben daher

12) $R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos nz$ und $S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin nz$,

und dann ist, wegen (2. und 3.) auch noch

13) $R = (2\cos z)^n$ und $S = 0$,

für alle Werthe von z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$.

Für $z = 2\mu\pi$, wo μ irgend eine bestimmte ganze Zahl ist, nehmen die Reihen R_1 und S_1, wenn man sie direkt betrachtet, offenbar dieselben Werthe an, wie für $z = 0$, nämlich bezüglich 2^n und 0. Die Formeln (10. und 11.) geben aber dieselben Resultate nur dann, wenn man $a = -\mu$ nimmt; folglich muß $a = -\mu$ genommen werden für alle Werthe von z zwischen $(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$, für welche $\cos z$ positiv wird, und in deren Mitte $z = 2\mu\pi$ liegt. Die Formeln (10. und 11.) geben daher

14)
$$\begin{cases} R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos n(-2\mu\pi + z) = \\ \qquad\qquad (2\cos z)^n \cdot \cos n(2\mu\pi - z), \\ S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin n(-2\mu\pi + z) = \\ \qquad\qquad -(2\cos z)^n \cdot \sin n(2\mu\pi - z), \end{cases}$$

und, wegen (2. und 3.) dann auch noch

15)
$$\begin{cases} R = (2\cos z)^n \cdot \cos 2\mu n\pi, \\ S = (2\cos z)^n \cdot \sin 2\mu n\pi \end{cases}$$

für alle Werthe von z zwischen $(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$, wo μ positiv, auch negativ, ganz gedacht wird.

II. Betrachtet man aber die Werthe von z, für welche $\cos z$ negativ, also $-\cos z$ positiv ist, so daß statt $(-\cos z)^n$ ein positiver Werth gesetzt werden kann, so setze man in den Formeln (6. und 7.) statt

$(2\cos z)^n$ zunächst $(-2\cos z)^n \cdot (-1)^n$,

dann $(-2\cos z)^n \cdot (\cos n(2a+1)\pi + i \cdot \sin n(2a+1)\pi)$,

wo die Potenz $(-2\cos z)^n$ ihren einzigen positiven Werth vorstellt. Dann erhält man statt der Gleichungen (8. und 9.)

8′) $(1+e^{2zi})^n =$

$(-2\cos z)^n \cdot [\cos n((2a+1)\pi+z) + i \cdot \sin n((2a+1)\pi+z)]$,

9′) $(1+e^{-2zi})^n =$

$(-2\cos z)^n \cdot [\cos n((2b+1)\pi+z) - i \cdot \sin n((2b+1)\pi+z)]$.

Statt der Gleichungen (10. und 11.) erhält man jetzt, so oft $\cos z$ negativ ist,

10′) $R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2a+1)\pi+z)$,

11′) $S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n((2a+1)\pi+z)$.

Weil nun für $z = (2\mu+1)\pi$, $\cos 2z = \cos 4z = \text{ꝛc.} = 1$, $\sin 2z = \sin 4z = \text{ꝛc.} = 0$ wird, — so geben die Reihen R_1 und S_1 für $z = (2\mu+1)\pi$ direkt bezüglich die Werthe 2^n und 0. Dieselben Resultate gehen aber auch aus den Formeln (10′. und 11′.) hervor, wenn man daselbst $(2\mu+1)\pi$ statt z setzt, also -1 statt $\cos z$, zugleich aber $a = -(\mu+1)$ nimmt. Folglich hat man für alle Werthe von z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ (für welche $\cos z$ immer negativ wird, und in deren Mitte $z = (2\mu+1)\pi$ liegt), $a = -(\mu+1)$ zu nehmen; und es ist daher

12′) $\begin{cases} R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n(-(2\mu+1)\pi+z), \\ S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n(-(2\mu+1)\pi+z), \end{cases}$

oder

13′) $\begin{cases} R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2\mu+1)\pi-z), \\ S_1 = -(-2\cos z)^n \cdot \sin n((2\mu+1)\pi-z), \end{cases}$

und dann auch wegen (2. und 3.),

14′) $\begin{cases} R = (-2\cos z)^n \cdot \cos(2\mu+1)n\pi, \\ S = (-2\cos z)^n \cdot \sin(2\mu+1)n\pi, \end{cases}$

für jeden Werth von z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$, während μ irgend eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt"*).

Daß man aber, ehe man Reihen summirt, sich vorher immer überzeugen müsse, daß, oder doch wann, die Reihen konvergent sind, bedarf wohl kaum einer besondern Erwähnung (vgl. die Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathem. Berlin 1823. wo die wichtigsten praktischen Lehren für die Behandlung unendlicher Reihen zusammengestellt, und durch Beispiele erläutert sich finden).

§. 5.

Als neues Beispiel der Anwendung der Summations-Methoden der (§§. 2. und 3.) geben wir die Aufgabe, welche im vorstehenden letzten Kapitel der Statik (§. 160.) vorgekommen ist, nämlich die Reihe

$$(T)\cdots \quad \sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \frac{1}{7^4}\cdot\sin 7z + \cdots$$

zu summiren.

Nach (§. 2.) würde die Summation dieser Reihe erledigt seyn, wenn man die Reihe

---

*) In den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höheren Mathematik" Berlin 1823. hat der Verfasser (in der vierten Abtheilung) die Summen dieser Reihen zuerst gegeben. Sie sind auch von Poinsot und Cauchy eben so gefunden worden, von Poinsot fast gleichzeitig, von Cauchy später. — Der Verfasser legt weniger Werth auf die Resultate, als auf die ganz elementaren Mittel, welche er zu deren Erzielung angewandt hat. Früher hatten Euler und Lagrange gelehrt, daß die Reihe R für alle Werthe von z, also unter allen Umständen $= (2\cos z)^n$, und daß eben so für jeden Werth von z, $S = 0$ sey; Resultate, die, wenn n nicht eine ganze Zahl ist, dem Obigen zu Folge, nur dann wahr sind, wenn z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Beide große Analysten hatten versäumt, die Mehrdeutigkeit der Potenzen zu beachten und gehörig in Rechnung zu bringen. Die mehrdeutigen Ausdrücke entstehen aber allemal da, wo verschiedene Zustände in einer und derselben Rechnungsform ausgedrückt sich finden. Sucht man also mit der nöthigen Aufmerksamkeit die zusammengehörigen Werthe heraus, so wird man eine Menge von anscheinenden Sonderbarkeiten des Kalkuls entweder nicht vorfinden, oder doch sogleich auf den ersten Wegen erklärt haben.

$$x-\frac{1}{3^4}\cdot x^3+\frac{1}{5^4}\cdot x^5-\frac{1}{7^4}\cdot x^7+\cdots$$

summiren könnte. Weil aber die Summe dieser letztern Reihe etwas verwikkelt wird, so differenziirt man die Reihe T viermal hinter einander nach z, um nach und nach

$$\vartheta T_z = \cos z-\frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z+\frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z-\frac{1}{7^3}\cdot\cos 7z+\cdots,$$

$$\vartheta^2 T_z = -\sin z+\frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z-\frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z+\frac{1}{7^2}\cdot\sin 7z-\cdots,$$

$$\vartheta^3 T_z = -\cos z+\tfrac{1}{3}\cdot\cos 3z-\tfrac{1}{5}\cdot\cos 5z+\tfrac{1}{7}\cdot\cos 7z-\cdots,$$

zuletzt aber

$$\vartheta^4 T_z = \sin z-\sin 3z+\sin 5z-\sin 7z+\cdots$$

zu erhalten; dann fängt man bei dieser letzten Reihe $\vartheta^4 T_z$, oder bei der vorletzten $\vartheta^3 T_z$ an, summirt solche nach (§. 2.) und findet zuletzt T selbst durch fortgesetzte Integration.

Weil nämlich

$$1)\qquad x-x^3+x^5-x^7+\cdots = \frac{x}{1+x^2}$$

ist, so findet sich nach (§. 2.) sogleich

$$2)\quad v\cdot\sin z-v^3\cdot\sin 3z+v^5\cdot\sin 5z-\cdots=\frac{1}{2i}\left(\frac{v\cdot e^{zi}}{1+v^2\cdot e^{2zi}}-\frac{v\cdot e^{-zi}}{1+v^2\cdot e^{-2zi}}\right)$$

$$=\frac{(v-v^3)\cdot\sin z}{1+2v^2\cdot\cos 2z+v^4}.$$

Also wird auch für $v=1$

$$3)\quad \sin z-\sin 3z+\sin 5z-\cdots=0,\ \text{d. h. } \vartheta^4 T_z=0,$$

so lange nicht $1+\cos 2z$, d. h. $2(\cos z)^2$, oder $\cos z$ der Null gleich, in welchem letztern Falle der Ausdruck zur Rechten für $v=1$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, die Summe der Reihe daher für diese Ausnahms-Werthe direkt gefunden werden muß *).

Integrirt man nun die Reihe (2.) nach z, so erhält man

---

*) In der That wird für $z=\frac{1}{2}\pi$, wo $\cos z=0$ ist, weil dann $\sin z=1$, $\sin 3z=-1$, $\sin 5z=+1$, ꝛc. ꝛc. wird, die Summe der Reihe

$$\vartheta^4 T_z = 1+1+1+1+1+1+1+1+\cdots,$$

folglich unendlich groß, d. h. die Summe existirt gar nicht, eben weil die Reihe jetzt divergent ist.

4) $-v\cdot\cos z+\frac{1}{3}v^3\cdot\cos 3z-\frac{1}{5}v^5\cdot\cos 5z+\frac{1}{7}v^7\cdot\cos 7z-\cdots$
$$=-\tfrac{1}{2}\frac{1}{tg}\left(\frac{2v}{1-v^2}\cos z\right)+const.$$

Weil aber für $z=0$ dieſe Reihe zur Linken in

$-v+\frac{1}{3}v^3-\frac{1}{5}v^5-\cdots$, d. h. in $-\frac{1}{tg}v$, oder $-\frac{1}{2}\frac{1}{tg}\frac{2v}{1-v^2}$

übergeht, ſo iſt die $const.=0$ zu nehmen, ſo daß man hat

5) $v\cdot\cos z-\frac{1}{3}v^3\cdot\cos 3z+\frac{1}{5}v^5\cdot\cos 5z-\frac{1}{7}v^7\cdot\cos 7z+\cdots$
$$=\tfrac{1}{2}\frac{1}{tg}\left(\frac{2v}{1-v^2}\cos z\right).$$

Setzt man hier $v=1$, ſo erhält man $-\delta^3T_z$, nämlich, weil $\frac{1}{tg}\frac{1}{0}=(b+\frac{1}{2})\pi$ iſt *), wo b Null oder jede beliebige poſitive oder negative ganze Zahl bedeutet,

6) $\cos z-\frac{1}{3}\cdot\cos 3z+\frac{1}{5}\cdot\cos 5z-\frac{1}{7}\cdot\cos 7z+\cdots=\frac{1}{2}b\pi+\frac{1}{4}\pi$,

ausgenommen wieder den Fall, wo $\cos z=0$, weil dann der Ausdruck zur Rechten in (5.) für $v=1$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; ſo daß für dieſe Ausnahms-Werthe von z die Summe der Reihe direkt gefunden werden muß **). Aber gerade weil, ſo oft $\cos z=0$ iſt, das Geſetz der Stetigkeit der Reihe (6.) unterbrochen wird, ſo behält entweder μ immerfort einen und denſelben Werth, oder er ändert ſich doch nicht zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$. Denkt man ſich aber $z=0$, ſo geht die Reihe (6.) in eine

*) Wollte man bloß $\frac{1}{tg}\frac{1}{0}$ oder $arc.tg\infty=\frac{1}{2}\pi$ nehmen, ſo würde man die Mehrdeutigkeit der Ausdrücke vernachläſſigen, da $tg(\mu+\frac{1}{2})\pi$ allemal $\frac{\pm 1}{0}$ oder $\frac{1}{0}$ wird, ſo oft ſtatt μ irgend eine poſitive oder negative ganze Zahl geſetzt wird, da folglich $\frac{1}{tg}\frac{1}{0}$ jeden dieſer Werthe $(\mu+\frac{1}{2})\pi$ vorſtellt. Ob Null, oder welche ganze Zahl ſtatt μ geſetzt werden muß, damit die Gleichung (6.) richtig iſt, muß eben jetzt noch unterſucht werden.

**) Iſt $\cos z=0$, alſo $z=\mu\pi+\frac{1}{2}\pi$, wo μ irgend eine poſitive oder negative ganze Zahl vorſtellt, ſo iſt die Summe der Reihe (6.) offenbar $=0$, weil dann jedes einzelne Glied der Null gleich iſt.

eine andere über, welche bekanntlich den Werth $\frac{1}{4}\pi$ hat; folglich ist

7) $\cos z - \frac{1}{3}\cos 3z + \frac{1}{5}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7}\cdot\cos 7z + \cdots = \frac{1}{4}\pi$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Für $z = \pi$, ist $\cos z = \cos 3z = \cos 5z = \text{ꝛc. ꝛc.} = -1$, daher die Summe der Reihe (6.), wenn sie direkt berechnet wird, $= -\frac{1}{4}\pi$; die Formel $\frac{1}{2}b\pi + \frac{1}{4}\pi$ giebt aber dasselbe, wenn $b = -1$ genommen wird; deshalb muß in dem ganzen Raume von $z = \frac{1}{2}\pi$ bis $z = \frac{3}{2}\pi$, innerhalb welchem das Gesetz der Stetigkeit sich nicht ändert, $b = -1$ genommen werden, und man hat daher aus (6.)

8) $\cos z - \frac{1}{3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7}\cdot\cos 7z + \cdots = -\frac{1}{4}\pi$

für alle Werthe von z, welche zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegen.

Verfolgt man diese Untersuchung nur noch einen Schritt weiter, so findet man allgemein

9) $\cos z - \frac{1}{3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}\cdot\cos 5z - \cdots = \pm\frac{1}{4}\pi$,

wo das (+) Zeichen zur Rechten gilt, so oft $\cos z$ positiv ist; wo dagegen das (−) Zeichen genommen werden muß für alle Werthe von z, für welche $\cos z$ negativ wird. Für alle Werthe von z endlich, für welche $\cos z = 0$ ist, gilt die Formel (9.) gar nicht.

Integrirt man nun, um unsere Haupt-Aufgabe weiter zu verfolgen, diese Gleichung (9.) auf's Neue nach z, so erhält man

10) $\sin z - \frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z - \cdots = \pm\frac{1}{4}\pi z + C$,

wo die Konstante C noch näher bestimmt werden muß, während rechts das (+) oder (−) Zeichen gilt, je nachdem z so genommen wird, daß $\cos z$ positiv, oder so, daß $\cos z$ negativ ist. Weil aber für $z = 0$ jedes Glied der Reihe (10.) der Null gleich wird, so wird $C = 0$ für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen. — Für $z = 2\mu\pi$, wird die Reihe in (10.) zur Linken ebenfalls Null; der Ausdruck zur Rechten wird

dagegen $+\frac{1}{2}\mu\pi^2+C$; folglich muß $C=-\frac{1}{2}\mu\pi^2$ genommen werden, für alle Werthe von z zwischen $(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$. — Für $z=(2\mu+1)\pi$ endlich wird die Reihe in (10.) zur Linken ebenfalls $=0$; der Ausdruck zur Rechten aber

$$=-\tfrac{1}{4}(2\mu+1)\pi^2+C;$$

folglich muß man $C=\frac{1}{4}(2\mu+1)\pi^2$ nehmen, so oft z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt.

Man hat daher

$$11)\quad \sin z-\frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z+\frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z-\cdots=\tfrac{1}{4}\pi z-\tfrac{1}{2}\mu\pi^2,$$

so oft z zwischen $(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ liegt; dagegen

$$12)\quad \sin z-\frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z+\frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z-\cdots=-\tfrac{1}{4}\pi z+\tfrac{1}{4}(2\mu+1)\pi^2,$$

so oft z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ genommen wird. — So oft $\cos z=0$ ist, gelten endlich diese Resultate gar nicht.

Nachdem wir in diesem letztern Falle die Art und Weise, wie nach dem Integriren die Konstante bestimmt wird, gehörig auseinandergesetzt haben, auch daß diese Konstante immer einen andern Werth annimmt, so oft die Reihe das Gesetz der Stetigkeit unterbricht; wollen wir von nun an nur den Fall betrachten, wo z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Man hat aber aus (11.), indem man $\mu=0$ setzt,

$$13)\quad \sin z-\frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z+\frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z-\cdots=\tfrac{1}{4}\pi z$$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Integrirt man nun diese Gleichung noch einmal, so erhält man

$$14)\quad \cos z-\frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z+\frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z-\cdots=-\tfrac{1}{8}\pi z^2+C,$$

wo die Konstante C (für z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$) noch näher bestimmt werden muß. Setzt man zu dem Ende $z=0$, so geht die Reihe links in $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots$ über, während der Ausdruck rechts in C übergeht. Es ist aber die Summe

dieser Reihe zwar $= \frac{1}{32}\pi^3$; solche jedoch nicht so augenblicklich zu finden. Wollte man deshalb in der Gleichung (14.) lieber $z = \frac{1}{2}\pi$ setzen, so würden alle Glieder zur Linken Null werden, und man würde

$$0 = -\frac{1}{32}\pi^3 + C, \quad \text{also} \quad C = \frac{1}{32}\pi^3$$

haben. Allein da man nicht weiß, ob überhaupt die Form (14.) der Summe noch an der Grenze von z, d. h. für $z = -\frac{1}{2}\pi$, oder $z = \frac{1}{2}\pi$, gilt, so bleibt dieses letztere Verfahren zur Bestimmung der Konstante zu gelangen, immer gewagt, und wäre hier höchstens nur dadurch zu rechtfertigen, daß die Formeln (11. und 12.) für $z = \frac{1}{2}\pi$, also für $\mu = 0$ alle beide in einander übergehen. Man braucht jedoch nicht gerade $z = \frac{1}{2}\pi$, sondern kann $z = \frac{1}{2}\pi - x$ setzen, dagegen x unendlich-klein sich denken. Man hat dann

$$\cos z = \sin x, \quad \cos 3z = -\sin 3x, \quad \cos 5z = \sin 5x, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

und die Gleichung (14.) wird nun

$$\sin x + \frac{1}{3^3}\cdot\sin 3x + \frac{1}{5^3}\cdot\sin 5x + \cdots = -\frac{1}{8}\pi(\tfrac{1}{2}\pi - x)^2 + C.$$

Da sich nun die Reihe links immer mehr der Null nähert, je kleiner x gedacht ist, und für x unendlich-klein (wegen der unendlich großen Nenner im Unendlichen) selber unendlich-klein wird, so hat man für diesen Werth von x

$$0 = -\tfrac{1}{32}\pi^3 + C, \quad \text{oder} \quad C = \tfrac{1}{32}\pi^3.$$

Es ist daher

$$15) \quad \cos z - \frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z - \cdots = \tfrac{1}{32}\pi^3 - \tfrac{1}{8}\pi\cdot z^2$$

für alle Werthe von z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$.

Wird nun zuletzt diese Gleichung (15.) noch einmal integrirt, so erhält man, weil das Resultat für $z = 0$, links $= 0$ wird, folglich auch rechts $= 0$ werden muß,

$$16) \quad \sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots = \tfrac{1}{32}\pi^3\cdot z - \tfrac{1}{24}\pi\cdot z^3,$$

welche Gleichung jedoch auch nur gilt für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Mit dieſer Gleichung (16.) iſt nun unſere, Eingangs vorgelegte Aufgabe gelöſt.

Will man aber unterſuchen, welche Summe dieſelbe Reihe in (16.) zur Linken hat, wenn $z > \frac{1}{2}\pi$ aber $z < \frac{3}{2}\pi$ genommen wird, ſo ſetze man $z = \pi - u$, während man ſich u zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ denkt. Weil dann

$$\sin(2a+1)z = \sin[(2a+1)\pi - (2a+1)u] = \sin(2a+1)u$$

iſt, ſo wird jetzt die Summe der gedachten Reihe genau dieſelbe, wenn man u, d. h. $\pi - z$ ſtatt z ſchreibt. Man hat alſo

$$17)\quad \sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots = \tfrac{1}{3\cdot 2}\pi^3\cdot(\pi - z) - \tfrac{1}{2\cdot 4}\pi\cdot(\pi - z)^3,$$

und dieſe Gleichung gilt für alle Werthe von z, welche zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegen.

Es iſt leicht auf dieſem letztern Wege weiter zu gehen, und die Summe derſelben Reihe zu finden, für alle Werthe von z zwiſchen $\frac{3}{2}\pi$ und $\frac{5}{2}\pi$; dann zwiſchen $\frac{5}{2}\pi$ und $\frac{7}{2}\pi$, u. ſ. w. f. — Das Reſultat fällt dabei leicht in die Augen.

Zweites Kapitel.

Von der Entwikkelung gegebener Funktionen in Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen. (Fourier's Reihen).

§. 6.

Man soll eine beliebig gegebene Funktion φ_x in eine nach den Sinus der vielfachen Bogen fortlaufende Reihe entwikkeln.

Aufl. Man wende die Methode der unbestimmten Koefficienten an, setze daher zuerst

$$\varphi_x = A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + \cdots,$$

und suche nun die unbestimmten Koefficienten A_1, A_2, A_3, ꝛc. ꝛc. zu bestimmen.

Denkt man aber daran, daß wenn a und b zwei beliebige ganze Zahlen vorstellen, dann allemal

$$\int_{x \div 0} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = 0 \text{ ist, so oft } a \gtrless b,$$

dagegen, wenn $a = b$ seyn sollte,

$$\int_{x \div 0} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \int_{x \div 0} (\sin bx)^2 \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist *), so wird man die angenommene Gleichung mit $\sin bx$

*) Es ist nämlich

$$\sin ax \cdot \sin bx = \tfrac{1}{2}\cos(a-b)x - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)x,$$

und diese Formel geht für $a = b$ in

multipliziren, dann ſtatt b nach und nach 1, 2, 3, 4 und jede ganze Zahl ſetzen, zuletzt aber jede dieſer entſtehenden Gleichungen, nach x zwiſchen den Grenzen 0 und π integriren. Man erhält dann nach und nach

$$\int_{x=0} \varphi_x \cdot \sin x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_1;$$

$$\int_{x=0} \varphi_x \cdot \sin 2x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_2;$$

$$\int_{x=0} \varphi_x \cdot \sin 3x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_3; \text{ u. ſ. w. f.;}$$

ſo daß hieraus die unbeſtimmten Koeffizienten A_1, A_2, A_3, ꝛc. ꝛc. gefunden werden. — Man hat folglich zuletzt, wenn man in den beſtimmten Integralen z ſtatt x ſchreibt, alſo dz ſtatt dx *),

$$1) \qquad \varphi_x = \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\sin ax \cdot \int_{z=0} \varphi_z \cdot \sin az \cdot dz\right],$$

wo S die Summe aller der Glieder bedeutet, welche aus dem allgemeinen Gliede (in den eckigen Klammern) hervorgehen, wenn man ſtatt a nach und nach Null und alle poſitiven ganzen Zahlen ſchreibt (das allererſte Glied, wo $a = 0$ geſetzt wird, wird aber ſelbſt der Null gleich).

§. 7.

Soll φ_x in eine Reihe verwandelt werden, die nach Koſinus der vielfachen Bogen fortläuft, ſo ſetze man

$$(C) \cdots \quad \varphi_x = B_0 + B_1 \cdot \cos x + B_2 \cdot \cos 2x + B_3 \cdot \cos 3x + \cdots,$$

$$(\sin bx)^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2bx$$

über. Daher iſt

$$\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{1}{2(a-b)} \cdot \sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \cdot \sin(a+b)x,$$

ſo lange a von b verſchieden iſt; dagegen für $a = b$

$$\int (\sin bx)^2 \cdot dx = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4b} \cdot \sin 2bx.$$

*) Man erhält offenbar eine und dieſelbe konſtante Zahl, ob man $\varphi_x \cdot \sin ax$ integrirt nach x zwiſchen den Grenzwerthen 0 und π von x, oder ob man $\varphi_z \cdot \sin az$ nach z integrirt zwiſchen den Grenzwerthen 0 und π von z.

integrire zuerst nach x zwischen den Grenzen 0 und π; 3 giebt

$$\int_{x\div 0} \varphi_x \cdot dx = B_0 \cdot \pi, \text{ oder } B_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x\div 0} \varphi_x \cdot dx.$$

ultiplizirt man nun nach und nach die Gleichung (C) mit $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ꝛc. ꝛc., und integrirt man dann jede der uen Gleichungen nach x, zwischen den Grenzen 0 und π, so hält man nach und nach die Gleichungen, aus denen die Koefcienten B_1, B_2, B_3, ꝛc. ꝛc. sich ergeben, nämlich

$$B_a = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x\div 0} \varphi_x \cdot \cos ax \cdot dx.$$

Man hat daher zuletzt, wenn man unter dem Integralzeichen z statt x schreibt,

$$\varphi_x = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x\div 0} \varphi_z \cdot dz + \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\cos ax \cdot \int_{x\div 0} \varphi_z \cdot \cos az \cdot dz\right],$$

wo jedoch der Werth Null von a ausgeschlossen bleibt; oder auch

$$2) \qquad \varphi_x = \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\cos ax \cdot \int_{x\div 0} \varphi_z \cdot \cos az \cdot dz\right],$$

wenn man statt a nach und nach Null und alle ganzen Zahlen setzt, dagegen von dem für $a = 0$ hervorgehenden Gliede nur die Hälfte nimmt.

§. 8.

So einfach diese Entwikkelungen der (§§. 6. und 7.) sind, so wichtig ist die Beantwortung der Frage, ob solche auch richtig seyen? — Wir haben nämlich, um diese Resultate (1. u. 2.) zu erhalten, die Methode der unbestimmten Koefficienten angewandt, also vorausgesetzt, daß eine solche Reihe, wie wir sie suchen, existire. Die gefundenen Resultate gelten also gar nicht, wenn die gemachte Voraussetzung gar nie statt haben sollte, oder sie gelten doch nur in dem Umfange, in welchem die Voraussetzung statt hat, ohne daß das Gesetz der Stetigkeit unterbrochen wird. Die Untersuchung, ob überhaupt, oder in welchem Umfange die mittelst der Methode der unbestimmten Koefficienten gefundenen

Resultate gelten, muß daher der Anwendung der gedachten Methode selbst allemal auf dem Fuße folgen *).

Man muß daher nun 1) die Konvergenz der gefundenen Reihen untersuchen (da solche nicht nach Potenzen von x fortlaufen); und in allen den Fällen, wo die Konvergenz ausgemittelt ist, 2) die Reihen selbst wieder summiren, um zu sehen, ob oder in welchen Fällen sie die Funktion φ_x wieder geben.

Wir wollen aber hier zunächst voraussetzen, daß die Konvergenz dieser Reihen bereits erkannt sey, wir wollen daher hier nur noch die Reihen summiren; jedoch solche zuvor etwas umformen.

Weil nämlich

$$\sin ax \cdot \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot \sin az \cdot dz = \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot \sin az \cdot \sin ax \cdot dz,$$

und

$$\sin az \cdot \sin ax = \tfrac{1}{2} \cos a(z-x) - \tfrac{1}{2} \cos a(z+x),$$

weil ferner

$$\cos ax \cdot \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot \cos az \cdot dz = \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot \cos az \cdot \cos ax \cdot dz,$$

und

$$\cos az \cdot \cos ax = \tfrac{1}{2} \cos a(z-x) + \tfrac{1}{2} \cos a(z+x)$$

ist, so hat man

3) $$S\left[\sin ax \cdot \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot \sin az \cdot dz\right] = \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot S\left[\sin ax \cdot \sin az\right] \cdot dz$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot S[\cos a(z-x)] \cdot dz - \tfrac{1}{2} \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot S\left[\cos a(z+x)\right] \cdot dz$$

und noch

4) $$S\left[\cos ax \cdot \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot \cos az \cdot dz\right] = \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot S\left[\cos ax \cdot \cos az\right] \cdot dz$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot S[\cos a(z-x)] \cdot dz + \tfrac{1}{2} \int_{x \div 0} \varphi_z \cdot S\left[\cos a(z+x)\right] \cdot dz,$$

---

*) Früher glaubte man, daß die Resultate, welche die Methode der unbestimmten Koefficienten liefert, keiner weitern Untersuchung oder Bestätigung bedürften, indem man wähnte, daß wenn die Annahme der Form nicht gerechtfertigt sey, solches sich während der Rechnung durch Widersprüche sogleich herausstelle. Wir haben gegen diese gefährliche Ansicht bereits in den „Aufsätzen aus d. Geb. d. höh. Math." Berlin 1823. S. 39 ff. gewarnt, und gezeigt, daß kein Widerspruch während der Entwikkelung sich zeigen kann, sobald die angenommene Form der Reihe auch nur in einem einzigen besondern Falle zulässig seyn sollte.

› ſtatt a ſowohl 0, als auch jede poſitive ganze Zahl geſetzt
:rden muß, um die Glieder der einzelnen Reihen zu erhalten,
› aber, wenn $a = 0$ iſt, nur die Hälfte des Gliedes genom-
en werden darf, ſobald die Reihen in (3. und 4.) zur Linken
ıd dann auch die zur Rechten, diejenigen ſeyn ſollen, welche
ıan in den (§§. 6. und 7.) erhalten hat.

Es kommt dieſen Formeln zu Folge, nun alles zunächſt dar-
uf an, die Reihen

$$S[\cos a(z-x)] \text{ und } S[\cos a(z+x)],$$

›. h.

$$1+\cos(z\mp x)+\cos 2(z\mp x)+\cos 3(z\mp x)+\cdots,$$

oder beſſer noch die allgemeinere Reihe

$$1+v\cdot\cos(z\mp x)+v^2\cdot\cos 2(z\mp x)+v^3\cdot\cos 3(z\mp x)+\cdots,$$

welche für $v = 1$ in die obige übergeht, zu ſummiren.

§. 9.

Die Summe dieſer letztern Reihen findet ſich aber (nach §. 2.) augenblicklich, in ſo ferne man

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

kennt. Man findet danach

$$S[v^a\cdot\cos a(z\mp x)] = \frac{1-v\cdot\cos(z\mp x)}{1-2v\cdot\cos(z\mp x)+v^2}.$$

Das allererſte Glied dieſer Reihe iſt $= 1$; ſoll ſolches aber nur $\frac{1}{2}$ ſeyn, ſo muß man rechts noch $\frac{1}{2}$ ſubtrahiren. Dies giebt

$$5)\quad S[v^a\cdot\cos a(z\mp x)] = \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{1-2v\cdot\cos(z\mp x)+v^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{(1-v)^2+4v\cdot\sin^2\frac{1}{2}(z\mp x)},$$

wenn links ſtatt des allererſten Gliedes (für $a = 0$) nur deſſen Hälfte genommen wird, was wir von nun an bei dieſen Reihen immer ſtillſchweigend vorausſetzen wollen. Multiplizirt man nun dieſe Gleichung links und rechts mit φ_x, und integrirt man dann zwiſchen den Grenzen 0 und π, ſo ergiebt ſich

6) $$\int_{\pi\div 0} \varphi_z \cdot S[v^n \cdot \cos a(z \mp x)] \cdot dz$$
$$= \int_{\pi\div 0} \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{(1-v)^2 + 4v \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(z \mp x)} \cdot \varphi_z \cdot dz.$$

Der Werth des Integrals zur Rechten für $v = 1$ ist dann die gesuchte Summe der in (3. und 4.) zur Rechten vorkommenden Reihen.

§. 10.

Setzen wir nun ein- für allemal voraus, daß von $z = 0$ an bis $z = \pi$ hin, die Funktion φ_z nie den Werth ∞ annehme, so ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen (in 6. zur Rechten) für $v = 1$ allemal der Null gleich, die Fälle ausgenommen, in denen $\sin \frac{1}{2}(z-x) = 0$, also $z - x = 0$, oder $= 2\mu\pi$ wird, unter μ irgend eine positive oder negative ganze Zahl verstanden. Man wird daher unterscheiden müssen die beiden Hauptfälle: I. wenn x zwischen $2\mu\pi$ und $(2\mu+1)\pi$ liegt, und II. wenn x zwischen $(2\mu+1)\pi$ und $(2\mu+2)\pi$ (oder zwischen $(2\mu-1)\pi$ und $2\mu\pi$) liegen sollte.

A. Es liege x zwischen $2\mu\pi$ und $(2\mu+1)\pi$; es sey nämlich $x = 2\mu\pi + w$, während w zwischen 0 und π liegen soll. Man hat dann

$z \mp x = (z \mp w) \mp 2\mu\pi$, also $\sin \frac{1}{2}(z \mp x) = (-1)^{\mu} \cdot \sin \frac{1}{2}(z \mp w)$;
folglich $\sin^2 \frac{1}{2}(z \mp x) = \sin^2 \frac{1}{2}(z \mp w)$,
also auch

7) $$\int_{\pi\div 0} \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{(1-v)^2 + 4v \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(z \mp x)} \cdot \varphi_z \cdot dz$$
$$= \int_{\pi\div 0} \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{(1-v)^2 + 4v \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(z \mp w)} \cdot \varphi_z \cdot dz.$$

Gilt nun das (+) Zeichen in $z \mp x$, also auch in $z \mp w$, so ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen immerfort der Null gleich; für alle Werthe von z von 0 an bis π hin. Also ist auch das Integral selbst der Null gleich (nach I. Th. Analys. §. 35.). Folglich hat man

I_1. $$\int_{\pi\div 0} \varphi_z \cdot S[\cos a(z+x)] \cdot dz = 0$$

für alle Werthe von x zwischen $2\mu\pi$ und $(2\mu+1)\pi$, während μ jede positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Betrachten wir nun noch den andern Fall, wo in $z \mp x$, also auch in $z \mp w$ das (—) Zeichen gilt. In diesem Falle ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen wenigstens dann immer Null, wenn nicht $z = w$ ist; also ist das Integral selbst zwischen den Grenzen 0 und $w-\varepsilon$, und wiederum zwischen den Grenzen $w+\varepsilon$ und π immer noch der Null gleich, und nur noch zu finden zwischen den Grenzen $w-\varepsilon$ und $w+\varepsilon$, wo ε unendlich-klein gedacht werden kann. Weil aber in diesem unendlich-kleinen Zwischenraume der Werth des Faktors φ_z von $\varphi_{w-\varepsilon}$ zu $\varphi_{w+\varepsilon}$ übergeht, während $\varphi_{w-\varepsilon} = \varphi_w = \varphi_{w+\varepsilon}$ genommen werden kann, in so ferne ε unendlich-klein gedacht wird, so kann man $\varphi_z = \varphi_w$ als einen konstanten Faktor herausſetzen, und man erhält statt des Integrals (in 6. oder in 7. zur Rechten mit dem (—) Zeichen in $z \mp x$) jetzt

$$8) \qquad \varphi_w \cdot \int_{(w+\varepsilon)\div(w-\varepsilon)} \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{(1-v)^2+4v\cdot sin^2\frac{1}{2}(z-w)} \cdot dz;$$

führt man nun hier den neuen Veränderlichen u statt z ein, mittelst der Gleichung

$$z = w+u, \quad \text{also} \quad dz = du,$$

so geht dieses Integral (8.) noch über in

$$9) \qquad \varphi_w \cdot \int_{\varepsilon\div(-\varepsilon)} \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{(1-v)^2+4v\cdot sin^2\frac{1}{2}u} \cdot du;$$

oder, weil dieser Ausdruck unter dem Integralzeichen für alle negativen u dasſelbe liefert, wie für alle positiven, nach (I. Th. Analyſ. §. 40. Nr. 2.)

$$10) \qquad 2\varphi_w \cdot \int_{\varepsilon\div 0} \frac{\frac{1}{2}(1-v^2)}{(1-v)^2+4v\cdot sin^2\frac{1}{2}u} \cdot du.$$

Nun ist aber nach (I. Th. Analyſ. §. 32.)

$$\int \frac{du}{a-b\cdot cos\,u} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{1}{cos} \frac{-b+a\cdot cos\,u}{a-b\cdot cos\,u}.$$

Also geht der Ausdruck (10.) noch über in

11) $$\varphi_w \cdot \frac{1}{\cos} \frac{-2v+(1+v^2)\cdot\cos\varepsilon}{1+v^2-2v\cdot\cos\varepsilon}$$

und giebt nun für $v=1$ zunächst

12) $$\varphi_w \cdot \frac{1}{\cos}(-1) \text{ und dann } \varphi_w \cdot \pi \text{ *).}$$

Es ist also aus (6.), für $v=1$, und wenn man zu gleicher Zeit statt w seinen Werth $x-2\mu\pi$ schreibt,

$$I_2. \quad \int_{\pi\div 0} \varphi_z \cdot S[\cos a(z-x)]dz = \pi\cdot\varphi_{x-2\mu\pi},$$

wenn x zwischen $2\mu\pi$ und $(2\mu+1)\pi$ liegt.

B. Es liege nun x zwischen den Grenzen $(2\mu-1)\pi$ und $2\mu\pi$; es sey nämlich $x=2\mu\pi-w$ und w wieder wie vorher zwischen 0 und π, so wird

$$z\mp x = z\pm w\mp 2\mu\pi,$$

sogleich

$$\sin^2\tfrac{1}{2}(z\mp x) = \sin^2\tfrac{1}{2}(z\pm w),$$

und man erhält daher nun augenblicklich, vermöge des so eben in (A.) Entwikkelten,

$$II_1. \quad \int_{\pi\div 0} \varphi_z \cdot S[\cos a(z+x)]\cdot dz = \pi\cdot\varphi_{2\mu\pi-x}$$

und

$$II_2. \quad \int_{\pi\div 0} \varphi_z \cdot S[\cos a(z-x)]\cdot dz = 0,$$

für alle Werthe von x zwischen $(2\mu-1)\pi$ und $2\mu\pi$.

---

*) Man hätte auch in (9.) einstweilen $v=1-h$ setzen und h unendlich-klein sich denken können, so daß h^2 gegen h außer Acht gelassen wird. Dann ging das Integral selbst, wenn man zu gleicher Zeit, da auch u nur unendlich-kleine Werthe hat, bloß $\frac{1}{2}u$ statt $\sin\frac{1}{2}u$ schreibt, über in

$$\varphi_w \cdot \int_{\varepsilon\div(-\varepsilon)} \frac{h}{h^2+u^2}\cdot du, \text{ oder in } 2\varphi_w \cdot \int_{\varepsilon\div 0} \frac{h}{h^2+u^2}\cdot du.$$

Weil nun $\int \frac{h}{h^2+u^2}\cdot du = \frac{1}{tg}\frac{u}{h}$ ist, so geht dieses letztere Resultat wieder über in $\varphi_w \cdot \frac{1}{tg}\frac{\varepsilon}{h}$, während für $h=0$, $\frac{1}{tg}\frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{tg}\frac{1}{0} = \frac{1}{2}\pi$ ist, so daß man als Endresultat wiederum $\pi\cdot\varphi_w$ erhält.

C. Betrachten wir noch den Fall, wo $x = 2\mu\pi$ selbst ist. Man hat dann (in I. und II.) $w = 0$; und $z - w$ wird daher dann für keinen der Werthe von z (welche von 0 an bis zu π hin gehen) negativ; also darf das Integral (9.) jetzt nur zwischen den Grenzen 0 und ε genommen werden; folglich bekommt man jetzt nur die Hälfte von dem, was man vorher für dasselbe Integral erhalten hat. — Man findet also, wenn $x = 2\mu\pi$ gedacht wird, so daß

$$\cos a(z \mp x) = \cos a(z \mp 2\mu\pi) = \cos az$$

ist,

III. $$\int_{\varkappa \doteq 0} \varphi_x \cdot S[\cos a(z \mp x)] \cdot dz = \int_{\varkappa \doteq 0} \varphi_x \cdot S[\cos az] \cdot dz = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \varphi_0,$$

wo φ_0 das bedeutet was aus φ_x wird, wenn man 0 statt x setzt. —

D. Endlich betrachten wir noch den Fall, wo $x = (2\mu - 1)\pi$ also $w = \pi$ ist. Es wird nun $z - w$, d. h. $z - \pi$ für keinen der Werthe von z, von 0 an bis π hin, positiv; also kann man das Integral (8.) nur zwischen den Grenzen $w - \varepsilon$ und w, also das Integral (9.) nur zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und 0 nehmen, so daß man wiederum nur die Hälfte bekommt von dem, was man in (12.) erhalten hat. Man hat daher, wenn $x = (2\mu - 1)\pi$ gedacht wird, so daß

$$\cos a(z \mp x) = \cos(az \pm a\pi) = (-1)^a \cdot \cos az$$

ist,

IV. $$\int_{\varkappa \doteq 0} \varphi_x \cdot S[\cos a(z \mp x) \cdot dz = \int_{\varkappa \doteq 0} \varphi_x \cdot S[(-1)^a \cdot \cos az] \cdot dz = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \varphi_\varkappa.$$

Alles dieses gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß in allen den Reihen (I. — IV.) zur Linken statt des allerersten, für $a = 0$ hervorgehenden Gliedes, nur dessen Hälfte genommen wird; wie oben bereits erinnert ist.

§. 11.

Will man nun die Summe der Reihe (§. 7. Nr. 2. zur Rechten) haben, so muß man die beiden Gleichungen (I_1. und I_2.), oder (II_1. und II_2.), oder die beiden in (III.) oder endlich die beiden in (IV.) des (§. 10.) gefundenen Summen addiren und die Hälfte nehmen (nach §. 8. Nr. 4.).

Man erhält dann

A. Wenn x zwiſchen $2\mu\pi$ und $(2\mu+1)\pi$ liegt,

I. $$S\cdot\left[\cos ax\cdot\int_{\pi\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right]=\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_{x\mp 2\mu\pi}.$$

B. Wenn x zwiſchen $(2\mu-1)\pi$ und $2\mu\pi$ liegt,

II. $$S\cdot\left[\cos ax\cdot\int_{\pi\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right]=\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_{2\mu\pi-x}.$$

C. Wenn $x=2\mu\pi$ iſt,

III. $$S\cdot\left[\cos ax\cdot\int_{\pi\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right]$$
$$=S\cdot\left[\int_{\pi\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right]=\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_0,$$

welche Formel alſo gilt für

$x=-6\pi,\ =-4\pi,\ =-2\pi,\ =0,\ =2\pi,\ =4\pi,\ =2\mu\pi,$
$=(2\mu+2)\pi$ ꝛc. ꝛc.

D. Endlich wenn $x=(2\mu-1)\pi$ iſt,

IV. $$S\cdot\left[\cos ax\cdot\int_{\pi\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right]$$
$$=S\cdot\left[(-1)^n\int_{\pi\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right]=\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_\pi,$$

welche Formel alſo gilt für

$x=-5\pi,\ =-3\pi,\ =-\pi,\ =+\pi,\ =+3\pi,\ =(2\mu-1)\pi,$
$=(2\mu+1)\pi=$ ꝛc. ꝛc.

Die Formeln (III. und IV.) gehen auch aus der Formel (I.) hervor, wenn man daſelbſt $x=2\mu\pi$, oder $x=(2\mu+1)\pi$ ſetzt. Dieſelben gehen aber auch aus der Formel (II.) hervor, wenn man daſelbſt $x=2\mu\pi$, oder $x=(2\mu-1)\pi$ ſetzt. Alſo kann man die Reſultate (III. und IV.) außer Acht, und die For-

meln (I. und II.) nicht bloß zwiſchen, ſondern auch noch an den für ſie angegebenen Grenzen gelten laſſen.

Alle dieſe Formeln gelten aber nur unter der Vorausſetzung, daß man in den Reihen zur Linken ſtatt des allererſten, für $a = 0$ hervorgehenden Gliedes, nur deſſen Hälfte nimmt *).

§. 12.

Will man aber die Summe der andern Reihe (§. 6. Nr. 1. zur Rechten) haben, ſo muß man (nach §. 8. Nr. 3.) dieſelben im (§. 10.) gefundenen Summen von einander ſubtrahiren und die Hälfte nehmen. Man erhält dann

A. Wenn x zwiſchen $2\mu\pi$ und $(2\mu+1)\pi$ liegt,

I. $$S.\left[\sin ax \cdot \int_{\alpha \div 0} \varphi_z \cdot \sin az \cdot dz\right] = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \varphi_{x-2\mu\pi}.$$

B. Dagegen wenn x zwiſchen $(2\mu-1)\pi$ und $2\mu\pi$ liegt,

II. $$S.\left[\sin ax \cdot \int_{\alpha \div 0} \varphi_z \cdot \sin az \cdot dz\right] = -\tfrac{1}{2}\pi \cdot \varphi_{2\mu\pi-x}.$$

C. Iſt ferner $x = 2\mu\pi$ oder $= (2\mu-1)\pi$, ſo iſt dieſelbe Reihe allemal $= 0$, weil jedes einzelne Glied Null iſt; auch weil dieſelben Reſultate aus (§. 10. III. und IV.) hervorgehen.

Da das allererſte Glied dieſer Reihe (I. II.) zur Linken (für $a = 0$) den Werth Null hat, ſo braucht man die Beſchränkung, daß nur die Hälfte deſſelben allererſten Gliedes zu nehmen iſt, hier nicht zu machen.

§. 13.

Giebt man in den (§§. 11. und 12.) dem μ in den Formeln (I.) den Werth 0, in den Formeln (II.) dagegen den Werth 0 und auch den Werth 1, ſo erhält man:

*) Fügte man in allen dieſen Summenzeichen für die Reihen zur Linken, zu dem allgemeinen Gliede noch den Faktor $1-\frac{1}{2}0^a$ hinzu, ſo würde ſolcher für $a = 0$ den Werth $\frac{1}{2}$; für jede ganze Zahl aber, welche ſtatt a geſetzt werden mag, den Werth 1 annehmen. Dann drückten die Summenzeichen die Reihen, welche hier betrachtet werden, vollkommen aus, und man brauchte nicht erſt noch mit Worten hinzuzufügen, daß vom allererſten Gliede nur die Hälfte genommen werden ſoll.

A. Für alle Werthe von x zwischen 0 und π (aus §. 12. I. und §. 11. I. für $\mu = 0$) ist,

$$1)\qquad S\cdot\left[\sin ax\cdot\int_{x\div 0}\varphi_z\cdot\sin az\cdot dz\right] = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_x,$$

und diese Formel gilt schon nicht mehr, wenn $x = 0$ oder $x = \pi$ seyn sollte, es müßte denn zufällig φ_x so seyn, daß $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_\pi = 0$ wäre; — ferner

$$2)\qquad S\cdot\left[\cos ax\cdot\int_{x\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right] = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_x,$$

und diese Formel gilt auch noch an den Grenzen, wo $x = 0$ oder $x = \pi$ ist.

B. Für alle Werthe von x, zwischen den Grenzen $-\pi$ und 0 (aus §. 12. II. und §. 11. II. für $\mu = 0$) ist

$$1)\qquad S\cdot\left[\sin ax\cdot\int_{x\div 0}\varphi_z\cdot\sin az\cdot dz\right] = -\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_{-x},$$

und diese Formel gilt schon nicht mehr für $x = 0$ und auch nicht für $x = -\pi$, wenn nicht gerade $\varphi_0 = 0$ oder $\varphi_\pi = 0$ ist; ferner

$$2)\qquad S\cdot\left[\cos ax\cdot\int_{x\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right] = +\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_{-x},$$

und diese Formel gilt auch noch an den Grenzen, wo $x = -\pi$ oder $x = 0$ ist.

C. Für alle Werthe von x zwischen π und 2π (aus §. 12. II. und §. 11. II. für $\mu = 1$.) ist dagegen

$$1)\qquad S\cdot\left[\sin ax\cdot\int_{x\div 0}\varphi_z\cdot\sin az\cdot dz\right] = -\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_{2\pi-x},$$

welche Formel für $x = \pi$ und $x = 2\pi$ schon nicht mehr gilt, wenn nicht zufällig $\varphi_\pi = 0$ und $\varphi_{2\pi} = 0$ seyn sollte; endlich

$$2)\qquad S\cdot\left[\cos ax\cdot\int_{x\div 0}\varphi_z\cdot\cos az\cdot dz\right] = +\tfrac{1}{2}\pi\cdot\varphi_{2\pi-x},$$

und diese Formel gilt noch für $x = \pi$, und auch für $x = 2\pi$.

Diese speciellen Formeln lassen nun, eben so wie die allgemeinern der (§§. 11. und 12.) zur Genüge erkennen: „daß die Entwikkelungen (NNr. 1. und 2. der §§. 6. und 7.) der beliebig gegebenen Funktion φ_x von x, in Reihen, welche

welche nach Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen, nur so lange gelten, als der Werth von x sich zwischen den Grenzen 0 und π befindet; und daß die erstere davon (die Sinus-Reihe) schon nicht mehr gilt, wenn x mit einer dieser Grenzen selbst zusammenfällt, wenn nicht an dieser Grenze $\varphi_x = 0$ ist, daß aber die Kosinus-Reihe noch an diesen Grenzen, d. h. für $x = 0$ und $x = \pi$ selbst gilt, wie auch φ_x seyn mag.

§. 14.

Will man nun nach Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufende Reihen haben, welche eine beliebig gegebene Funktion vorstellen für alle Werthe von x, die 0 oder a sind, oder zwischen 0 und a liegen, unter der Voraussetzung, daß a irgend eine gegebene positive Zahl ist, so setzt man in den Formeln (I_1. I_2. des §. 10.) zuerst $\mu = 0$, und f_z statt φ_z; dann $x = \frac{\pi \mathfrak{x}}{a}$ und $z = \frac{\pi x'}{a}$, so daß $dz = \frac{\pi}{a} \cdot dx'$ wird; dadurch werden die Grenzwerthe von x', welche mit den Grenzwerthen 0 und π von z mittelst derselben Gleichung $z = \frac{\pi x'}{a}$ zusammenhängen, bezüglich 0 und a. Indem man zuletzt statt f_z, d. h. statt $f_{\frac{\pi x'}{a}}$ wiederum $\varphi_{x'}$ schreibt (also auch statt $f_{\frac{\pi \mathfrak{x}}{a}}$ wiederum $\varphi_{\mathfrak{x}}$, so erhält man sogleich, wenn man zuletzt lieber $\mathfrak{b}$ statt a, und x statt $\mathfrak{x}$ schreibt,

$$\text{I.} \quad \int_{a \div 0} \varphi_{x'} \cdot S\left[\cos \mathfrak{b} \frac{\pi(x' + x)}{a}\right] \cdot dx' = 0,$$

$$\text{II.} \quad \int_{a \div 0} \varphi_{x'} \cdot S\left[\cos \mathfrak{b} \frac{\pi(x' - x)}{a}\right] \cdot dx' = a \cdot \varphi_x,$$

wenn man nur jedesmal links vom allerersten Gliede (für $\mathfrak{b} = 0$) die Hälfte nimmt.

Subtrahirt man aber die obere Gleichung von der untern, so erhält man, wenn man wieder z statt x' schreibt:

$$\text{III.} \quad \frac{2}{a}\cdot S\left[\sin\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{a\div 0}\varphi_z\cdot\sin\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right]=\varphi_x.$$

Und werden die Gleichungen (I. u. II.) zu einander addirt, so ergiebt sich noch

$$\text{IV.} \quad \frac{2}{a}\cdot S\left[\cos\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{a\div 0}\varphi_z\cdot\cos\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right]=\varphi_x,$$

wenn wiederum links vom allererſten Gliede (für $b=0$) nur die Hälfte genommen wird.

Die Gleichung III. gilt für alle Werthe von x zwiſchen 0 und a, aber nicht mehr für $x=0$, oder für $x=a$ ſelbſt, es müßte denn die Funktion φ_x ſo ſeyn, daß ſie $=0$ wird, ſowohl für $x=0$ als auch für $x=a$, was die Reihe zur Linken in beiden Fällen auch wird. Die Gleichung (IV.) dagegen gilt für $x=0$, für $x=a$ und für alle Werthe von x zwiſchen 0 und a, wie auch die Funktion φ_x an den Grenzen, nämlich für $x=0$ und für $x=a$, nur immer ſeyn mag.

Die Funktion φ_x kann dabei von $x=0$ an bis $x=a$ hin continuirlich, d. h. durch eine und dieſelbe analytiſche Zuſammenſetzung ausgedrückt oder discontinuirlich ſeyn, d. h. innerhalb der gedachten Werthe von x ihren analytiſchen Ausdruck ändern, wenn man nur in den Integralen ſtatt φ_x oder φ_z diejenige Funktion ſetzt, welche für die jetzt im Auge habenden Werthe von x, als Funktion von x herauskommen ſoll.

§. 15.

Will man Reihen haben, welche jede Funktion φ_x von $x=-a$ an bis zu $x=+a$ hin ausdrücken, wo a eine beliebige poſitive Zahl vorſtellt, ſo muß man in den Formeln (III. IV. des vorhergehenden §. 14.) zuerſt 2a ſtatt a, dann f_x ſtatt φ_x, hernach $x=\xi+a$ und $z=x'+a$, alſo $dz=dx'$, zuletzt aber wiederum φ_x ſtatt $f_{x'+a}$, alſo auch φ_ξ ſtatt $f_{\xi+a}$ ſetzen.

Man erhält dann sogleich, wenn man zuletzt wieder x statt z und z statt x' schreibt:

$$\text{I.}\quad \frac{1}{a}\cdot S\left[\sin\frac{b\pi(x+a)}{2a}\cdot\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\sin\frac{b\pi(z+a)}{2a}\cdot dz\right]=\varphi_x$$

für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$, aber nur dann für $x=-a$ und $x=+a$ selbst, wenn die Funktion φ_x für diese beiden Werthe wirklich der Null gleich seyn sollte;

$$\text{II.}\quad \frac{1}{a}\cdot S\left[\cos\frac{b\pi(x+a)}{2a}\cdot\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\cos\frac{b\pi(z+a)}{2a}\cdot dz\right]=\varphi_x,$$

für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$ und auch noch für $x=-a$ und $x=+a$ selbst, wenn nur links in der Reihe statt des allererſten Gliedes (wo $b=0$ ist) dessen Hälfte genommen wird.

Um diese Reihen für φ_x noch weiter umzuformen, setze man noch $2b$ statt b, um alle geraden Zahlen, dann aber $2b+1$ statt b, um auch alle ungeraden Zahlen statt b gesetzt zu haben, so zerlegt sich dadurch jede dieser Reihen in zweie, wovon die eine bloß die geraden, die andere bloß die ungeraden Glieder der anfänglichen Reihen hat. Bemerkt man dabei noch, daß

$$\cos\frac{2b\pi(x+a)}{2a}=\cos\left(\frac{b\pi x}{a}+b\pi\right)=(-1)^b\cdot\cos\frac{b\pi x}{a},$$

$$\sin\frac{2b\pi(x+a)}{2a}=\sin\left(\frac{b\pi x}{a}+b\pi\right)=(-1)^b\cdot\sin\frac{b\pi x}{a};$$

und

$$\cos\frac{(2b+1)\pi(x+a)}{2a}=(-1)^{b+1}\cdot\sin\frac{(2b+1)\pi x}{2a},$$

$$\sin\frac{(2b+1)\pi(x+a)}{2a}=(-1)^b\cdot\cos\frac{(2b+1)\pi x}{2a}$$

ist, und daß dieselben Umformungen gelten, wenn z statt x gesetzt wird, so erhält man

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \frac{1}{a}\cdot S\left[\sin\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\sin\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right] \\ +\frac{1}{a}\cdot S\left[\cos\frac{(2b+1)\pi x}{2a}\cdot\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\cos\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz\right]=\varphi_x, \end{cases}$$

welche Formel gilt für alle Werthe von x zwiſchen $-a$ und $+a$, aber für $x=-a$ und $x=+a$ ſelbſt nur dann, wenn φ_x für dieſe Werthe von x wirklich der Null gleich ſeyn ſollte; — ferner

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \frac{1}{a}\cdot S\left[(1-\frac{1}{2}\cdot 0^b)\cos\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\cos\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right] \\ +\frac{1}{a}\cdot S\left[\sin\frac{(2b+1)\pi x}{2a}\cdot\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\sin\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz\right]=\varphi_x, \end{cases}$$

welche Formel für alle Werthe von x zwiſchen $-a$ und $+a$, und auch für $x=-a$ und $x=+a$ ſelbſt noch gilt. Dabei haben wir dasmal in dem einen Summenzeichen noch den Faktor $1-\frac{1}{2}0^b$ eingeſchoben, um die genaue, durch nichts weiter beſchränkte Formel zu erhalten, weil dieſer Faktor $=1$ iſt, ſo oft $b>0$; dagegen $=\frac{1}{2}$ iſt, ſo oft $b=0$ genommen wird.

Man kann nun auch Funktionen φ_x ausdrücken, welche zugleich noch eine oder die andere beſondere Eigenſchaft haben.

A. Will man z. B. eine Funktion φ_x ausdrücken für alle Werthe von x zwiſchen $-a$ und $+a$, welche zugleich die Eigenſchaft hat, daß

$$\varphi_x=\varphi_{-x},\quad \text{alſo}\quad \varphi_z=\varphi_{-z}$$

wird, d. h. welche für gleiche, übrigens poſitive und negative Werthe von x allemal denſelben Werth annimmt, ſo hat man (nach I. Th. Analyſ. §. 40. Nr. 3.) unter dieſer Vorausſetzung

$$\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\sin\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz=0$$

und

$$\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\sin\frac{b\pi z}{a}\cdot dz=0,$$

während die andern Integrale, welche statt des Sinus den Kosinus unter dem Integralzeichen haben, bloß zwischen den Grenzen 0 und a und dann doppelt genommen zu werden brauchen (I. Th. Analys. §. 40. Nr. 2.).

Die Gleichung (III.) wird dadurch

$$\text{V.}\quad \frac{2}{a}\cdot S\left[\cos\frac{(2b+1)\pi x}{2a}\cdot\int_{a\div 0}\varphi_z\cdot\cos\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz\right]=\varphi_x$$

und ist gültig für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$, jedoch für $x=-a$ und $x=+a$ nur dann, wenn für diese letztern Werthe $\varphi_x=0$ werden sollte.

Die Gleichung (IV.) dagegen wird

$$\text{VI.}\quad \frac{2}{a}\cdot S\left[(1-\tfrac{1}{2}0^b)\cdot\cos\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{a\div 0}\varphi_z\cdot\cos\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right]=\varphi_x,$$

und ist gültig für alle Werthe von x zwischen $x=-a$ und $x=+a$, auch mit Einschluß dieser beiden.

Die Formel (VI.) ist genau die Formel (IV. des §. 14.), nur daß sie unter der jetzigen Voraussetzung nicht bloß von $x=0$ bis $x=a$, sondern von $x=-a$ an bis $x=a$ gilt, wie sich dies letztere im (§. 14.), wenn man die hiesige Voraussetzung macht, auch von selbst versteht.

B. Will man aber eine Funktion φ_x ausdrücken für alle Werthe von x zwischen $x=-a$ und $x=+a$, und welche die Eigenschaft hat, daß

$$\varphi_{-x}=-\varphi_x,\quad \text{also}\quad \varphi_{-z}=-\varphi_z\ ,$$

wird *), d. h. daß die Werthe von φ_x für gleiche aber entgegengesetzte Werthe von x, selber gleiche aber entgegengesetzte Werthe annehmen, so hat man unter dieser Voraussetzung

$$\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\cos\frac{b\pi z}{a}\cdot dz=0=\int_{a\div(-a)}\varphi_z\cdot\cos\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz$$

*) Diese Bedingung hat die andere in ihrem Gefolge, daß für $x=0$

$$\varphi_0=-\varphi_0,\quad \text{d. h.}\quad 2\varphi_0=0,$$

also $\varphi_0=0$ ist, d. h. daß φ_x für $x=0$ selbst der Null gleich wird, worauf wir hier besonders aufmerksam machen.

und $\int_{a\div(-a)} \varphi_z \cdot \sin\frac{b\pi z}{a}\cdot dz = 2\cdot\int_{a\div 0} \varphi_z \cdot \sin\frac{b\pi z}{a}\cdot dz,$

$$\int_{a\div(-a)} \varphi_z \cdot \sin\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz = 2\int_{a\div 0} \varphi_z \cdot \sin\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz.$$

Die Gleichung (III.) giebt nun

$$\text{VII.}\quad \frac{2}{a}\cdot S\left[\sin\frac{b\pi x}{a}\cdot\int_{a\div 0} \varphi_z \cdot \sin\frac{b\pi z}{a}\cdot dz\right] = \varphi_x,$$

und dieß ist genau die Formel (III. des §. 14.), nur daß sie unter der jetzigen Voraussetzung nicht bloß für alle Werthe von x zwischen 0 und a, sondern auch für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$ gilt, wie sich dies letztere schon im (§. 14.) von selbst versteht, sobald man dort noch die hiesige Voraussetzung macht. Sie gilt aber nicht für $x = -a$ und für $x = +a$, wenn nicht φ_x selbst für diese Werthe von x der Null gleich seyn sollte.

Die Gleichung (IV.) giebt dagegen

$$\text{VIII.}\quad \frac{2}{a}\cdot S\left[\sin\frac{(2b+1)\pi x}{2a}\cdot\int_{a\div 0} \varphi_z \cdot \sin\frac{(2b+1)\pi z}{2a}\cdot dz\right] = \varphi_x$$

und diese ist wieder gültig für alle Werthe von x, von $x = -a$ an bis zu $x = +a$ einschließlich.

§. 16.

Hat man aber Reihen gefunden, welche φ_x ausdrücken, so oft x zwischen gewissen Grenzen liegt, so ist klar, daß wenn man diese Reihen nach x differenziirt 1 mal, 2 mal u. s. f.; man noch Reihen erhalten werde, welche die Differenzial-Koefficienten $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$, ꝛc. ꝛc. ausdrücken werden, für alle Werthe von x, welche zwischen denselben Grenzen liegen. Uebrigens ist es in den Anwendungen nicht einerlei, welche der verschiedenen, für φ_x gefundenen Reihen man statt φ_x setzt, sondern man wird jedesmal eine solche Reihe heraussuchen und dafür setzen, welche

allen den Nebenbedingungen noch genügt, die von der Funktion φ_x erfüllt werden sollen.

§. 17.

Fourier, dem wir alle Resultate des gegenwärtigen Kapitels verdanken, hat dadurch, daß er zuerst darauf aufmerksam machte, wie diese nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufenden Reihen discontinuirliche Funktionen eben so gut darstellen als continuirliche, für die mathematische Physik gleichsam ein neues Feld eröffnet, auf welchem seine Nachfolger, und darunter namentlich Poisson rüstigen Schrittes einherschreiten. — Wir haben hier übrigens nur die wichtigsten und einfachsten Resultate gegeben, aber so gestellt, wie dies unseren eigenen Arbeiten und Ansichten gemäß, auf die wir zum Theil im ersten Kapitel hingewiesen haben, uns zweckmäßig geschienen hat. Wer ausführlicheres wünscht, findet solches in Fourier's Théorie de la chaleur. 1822 *).

---

*) Poisson schreibt die Reihe

$$\varphi_x = \frac{2}{a} \cdot S\left[\sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \int_{a\div 0} \varphi_z \cdot \sin\frac{n\pi z}{a} \cdot dz \right]$$

dem Lagrange zu, und citirt die Miscell. math. phys. Taur. T. III. p. 261. — Allein, wenn wir auch dem Scharfsinne des Lagrange überall und besonders in jenen Abhandlungen den größten Beifall zollen und zugeben müssen, daß er seinen Nachfolgern fast überall die Wege gezeigt hat, so sagt doch Lagrange mit zu klaren Worten, „daß er die Reihe nur als eine Interpolations-Reihe ansehe", endlich auch, „daß man eine discontinuirliche Funktion nicht in solche Reihen verwandeln könne;" so daß namentlich in dieser letztern Beziehung dem Fourier das Prioritäts-Recht nicht streitig gemacht werden kann. Es mag nach dem, was Lagrange a. a. O. geleistet hat, nicht schwer gewesen seyn, das Wahre in der Formel zu sehen; allein Fourier hat es doch zuerst darin gesehen; und daß das Zuerstsehen nicht immer so ganz leicht ist, beweist nicht bloß im Allgemeinen das Ei des Columbus, sondern hier auch in's Besondere noch der Umstand, daß Poisson dasselbe nicht vor Fourier gesehen hat, obgleich die oben angeführte Formel des Lagrange seit 1760 mindestens, schon allen Mathematikern bekannt seyn konnte. — Wer sich für diese Untersuchungen interessirt, mag noch Fourier's oben angeführte Théorie de la chaleur 1822 mit Poisson's Théorie mathem. de la chaleur 1835 vergleichen.

Wir wollen aber hier noch zeigen, durch welches Verfahren Fourier von diesen unendlichen Reihen aus, zu einem zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommenen bestimmten Integral gelangt, durch welches er dann ebenfalls eine beliebige Funktion φ_x darstellt.

Man gehe nämlich von der Formel (§. 14. II.) aus, und setze in ihr 2a statt a, so daß man erhält

$$\int_{2a\div 0} \varphi_{x'} \cdot S\left[\cos b\,\frac{\pi(x'-x)}{2a}\right]\cdot dx' = 2a\cdot\varphi_x.$$

Diese Gleichung ist aber gültig für alle Werthe von x zwischen 0 und 2a, und an diesen Grenzen selbst, wenn nur in der Reihe zur Linken vom allerersten Gliede (für $b=0$) die Hälfte genommen wird. In dieser Gleichung setzt man nun $a+x$ statt x und $a+x'$ statt x', so wie F_x statt φ_{a+x}, also auch $F_{x'}$ statt $\varphi_{a\ x'}$, und man erhält

$$\frac{1}{2a}\cdot\int_{a\div(-a)} F_{x'}\cdot S\left[\cos b\,\frac{\pi(x'-x)}{2a}\right]\cdot dx' = F_x,$$

oder

$$\frac{1}{2a}\cdot S\left[\int_{a\div(-a)} F_{x'}\cdot\cos b\,\frac{\pi(x'-x)}{2a}\cdot dx'\right] = F_x,$$

welche gilt für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$, so wie noch an den Grenzen selbst.

Man macht nun

$$\frac{\pi}{2a} = \varepsilon,\quad \frac{b\pi}{2a} = b\varepsilon = u,$$

und die vorstehende Gleichung geht über, weil jetzt

$$\frac{1}{2a} = \frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\varepsilon$$

wird, in

$$\frac{1}{\pi}\cdot S\left[\int_{a\div(-a)} F_{x'}\cdot\cos u(x'-x)\cdot dx'\right]\cdot\varepsilon = F_x,$$

wo sich das Summenzeichen S auf alle Werthe von $u = b\varepsilon$ bezieht, von $u=0$ an bis $u = \infty\cdot\varepsilon = \infty$.

Wird

Wird nun a unendlich groß, so wird ε unendlich-klein, und kann, weil ε der Unterschied der auf einander folgenden Werthe von u oder bε ist, durch du bezeichnet werden, und die durch S angezeigte Summe geht dann nach (I. Th. Analys. §. 35.) sogleich in ein Integral über, so daß man nun hat

$$(\odot)\cdots \frac{1}{\pi}\cdot\int_{\infty\div 0}^{\infty\div(-\infty)}\left[\int F_{x'}\cdot\cos u(x'-x)\cdot dx'\right]\cdot du = F_x,$$

welche gilt für alle Werthe von x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ *).

Auch diese Formel gilt für jede discontinuirliche Funktion F_x eben so gut, wie für jede continuirliche.

Anmerk. Wollte man übrigens diese Entwikkelungen einer willkührlichen Funktion φ_x in Reihen nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen gebrauchen um gegebene solche Reihen zu summiren, wie dies Poisson empfiehlt, so könnten wir hier unsere Zustimmung in so ferne nicht mit vollem Herzen geben, als das Verfahren ein sehr indirektes seyn würde, während gerade zur Summation von Reihen die direktesten Methoden immer zugleich auch die empfehlenswerthesten sind, und in jedem Falle dasselbe leisten, was jede indirekte Methode nur immer zu leisten vermag.

§. 18.

Will man aber zuletzt noch die Konvergenz einer dieser Reihen untersuchen, so kann man sich gar nicht, wie Poisson gethan hat (Mécanique 2me édit. T. I. pag. 647.), damit begnügen, daß man zeigt, wie die Glieder der Reihe immer kleiner und zuletzt unendlich-klein werden, weil es bekanntlich eine große Anzahl unendlicher Reihen giebt, welchen diese Eigenschaft zukommt, und welche keinesweges konvergent sind (wie, um nur ein Beispiel anzuführen, die Reihe

*) Daß man vom allerersten Gliede die Hälfte nehmen müsse, hat jetzt keinen Einfluß mehr, weil für $a=\infty$, also $\varepsilon = du$, dieses allererste Glied unendlich-klein wird.

Uebrigens kann die Richtigkeit dieses Endresultates auch direkt nachgewiesen werden.

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\cdots);$$

sondern man muß die Summe einer unbestimmten Anzahl n von Gliedern der Reihen zu bestimmen suchen, und dann nachweisen, daß solche für $n = \infty$ zwischen bestimmten Grenzen liegt.

In Bezug auf die Reihen der (§§. 6. u. 7.) braucht man dieses Verfahren (nach §. 8.) natürlich nur für die Reihen

$$S\left[\int_{x=0}^{\pi} \varphi_z \cdot \cos a(z \mp x) \cdot dx\right]$$

anzuwenden, weil erstere aus letzteren durch bloße Addition und Subtraktion hervorgehen.

Und beginnt man mit dieser Untersuchung über die Konvergenz der Reihen auf diesem Wege, wie solches nach (§. 8.) hätte geschehen sollen, so kann unsere Summation (§§. 9. 10.) in so ferne ganz überflüssig werden, als die Summe von n Gliedern wenn sie für $n = \infty$ ausgewerthet werden kann, zu gleicher Zeit die Summe von unendlich vielen Gliedern, also die Summe der ganzen unendlichen Reihe liefert.

Wir übergehen jedoch hier die Untersuchungen über die Konvergenz dieser Reihen des Fourier, und verweisen den Leser noch einmal auf die schönen Beweise der Konvergenz von Dirichlet in Crelle's Journal für Mathem. (Jahrg. 1829. 1. Heft.); und in Dove's Archiv (I. Bd. 1836.).

Gedruckt bei A. W. Schade.

O
K
C
W
A
O
B
a,
E
C
F
56
R